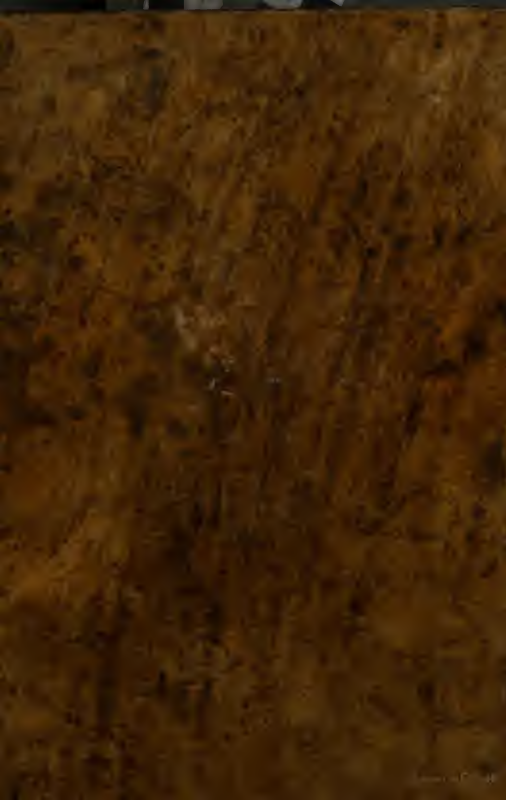






10. G. 4



10. G. 1

416
~~17-28~~

B. Rev. 5th 1579

B. Rev.

III

1579-86

DIZIONARIO
DELLE
SCIENZE MATEMATICHE
VOLUME PRIMO



613287 SBV

DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE

COMPILATO DA UNA SOCIETÀ
DI ANTICHI ALLIEVI DELLA SCUOLA POLITECNICA DI PARIGI

SOTTO LA DIREZIONE

DI

A.-S. DE MONTFERRIER

MEMBRO DELL' ANTICA SOCIETÀ REALE ACCADEMICA DELLE SCIENZE
DI PARIGI, DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI MARSIGLIA,
DI QUELLA DI METZ EC. EC.

PRIMA VERSIONE ITALIANA

CON NUMEROSE AGGIUNTE E CORREZIONI

DEL D. GIUSEPPE GASBARRI

DI GIUSEPPE FRANÇOIS

VOLUME PRIMO



FIRENZE

PER V. BATELLI E FIGLI

1858

AVVISO

DELL' EDITORE

Da che, sul cadere del secolo decimosettimo, la scoperta dei nuovi calcoli somministrò all'uomo la facoltà di maneggiare, nuova divinità, l'infinito, di sottoporlo all'analisi la più rigorosa, e di assegnarne le leggi, i progressi delle matematiche furono rapidi, prodigiosi, incredibili. I confini della scienza, che avevano opposto ostacoli insormontabili ai precedenti matematici, vennero rimossi e atterrati: ciò che prima formava l'apice delle cognizioni fu portato agli Elementi dalla nuova analisi: una moltitudine di problemi inaccessibili agli antichi metodi si piegò senza difficoltà ai procedimenti del calcolo infinitesimale. In principio questo potente strumento venne, è vero, adoprato con una certa diffidenza, e con un certo timore, ispirato specialmente dalla stessa portentosa sua forza: ma ben presto famigliarizzatisi con esso i geometri, e assicuratisi della sua esattezza, e della perfetta conformità dei suoi risultati con quelli della più rigorosa geometria, ad onta delle obiezioni e diremo ancora delle accanite persecuzioni che molti tentarono di opporgli e suscitargli, lo adottarono con fiducia, e lo fecero loro guida nelle grandi scoperte che illustrarono il decorso secolo. Fu quella l'epoca del massimo

splendore e prosperità delle matematiche. L'aritmetica, l'algebra, la geometria, l'astronomia, la meccanica, l'idraulica, la nautica, l'ottica, l'acustica fecero tali e tanti avanzamenti per opera d'Eulero, dei Bernoulli, di Lagrange, di Fagnano, di Lorgna, di Clairaut, di Laplace, di Boscoyich, di Riccati, di Frisi, di Alembert, di Prony, di Bossut, di Bouguer, di Bradley, di Lacaille, di Piazzini, e di mille altri sommi ingegni, che se tornassero a vivere non solo Archimede, Apollonio, ed Euclide, ma ancora Galileo, Keplero, Cartesio, ed Huygens resterebbero compresi da maraviglia mirando la vastità delle moderne matematiche. Nè crediamo di essere illusi da soverchia predilezione per la scienza, attribuendo ad esse in gran parte i grandi progressi, che nello stesso tempo hanno fatto le scienze tutte. Ed infatti quel bisogno di non ammetter per certo se non ciò che è stato ad evidenza dimostrato, quell'avversione al vago ed all'ipotetico, quello spirito di esattezza a cui abitua lo studio delle matematiche non potè a meno di estendersi anco alle altre scienze, e dar loro un impulso fortissimo al perfezionamento. La fisica si arricchì di nuove ed importanti teorie, rigettandone altre o scoperte false o non sufficientemente provate: la storia naturale e tutte le sue differenti parti presero un aspetto affatto nuovo: la chimica cessò di essere uno strumento d'inganni nelle mani di pochi impostori, e di un complesso di fatti e di notizie per la maggior parte erronee, tutte poi sconnesse e mal digerite, divenne la prima fra le scienze sperimentali e di osservazione: nè la finiremmo se partitamente volessimo percorrere quella serie non interrotta di sublimi scoperte e d'invenzioni in ogni ramo di umano sapere, che sì giustamente meritò al secolo decimottavo il titolo di *Secolo dei lumi*.

Ma se il numero delle nozioni costituisce la ricchezza di una scienza, rende però difficili le ricerche e allo scienziato che voglia richiamarsi a memoria il significato di qualche termine, o qualche particolare teoria, di cui siasi dimenticato, e al non scienziato che desideri di acquistare

cognizione di un qualche isolato soggetto, senza essere obbligato a intraprendere uno studio fondato della scienza. Per soddisfare a questo bisogno i trattati compiuti, in cui le materie sieno disposte nell'ordine scientifico, che indica la loro scambievole concatenazione, e natural deduzione, sono di un uso troppo faticoso per il dotto, a nulla servono all'indotto. L'ordine il più conveniente e il più adattato a tali ricerche è l'alfabetico. Quindi abbiamo veduto moltiplicarsi ed essere accolti con sommo favore i Dizionarj scientifici; e fra quelli di matematiche rammenteremo il Dizionario pubblicato da Saverien a Parigi nel 1752 vol. 2 in-4°, il Dizionario di matematiche dei sigg. Bossut, Lalande ec. facente parte dell'Enciclopedia metodica impresso a Parigi nel 1785 vol. 3 in-4°, e il Dizionario filosofico e matematico del dott. Hutton stampato a Londra nel 1796 vol. 2 in-4°, non facendo parola delle tante Enciclopedie, nelle quali le matematiche si trovano incluse in confuso insieme con le altre materie.

Se il secolo attuale non conta nelle scienze esatte scoperte così originali e strepitose come quelle del precedente, essendochè il gusto predominante è rivolto più specialmente alle scienze fisiche, alla chimica, e alle scienze naturali, non ostante si sono percorse di nuovo le scoperte già fatte, si sono perfezionati i metodi, si sono migliorati i particolari, si sono riconosciuti legami fra teorie per l'avanti credute separate, e la scienza infine mercè le fatiche di chiarissimi ingegni viventi è stata, ed è tuttavia in un continuo e rapido progredimento. Si rendeva perciò necessaria la compilazione di un nuovo Dizionario, che presentasse le matematiche in quello stato di perfezionamento in cui adesso si trovano, e che evitasse ancora parecchi dei difetti, che s' incontrano nei Dizionarj di sopra citati, e che non occorre il quì rammentare. Al quale oggetto ha pienamente corrisposto il *Dictionnaire des sciences mathématiques pures et appliquées*, compilato e pubblicato a Parigi dal 1835 al 1837 da una società di antichi allievi della Scuola Politecnica sotto la direzione del sig.

A.-S. de Montferrier. In esso vedonsi le diverse parti della scienza portate al livello delle attuali cognizioni, le diverse materie vengono esposte con tutto il rigore scientifico congiunto ad una massima chiarezza, e ad una semplicità di stile quale conviensi alla natura del soggetto, gli articoli vi sono trattati in modo da renderli indipendenti, per quanto è possibile, gli uni dagli altri, senza nuocere alla mutua dipendenza e legame delle diverse parti della scienza, al che vien supplito con opportune e frequenti chiamate: cosicchè mentre un tal dizionario contiene quanto può desiderarsi dal dotto, diviene accessibile e di piana intelligenza ancora a chi non è versatissimo nelle matematiche. Ciò poi che distingue quest'opera, e le accresce sommo pregio, è la biografia dei grandi ingegni, che colle proprie fatiche hanno maggiormente contribuito all'avanzamento e splendore delle matematiche, ed i sunti storici di ciascun ramo di esse inseriti ai rispettivi articoli; le quali materie erano state omesse e trascurate nelle precedenti compilazioni di simil genere. Un'opera di tal fatta ha incontrato, come era da prevedersi, l'universale aggradimento in Francia, e noi non abbiamo dubitato che un favore non dissimile fosse per essere accordato in Italia ad una traduzione di essa: e in questa veduta, ci siamo rivolti ai sigg. Dott. *Giuseppe Gasbarri* e *Giuseppe François*, esercitati in queste scienze, i quali non solo hanno condisceso ad eseguirne la versione in Italiano, ma si sono pur anco incaricati di farvi delle aggiunte e dei miglioramenti, che consisteranno specialmente negli appresso capi.

Nell'ampliamento della parte bibliografica. In un'opera del genere della presente è impossibile, e ridicolezza sarebbe il pretenderlo, che di ogni materia venga trattato in tutta la pienezza dell'estensione, in modo da rendere assolutamente inutile la consultazione di altre opere. Per far ciò non sarebbero sufficienti mille volumi. L'oggetto principale di un Dizionario scientifico quello sì è di servire di pronuario e di repertorio, di dar cioè un'idea compiuta ma elementare di ciascun soggetto, e di additare

quindi gli autori e le opere principali che ne hanno più profondamente trattato, onde essere del pari utile e al giovane apprendente, e alle persone già istruite. Questa parte, forse la più interessante e la più necessaria, era stata alquanto trascurata dagli Autori francesi, perciò i Traduttori vi suppliranno aggiungendo dovunque occorrerà l'indicazione dei libri, ai quali dovrà ricorrere chi fosse desideroso di ulteriori cognizioni.

Nel dare una maggiore estensione ad alcuni articoli. Varj articoli del Dizionario sono stati trattati con qualche secchezza di fronte ad altri di eguale ed anco di minore importanza: sono state omesse o leggermente toccate parecchie teorie fondamentali, mentre altre di utilità meno immediata vi si trovano esposte in tutte le più minute particolarità. Così, a cagion d'esempio, la sola teoria delle frazioni continue occupa trentacinque colonne in-4° nell'originale francese, laddove ne sono state consacrate appena venti, sparse in varj luoghi del Dizionario, alla importante teoria generale delle equazioni algebriche, alla quale in ultima analisi riducesi ogni genere di problemi: il solo articolo *Balistica* ha un'estensione dieci volte maggiore dell'articolo *Agrimensura*: poche cose si dicono sulla teoria dell'eliminazione, sulla trasformazione delle coordinate, sulla trigonometria sferica: si trascura affatto la discussione generale delle curve dei diversi ordini, l'applicazione dell'analisi alla geometria a tre dimensioni, nel tempo che diffusamente si parla delle annuità, della regola d'alligazione, della regola congiunta, delle varie basi di numerazione, delle congruenze, ec. Una simile imperfezione non sfuggì agli occhi dei dotti Compilatori, i quali al termine dell'opera emessero la seguente dichiarazione. « L'impegno preso coll'editore
 « di questo Dizionario di non oltrepassare il numero di
 « 76 distribuzioni, non ci ha permesso di dare a molte
 « delle sue parti tutti quelli sviluppi, che fin da principio avevamo giudicato necessari; perciò abbiamo
 « dovuto omettere contro la nostra volontà, non solo

Diz. di Mat. Vol. I.

« parecchie utili applicazioni, ma ancora varie teorie nuove, e non poche notizie biografiche, che avrebbero richiesto uno spazio maggiore di quello che ci era accordato. Noi speriamo però di potere in breve render completa l'esposizione del vasto insieme delle scienze matematiche mediante un volume di *Supplimento*, che ci è stato di già domandato dalla maggior parte dei nostri associati. » Questo supplimento non è però stato pubblicato, ma qualora possa esserlo in seguito le materie che vi saranno comprese verranno inserite a far parte dell'opera nei luoghi rispettivi. Frattanto i Traduttori si sono impegnati di riparare all'avvertito inconveniente, quasi inevitabile nei lavori che sono il frutto dell'opera di più persone, introducendo negli articoli difettosi le opportune aggiunte, onde ristabilire il perfetto equilibrio ed armonia in tutte le parti dell'opera, e a tale oggetto si varranno non solamente dei migliori trattati e delle opere più accreditate, ma ancora dei consigli che potranno esser loro suggeriti da persone illuminate, consigli che verranno sempre accolti con piacere e riconoscenza. Le aggiunte riguarderanno particolarmente gli articoli di matematiche pure, nei quali il difetto di sopra rammentato si fa maggiormente sentire.

Nella compilazione di varie tavole di lettura. Un Dizionario nella forma sua naturale non può essere letto che interrottamente ogni volta che venga la circostanza di doverlo consultare: una lettura di seguito sarebbe tanto fastidiosa quanto poco proficua. Gli autori francesi dunque, per dargli il vantaggio che hanno i trattati sistematici, avevano promesso di dare delle tavole in cui venisse indicato l'ordine col quale, in ciascun ramo della scienza, dovessero leggersi e studiarsi i diversi articoli del Dizionario; ma al buon divisamento non ha tenuto dietro l'effetto. Queste tavole utilissime verranno peraltro espressamente compilate per la traduzione italiana, la quale così senza perdere la natura di Dizionario, diverrà una collezione di trattati speciali sopra tutti i rami delle matematiche pure ed applicate, ed

avrà sopra l'edizione francese il vantaggio di supplire nelle mani dello studioso a qualunque più completo libro di Elementi.

Rimane adesso da fare un'altra avvertenza. Il direttore in capo dell'opera, il sig. *De Montferrier*, seguace dei principj della filosofia di Kant, ha cercato d'insinuare in varj articoli, e specialmente in quelli di *Matematiche e Filosofia delle Matematiche*, i sogni del trascendentalismo germanico, che in questi ultimi tempi ha fatto molti progressi in Francia. In principio era venuto in pensiero ai Traduttori di sopprimere affatto tali passi, come estranei alla natura del soggetto; ma quindi hanno risoluto di riprodurli, nella versione, in tutta la loro integrità riflettendo, che mentre non si tratterebbe di nulla i principj, su cui è basata la scienza, non si può essere in grado di giudicare da sé stesso se le dottrine filosofiche esaltati di quella delirante scuola del *Transcendentalismo*, che le nuove idee filosofiche, ancor più lontane dal senso, potessero indurre in errore il lettore, ne sono stati avvertiti col mezzo di apposite note.

Il pregio primitivo dell'opera, ed i miglioramenti e le aggiunte che si propongono di fare i Traduttori ci sono del più lieto augurio, che la versione italiana sarà per essere ricevuta con generale soddisfazione in Italia, dove le matematiche hanno ricevuto nuova vita al risorgimento della letteratura, e dove in ogni tempo sono fioriti uomini insigni, che le hanno con ogni sorta di scoperte ampliate ed illustrate.



INTRODUZIONE

Le scienze matematiche costituiscono, nel loro insieme, l'ordine di verità il più completo, a cui fino a questo giorno sia giunto l'umano sapere. Infatti le leggi generali ed immutabili che regolano l'universo, e quasi tutti i fenomeni che ne emanano non ci sono stati spiegati che mediante il concorso di queste sole scienze, che abbracciano nel loro immenso dominio i molteplici rapporti delle quantità e dell'estensione, la misura del tempo e quella dello spazio. Nel sentorio delle verità immutabili, scoperte e stabilite per mezzo di queste scienze, l'uomo ha veramente diritto di rammentarsi con orgoglio la sua celeste origine, contemplando con religiosa ammirazione l'opera augusta della sua propria ragione. Queste verità, contro le quali non varrebbe ad opporsi nessuna potenza intelligente, non sono state certamente create da esso, ma nello scoprirle egli si è elevato fino al loro stesso principio, ed ha rotto e vinto quegli ostacoli, che una filosofia nemica d'ogni progresso aveva posto alla sua ragione.

Non è però che dopo lunghe fatiche, dopo molte prove infruttuose, dopo molte ricerche e tentativi inutili, che l'uomo è giunto a possedere alcune verità tanto più infallibili, in quanto che riconoscono in sè medesime il loro *criterium veritatis*. Questa certezza assoluta che accompagna le proposizioni matematiche, in generale, manca ancora alle altre scienze, che non ostante debbono esser tra loro collegate ed unite nell'umana ragione, come altrettante deduzioni di un solo e medesimo principio intellettuale. Quantunque una tal verità di fatto non possa ragionevolmente impugnarsi pure nei tempi passati, ed auco ai nostri giorni, parecchi matematici, confondendo la scienza fra sè stessa cogli oggetti ai quali si applica, pretendono invano di farla discender dall'alto posto, che essa occupa nel nostro intelletto, fino a quello delle cognizioni pratiche ottenute per mezzo dell'osservazione, e rinserarla tutta intera colla sua potenza universale negli angusti confini di un semplice metodo empirico. Errore strano, e veramente inconciliabile coi progressi delle matematiche, che non hanno potuto elevarsi a quell'altezza prodigiosa, in cui si trovano adesso collocate, senza che la considerazione dell'Infinito entrasse come elemento necessario in tutte le proposi-

zioni più elevate della scienza. Questa necessità di astrarre i principj puramente intellettuali dagli oggetti materiali a cui quelli si applicano, si fa sentire in tutte le costruzioni matematiche, e stabilisce in un modo incontestabile la spiritualità del principio dal quale emana la scienza.

Deve sembrare a prima vista inconcepibile che una divisione così determinata, così difficile a distruggersi, esista nei principj generatori di una scienza, di cui la maggior parte delle deduzioni, o per meglio dire delle applicazioni, hanno un carattere irrefragabile di certezza e di verità. La storia generale delle matematiche considerata da quel punto di vista filosofico, nel quale ci siamo posti, può aiutarci a risolvere questo problema. La storia infatti ci mostra la scienza partecipe di tutte le modificazioni successive che subisce l'umana società. Essa in principio lotta penosamente contro i bisogni, dai quali il mondo è assalito fino dall'anora della sua civilizzazione. Le sue prime funzioni pratiche furono certamente di regolare i rapporti delle cose fra loro, collo stabilire fra gli uomini un mezzo giuridico e superiore di constatare l'estensione e la quantità reale degli oggetti, dei quali la divisione fra le famiglie, e la conservazione, in ciascuna di esse, dietro determinate regole, dovevano formare una delle basi essenziali del contratto sociale; così al pari della morale, la scienza dovè prima di tutto esser legislatrice.

Nel tempo in cui la scienza determinava le forme e i limiti della proprietà, era pure chiamata a misurare la successione del tempo, e a regolare così, colla stessa autorità, i rapporti più nobili e più elevati delle associazioni umane. Fino da quel momento essa entrò con franchezza nel vasto dominio della speculazione; e, quando da morale si formò nel cristianesimo religioso, la scienza divenne uno degli attributi i più rispettati del sacerdozio. A misura che la civilizzazione si consolida, i legami che tengono uniti questi due prodotti superiori della ragione si stringono più fortemente, ed insieme concorrono ad abbreviare l'infanzia della umanità. E qui che comincia la storia sociale, e in tutte le alternative che contrassegnano il suo corso, in tutte le sue fasi di progresso o di esitazione, si scorgono sempre le stesse potenze intellettuali, in atto di presedere ai perfezionamenti successivi di tutte le forze dell'umanità.

Nulladimeno, se i fatti risultanti dalla morale e i fatti risultanti dalla scienza in principio si stabiliscono dovunque senza contrasto, si vede pure fino dalle prime pagine della storia, che il primo uso, che l'uomo fa della sua intelligenza emancipata, è quello di proporsi dei dubbj sulle leggi stesse di queste causalità. Questi dubbj s'incontrano nella spiegazione del principio superiore a cui si riferiscono e da cui emanano le scienze matematiche; e d'altronde tutte le filosofie si restringono infatti a due idee affatto opposte: lo scopo della ragione è oggi quello di ricondurle ad un principio ideutico ed assoluto.

A fine di realizzare più specialmente nella scienza queste vedute elevate, era necessario di procedere a un gran lavoro preparatorio, per ritrarre, elaborandogli, gli elementi diversi e numerosi di questa sintesi filosofica. Tale è stato il pensiero primo degli autori di questo Dizionario.

Da molto tempo l'Inghilterra e la Germania avevano preceduto la Francia in questo cammino scientifico. Questi due paesi, ai quali l'umanità va debitrice di sì prodigiose ricerche, di sì ammirabili lavori in tutti i rami dell'umano sapere, possedevano raccolte assai simili, in quanto alla forma, a quella che adesso pubblichiamo. Nulladimeno queste opere stimabili, e che spesso ci sono state di un soccorso indispensabile, non portavano ancora l'impronta di quell'idea filosofica, della quale ci eravamo proposti di preparare la produzione seconda nel seno della scienza. Noi ci accingiamo dunque a soddisfare in Francia a questo lavoro nuovo, che presentava molte e gravi difficoltà. Fra i trattati che compongono l'*Enciclopedia* se ne trova pure uno che è intitolato *Dizionario di Matematiche*: ma quest'Opera incompleta doveva anzi esser per noi un ostacolo piuttosto che un modello o un mezo. D'altronde sia che si consideri sotto il punto di vista speciale della sua utilità scientifica, sia che si riguardi come un'applicazione alla scienza del sistema filosofico da cui essa emana, quell'Opera è caduta affatto sotto questo doppio rapporto in un completo discredito. Da una parte i progressi della scienza hanno oltrepassato in molti punti importanti i lavori matematici che vi sono riuniti, e per un'altra parte il pensiero filosofico, che con quell'Opera si aveva per oggetto di fortificare, non può più pretendere di esercitare l'influenza che per un tempo ha avuta. Il posto era dunque vacante e noi l'abbiamo preso. Ma noi ci siamo spinti in questa nuova carriera senza il soccorso di speranze troppo vive o troppo vicine. In ogni tempo dure prove, e dolorosi inganni sono stati la ricompensa degli sforzi i più generosi; ad ogni verità è necessaria un'epoca; ad ogni uomo che la produce è necessaria la costanza e la fede in sè stesso.

Dobbiamo dunque adesso aggiungere che abbiamo soltanto in noi stessi quella coscienza completa della utilità e della importanza della nostra Opera, che sola può dare il coraggio per cominciare le grandi lotte. Nel momento infatti in cui scriviamo, il mondo intellettuale non è solamente diviso sopra alcuni punti isolati delle sue cognizioni: l'ostilità dei principj ai quali, da una parte e dall'altra, viene attribuito lo sviluppo del sapere, s'incontra con maggior forza, che in ogni altro tempo, in tutte le idee sociali o solamente speculative di cui l'umanità è in possesso. Forse queste lotte, che il progresso ha dovuto sostenere in tutti i periodi storici della scienza, sono state necessarie, perchè nessuna verità abbia potuto stabilirsi nel mondo, senza essere stata prima sottoposta alla rigorosa prova dell'esame e del tempo. Ciò nondimeno gli avvenimenti della storia sociale moderna hanno troppo profondamente impresso in loro stessi un carattere provvidenziale, ossia una direzione superiore alla volontà e alle previsioni umane, per non aver prodotto una reazione spontanea sull'intelligenza, che ha dovuto rivolgersi verso questo principio superiore come a una guida più sicura dell'esperienza. Col l'aiuto di quest'ultimo metodo l'uomo non può elevarsi, con qualche certezza, che alla cognizione spesso imperfetta dei fatti; le cause che gli hanno prodotti rimangono incognite, ed è appunto, verso la scoperta di questi grandi misteri, che s'incammina oggi l'umanità nello stato di cultura intellettuale in cui ella si trova.

Nella speranza di favorire questo movimento progressivo della ragione non abbiamo dovuto limitare i nostri lavori a riunire, in un ordine favorevole alle ricerche, i soli insegnamenti pratici della scienza. Abbiamo voluto che le speculazioni le più elevate, come le proposizioni le più elementari, vi fossero presentate colla storia, e soprattutto colla filosofia, della quale tutte le scoperte scientifiche non sono che deduzioni. Così noi c'indirizziamo a tutte le intelligenze nel modo stesso che abbiamo dovuto prendere la verità dovunque l'abbiamo incontrata; poichè, come abbiamo già detto, il nostro Dizionario non è infatti che un'Opera sintetica, nella quale tutte le scoperte anteriori alla nostra epoca dovevano trovare il loro posto.

La nostra intenzione in principio era stata quella di esporre in questa introduzione tutte le deduzioni del principio filosofico della scienza, ma abbiamo pensato che questa importante dottrina doveva far parte dell'Opera stessa, di cui essa ha dettato l'ispirazione (*Vedi gli articoli MATEMATICHE e FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE*). Non è però lo stesso della storia di cui ciascuno dei nostri articoli contiene solamente alcuni dettagli particolari, i quali ci sembra assolutamente necessario di considerare adesso nel loro insieme.

Non è possibile di stabilire nella storia speciale della scienza una divisione differente da quella, che i grandi periodi di civilizzazione hanno fatto stabilire nella storia sociale. Prendendo in considerazione anco quella antichità congetturale, che alcune nazioni hanno preteso di attribuirsi, i tempi storici si dividono in tre età; la venuta della quarta è per una parte nel segreto della Provvidenza, e per un'altra parte nello sviluppo più o meno sollecito della ragione. Così nella prima età della storia sociale nascono e si sviluppano tutte le forme di civilizzazione. La società umana, che tende all'unità, arriva mediante il fatto luminoso della potenza romana verso i limiti di questo suo destino, ma essa vi arriva come ad un scopo negativo, e guidata dalla sola FATALITÀ; a questo punto l'unità va a produrre una materializzazione completa dell'umanità, e tale certamente non è il suo scopo sociale. La seconda età si apre colla venuta di Gesù Cristo, la cui missione augusta salvò il mondo da questo pericolo, egli dà alla morale quell'autorità assoluta che le era mancata nell'età precedente, l'umanità per lui si rinnova, e si perfeziona per opera e sotto la direzione della PROVVIDENZA. Durante quest'epoca la società ricomponga tutti i suoi elementi di civilizzazione dietro il principio superiore, che le è stato rivelato, quindi arriva al termine di questo fine transitorio, con maggior cognizione dei suoi fini definitivi. La terza età comincia alla scoperta del nuovo mondo, la quale, distruggendo antichi pregiudizj, risvegliò lo spirito d'indagine, e l'umanità si trova anch'oggi nella crisi, nella quale ha dovuto gettarla il principio di esame da cui emanò la superiorità della ragione.

Vediamo adesso come la produzione scientifica della verità si armonizzi completamente collo sviluppo successivo e generale dei fatti sociali.

Durante i secoli incerti in cui si elaborò l'antica civilizzazione umana, la scienza, che noi abbiamo di già mostrato presedere alla creazione delle relazioni sociali, non si eleva in principio al di sopra dello scopo puramente materiale che essa ha in vista. Il ristretto numero di verità che la scienza produce non sono infatti che deduzioni empiriche dei fatti. Ma essa cammina di pari passo

coll'umanità, e da Talete fino ad Archimede lavori immensi estendono i limiti del sapere, e tendono a generalizzare le cognizioni umane; ma questi lavori rimangono nonostante incompleti, e questo sforzo infruttuoso: si riducono essi in sostanza a poche brillanti individualità, e il progresso generale della scienza rimane inceppato nel circolo percorso dalla storia sociale.

Nella seconda età la scienza sembra in principio fermarsi all'improvviso: essa non entra più come elemento nella rinnovazione della umanità, ma getta nonostante alcuni barlumi nella scuola d'Alessandria; dopo Diofanto però la sua face si estingue dappertutto. Alcuni secoli dopo, la scienza rinasce, ed è resa al mondo da quel popolo stesso che l'aveva cacciata dal suo ultimo asilo, ed aveva abbandonato alle fiamme la celebre biblioteca d'Alessandria, ove trovavasi la preziosa raccolta di tutti i lavori scientifici precedenti. I grandi avvenimenti sociali, che seguono la fine di quest'età, sono preceduti da scoperte che annunziano un'era brillante e nuova, in cui l'umanità si precipita con ardore.

Finalmente alla terza età la scienza entra al possesso delle grandi teorie, che le età precedenti avevano appena presentito; la lotta, che si eleva allora nell'ordine morale, passa nell'ordine scientifico, e l'intelligenza umana avida di scoperte ingrandisce coll'esame e colla discussione la sfera delle sue cognizioni positive. È egli riservato alla nostra epoca il coronare quest'augusto edificio del sapere umano, opera di tanti secoli, con una potente dottrina che riunisca tutti i diversi rami ancora isolati di questo sapere, facendogli emanare da un solo principio assoluto oggetto delle ricerche della filosofia moderna? Questo appunto è stato tentato con maggior o minor successo dalle scuole filosofiche moderne, e più specialmente da un Geometra straniero, di cui avremo spesso occasione di dover rammentare le Opere nel corso di questo Dizionario.

Risalgiamo adesso il torrente delle età per sorprendervi il progresso didattico della scienza, che deve confermare la valutazione filosofica dei suoi sviluppi superiori che di sopra abbiamo esposto.

Talete, che viveva nel settimo secolo avanti Gesù Cristo, è il primo dei Geometri i cui lavori possano indicare la produzione scientifica delle matematiche. Avanti di lui senza dubbio le idee di *numero* e di *misura* esistevano nel mondo, e gli uomini le esprimevano con modi particolari. Ma la scienza non era che in germe nell'aritmetica dei Fenici, nella geometria dell'Egitto e dell'India, e nelle vaghe osservazioni dei Caldei. Talete introdusse in luogo di quei processi informi un metodo rigoroso, che cominciò a rivestire di una certezza più completa le dimostrazioni elementari della scienza. Questo filosofo coltivò collo stesso successo l'aritmetica, la geometria, e l'astronomia, e la scuola jonica, di cui è il fondatore, si divise dopo di lui in diverse sette, che abbracciarono nelle loro ricerche tutte le parti dell'umano sapere.

Pitagora comparve allora nel mondo: questo filosofo, che l'umanità nella sua riconoscenza salutò col nome di divino, penetrò più avanti di Talete nel regno dell'astrazione matematica, fece fare alla scienza importanti progressi, e così grande dovè essere la gioja religiosa, in cui lo gettò la

scoperta da lui fatta dell' eguaglianza del quadrato dell' ipotenusa, nel triangolo rettangolo, colla somma dei quadrati degli altri due lati, che si è affermato che egli sacrificò cento bovini agli Dei immortali, come se avesse voluto attestare con quest' ecatombe la sorgente augusta dell' ispirazione umana. Grande ed ammirabile spettacolo che presenta la scienza fino dal suo nascere, reudendo così omaggio al principio creatore ed eterno, dal seno del quale ella si era allora allora lanciata!

L' illustre Pitagora non tardò ad elevarsi fino alla percezione delle verità più sublimi. Insegnò ai suoi discepoli la sfericità della terra, di cui Anassimandro aveva avuto l' idea, e descrisse il suo moto intorno al sole. Così i primi passi dell' uomo nella scieuza sono contrassegnati dalla scoperta della verità; nonostante, abbandonata immediatamente come una illusione, ha bisogno, per prodursi di nuovo nello splendore della sua certezza, del concorso d' immensi travagli durante una lunga serie di secoli.

Da Talete e Pitagora fino allo stabilimento della scuola d' Alessandria le ricerche della filosofia greca estendono i progressi della scienza in un numero grande delle sue proposizioni particolari. Enopide, ed Ippocrate di Chio sono alla testa di questo movimento progressivo. Il problema della duplicazione del cubo vien proposto, e Menecmo applica a risolverlo la teoria delle sezioni coniche. Questo problema, quello della trisezione dell' angolo, e parecchi altri, la cui semplice enunciazione indica il cammino ascendente dello spirito umano, sono trattati nella scuola di Platone: questo filosofo scrive sulla porta della sua scuola queste parole, che accennano un legame intimo e necessario fra tutte le verità: *Nessun qui entri che non sia geometra.*

Allora la scuola d' Alessandria produce il grande Euclide, di cui il libro celebre degli *Elementi* è quasi il primo, nel quale gli insegnamenti e le proposizioni della scienza sieno state classate in un ordine metodico. Quasi nel tempo stesso apparisce pure l' illustre Archimede, il più grande dei geometri dell' antichità, che pone e risolve con tutta la potenza del genio i problemi più elevati della scienza. I lavori d' Apollonio di Perga, di Conone e Dositeo, di Germino di Rodi, d' Ipparco, di Tolomeo, di Diocle, e finalmente di Diofanto riempiono tutta la prima età della scienza. Ma si deve osservare che tutti questi lavori sono per così dire individuali, che i progressi dell' aritmetica, della geometria, dell' astronomia, della meccanica, dell' idrostatica, e dell' ottica camminano tutti isolatamente, e che nulla indica in questa prima fase quel punto di vista generale, in cui dovrebbe la scienza esser condotta per adempiere ai suoi fini più elevati. Si deve inoltre osservare che Tolomeo e Diofanto sebbene abbiano vissuto nella seconda età sociale appartengono non ostante per questa considerazione superiore alla prima età della scienza, e i loro lavori completano per così dire le scoperte possibili nella direzione che quell' età aveva preso fino a quell' epoca (*Vedi SCUOLA D' ALESSANDRIA*).

Quando la storia sociale ci mostra il mondo in preda alle grandi miserie, che doverono accompagnare la caduta dell' impero romano, e la riorganizzazione delle nazionalità sotto l' egida del cristianesimo, la storia della scienza rimane in silenzio. Nei primi secoli di questa seconda età si sarebbe potuto credere che l' umanità fosse ritornata agli istinti grossolani dei tempi più remoti; ma

non era che un'apparenza, perchè in essa era un principio potente, che non doveva tardare a ricondurla sopra sentieri più angusti. L'influenza che la civilizzazione araba esercitò su quella d'Europa, non contraddice in nulla queste vedute filosofiche della storia. Si è osservato infatti che il brillante movimento di progresso di questa illustre nazione dipende disgraziatamente dalla volontà e dal carattere di alcuni sovrani; l'islamismo ha soffocato quella sublime tendenza, ma il cristianesimo l'ha ricevuta e fecondata.

In questa seconda età tutti i rami delle matematiche ricevono grandi sviluppi; la scienza dei numeri comincia ad elevarsi a generali considerazioni; l'algebra nasce. Bello sarebbe il percorrere ad uno ad uno gli anelli di quella catena meravigliosa, che comincia da Diofanto e termina ad Eulero e Lagrange; ma basterà per noi l'averne qui abbracciato l'insieme ed averne caratterizzata qui la tendenza (*Vedi nel Dizionario l'Articolo MATEMATICHE*).

Se l'Europa riceve dagli Arabi le tradizioni della scienza non tardò però a rivaleggiare e a vincere i suoi maestri. Agli Albategni, agli Jbn-Younis, agli Albazen oppose ben presto Ruggero Bacone, Alberto Magno, Sacro-Bosco, Purbach e Regiomontano. Finalmente l'illustre Copernico comparve negli ultimi giorni di quest'età, come Diofanto era comparso alla fine della prima. Egli ricominciò l'astronomia dandole per base quel sistema d'immobilità del sole nel centro dell'Universo, e del doppio moto della terra, che Pitagora aveva presentito, e che egli ebbe la gloria d'espone e di rendere più evidente delle apparenze sulle quali era fondata l'opinione di Tolomeo (*Vedi ASTRONOMIA*).

Adesso comincia la terza età della scienza, i progressi della quale, come già abbiamo espresso, sembrano intimamente collegati coll'avanzamento generale dell'umanità. Nel tempo che lo spirare del secolo decimo quinto creava nell'ordine politico un nuovo sistema, Copernico lo introduceva nell'ordine scientifico mediante la produzione del vero sistema del mondo. Allora si succedono in Europa quei genii immortali e sublimi, la di cui mano potente alza il velo di piombo che copriva gli alti misteri della scienza. Galileo, Descartes, Leibnitz, Newton appariscono nel mondo, e l'uomo non può più dubitare della realtà del sapere, e del principio superiore che esiste in lui.

Non solamente in quest'epoca i rami tutti delle umane cognizioni sono spinti ad un grado eccessivo di perfezione individuale, ma si vedono tutte le forze della scienza convergere verso il gran fine di *UNITÀ*, che essa deve conseguire. La sublime scoperta del calcolo infinitesimale determina quell'alta tendenza filosofica, di cui l'ultimo sviluppo o piuttosto la finalità appartiene all'avvenire.

Ci duole di non aver qui potuto che accennare, ed in un modo assai rapido, i punti principali della storia delle scienze matematiche, ma abbiamo colto con premura nel nostro Dizionario le occasioni tutte che si sono presentate per esporli con maggiori particolarità, ed ivi dovrà il lettore farne ricerca. Per noi bastavano questi pochi tratti per dare un'idea del punto di vista filosofico nel quale ci siamo posti.

XX

Finalmente abbiamo avuto una cura particolare di coordinare i diversi articoli di ciascun ramo particolare della scienza facendogli corrispondere per mezzo di note o chiamate; alla fine dell'Opera daremo una tavola in cui verranno essi classati in modo da formarne un insieme sistematico composto di trattati speciali. Vi saranno pure uniti i nomi degli Autori. Quanto agli articoli storici sono essi dovuti al sig. A. Barginet di Grenoble.

NOZIONI PRELIMINARI

LE MATEMATICHE PURE si dividono in due rami principali: uno di questi rami ha per oggetto i *Numeri*; l'altro ha per oggetto l'*Estensione*. La scienza dei numeri, presa nella sua generalità, è conosciuta sotto il nome d'*ALGEBRA*. Alcuni autori la chiamano *ARITMETICA UNIVERSALE*, altri *ANALISI*; recentemente è stato proposto di darle il nome d'*ALGEBRA PURA*, nome, che considerando lo stato elevato a cui questa scienza è stata portata ai nostri giorni, sembra infatti indicarla in una maniera più conveniente. La scienza dell'estensione si chiama *GEOMETRIA* (Vedi nel corso dell'opera le parole *Algebra* e *Geometria*): Quanto all'origine di questa divisione fondamentale delle Matematiche pure, essa è abbastanza sviluppata nel Discorso d'Introduzione, ove egualmente si trovano esposti i diversi rami nei quali si suddividono queste scienze, come pure le loro numerose applicazioni.

Tanto la scienza dei numeri, quanto quella dell'estensione fanno uso delle abbreviazioni, e dei segni particolari, che si troveranno tutti esposti nel loro ordine alfabetico; ma, considerando il modo di pubblicazione di quest'opera, abbiamo creduto di dover porre in questo punto la spiegazione dei segni i più usati, aggiungendovi una succinta descrizione degli oggetti i più elementari dell'*Algebra*, e della *Geometria*, onde facilitare ai Lettori i più estranei alle Matematiche, lo studio dei primi articoli di quest'opera, ove il continuo uso che facciamo di questi segni presenterebbe loro difficoltà insuperabili. Questo lavoro preparatorio non è del rimanente che un saggio che sarà completato, nel corso dell'opera, per ciascun oggetto in particolare.

1. **SCIENZA DEI NUMERI.** 1. In particolare si rappresentano i numeri con cifre, e in generale, con lettere, allorchè si esaminano le loro proprietà indipendenti da qualunque valore determinato. La prima considerazione generale è questa: allorchè si conoscono due o più numeri, si può sempre, con la loro riunione ossia colla loro *somma*, costruire un nuovo numero. Per esempio, 3 aggiunto a 6 forma 9, e 9 si dice la *somma* di 3 e di 6. Il segno di questa operazione, che si chiama *ADDIZIONE*, è + (*più*), così $3 + 4$ esprime 3 più 4; il segno dell'eguaglianza è = (*eguale a*); dunque $3 + 4 = 7$ significa 3 più 4 è eguale a 7. Si avrebbe egualmente

$5+7+8=20$, 5 più 7 più 8 è eguale a 20. In generale indicando con le lettere a, b, c, d , dei numeri qualunque, di cui la somma sia eguale al numero m la formula $a+b+c+d=m$ esprimerà questa eguaglianza.

2. Dal momento che un numero qualunque c è costruito per mezzo della riunione di due altri a e b , ne segue necessariamente che se da c si tolga uno dei numeri a , o b , che lo compongono, si deve ottenere l'altro per risultato. Questa operazione, che si chiama **SOTTRAZIONE**, si esprime col segno $-$ (*meno*); si scrive perciò $c-b=a$, e si legge *c meno b è eguale ad a*. Da ciò vediamo come l'eguaglianza particolare $3+4=7$ ci conduca all'eguaglianza inversa $7-4=3$. Il risultato dell'operazione si chiama allora *differenza*.

3. Allorché abbiamo più numeri eguali da aggiungere insieme, l'operazione cambia di natura, e s'indica con un nuovo segno. Così, per esprimere che il numero 7 aggiunto 6 volte a sé medesimo è eguale a 42, in luogo di scrivere $7+7+7+7+7+7=42$, si scrive semplicemente $7 \times 6=42$; e ciò significa 7 preso 6 volte, ovvero, ciò che è la stessa cosa, 7 moltiplicato per 6 è eguale a 42. L'operazione si chiama allora **MOLTIPLICAZIONE**, e il suo segno è $\times$ (*moltiplicato per*). La moltiplicazione s'indica ancora con un solo punto ($\cdot$); e, quando i numeri sono espressi da lettere, ci contenteremo quasi sempre di scriverli gli uni accanto agli altri: le tre espressioni $a \times b$, $a \cdot b$, ab significano egualmente a moltiplicato per b ; ma si deve avvertire che la notazione ab , che è più semplice dell'altra $a \times b$, non può essere impiegata, che quando i numeri sono indicati da lettere; mentre se si volesse per esempio rappresentare il prodotto di 8 per 9, cioè 72, e per abbreviare si pretendesse di scrivere 89, si confonderebbe questa notazione col numero ottantanove scritto nel sistema decimale. Il risultato dell'operazione si chiama *prodotto*; il numero che è moltiplicato si chiama *il moltiplicando*, e quello che moltiplica *il moltiplicatore*; s'indicano ancora col nome comune di *fattori* il moltiplicando e il moltiplicatore: così, nella moltiplicazione generale $a \times b=c$, a e b si chiamano i fattori di c , poichè concorrono ambedue nella stessa maniera nella costruzione di c , ed in generale si ha $a \times b=b \times a$.

4. Allorché si vuole esprimere il prodotto di una somma di più numeri a, b, c , per un altro numero m , si scrive la somma fra due parentesi, e le si pone accanto il moltiplicatore, come segue: $(a+b+c) \times m$, ovvero $(a+b+c) \cdot m$, o finalmente $(a+b+c)m$.

5. La moltiplicazione dà, come l'addizione, origine ad un'operazione inversa. Infatti, poichè nell'eguaglianza $7 \times 6=42$, il numero 42 è composto dei numeri 7 e 6, possiamo proporci di decomporre il 42 col mezzo di uno di questi numeri, e col fine di ritrovare l'altro. Quest'ultima operazione si chiama **DIVISIONE**, e si esprime

indifferentemente per $\frac{42}{7}$, ovvero per $42:7$; così le due eguaglianze $\frac{42}{7}=6$, $42:7=6$

significano 42 diviso per 7 è eguale a 6. Si dà allora il nome di *dividendo* al prodotto, quello di *divisore* al fattore conosciuto, e quello di *quoziente* al fattore

cercato. Così nell'espressione generale $\frac{c}{b}=a$, c è il dividendo, b il divisore, ed a il quoziente.

Le due espressioni $\frac{a+b+c}{m}$, $(a+b+c):m$ indicano tanto l'una quanto l'altra che la somma dei tre numeri a , b , c , è divisa per il numero m .

6. Allorchè la divisione di un numero per un altro non è possibile, ciò che succede, 1° quando il divisore è più grande del dividendo, 2° quando il divisore non è contenuto un numero esatto di volte nel dividendo, si conserva la notazione generale $\frac{c}{b}$, e la quantità, che questa forma rappresenta, prende il nome di *frazione* nel primo caso, e quello di *numero frazionario* nel secondo. Per esempio $\frac{3}{4}$ è una *frazione*, e $\frac{7}{4}$ è un *numero frazionario*.

La somma di più frazioni $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ viene espressa da $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$, e il loro prodotto da $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f}$, ovvero da $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$.

7. Allorchè si moltiplicano l'uno per l'altro diversi numeri eguali, l'operazione cambia ancora di natura, e conseguentemente si scrive in una maniera differente dalla semplice moltiplicazione. Per esempio, per esprimere che il numero 64 risulta dalla moltiplicazione del numero 2 sei volte per sè medesimo, in luogo di scrivere $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$ si scrive $2^6 = 64$. In questo caso il numero 2 prende il nome di *base*, 6 quello di *esponente*, e 64 quello di *potenza*; così l'eguaglianza $2^6 = 64$ significa: il 2 elevato alla sesta potenza è eguale a 64.

8. L'operazione rappresentata dalla forma generale $a^b = c$ si chiama *ELEVAZIONE ALLA POTENZA*. Si dà in particolare il nome di *quadrata* e di *cubo* alle potenze seconda e terza: così, nell'eguaglianze $a^2 = m$, $a^3 = n$, si dice che m è il *quadrato*, e che n è il *cubo* di a . Queste ultime espressioni sono tratte dalla geometria; essendo la superficie di un quadrato eguale alla seconda potenza di uno dei suoi lati, e la solidità di un cubo essendo similmente eguale alla terza potenza di uno dei suoi lati.

9. Le due precedenti eguaglianze, di addizione: $a + b = c$, e di moltiplicazione: $a \times b = c$, ci hanno condotto alle due operazioni inverse di sottrazione: $c - a = b$, e di divisione: $\frac{c}{a} = b$; ora l'eguaglianza di potenza: $a^b = c$ ci conduce pure ad un'operazione inversa, che si chiama *ESTRAZIONE DELLE RADICI*, e il di cui scopo si è quello di trovare la *base* di una potenza, allorchè questa potenza è conosciuta. Per esempio, cercare il numero la di cui sesta potenza è 64, vale estrarre la *radice sesta* di 64; poichè, in questo caso, la base della potenza prende il nome di *radice*. Questa operazione viene indicata col segno $\sqrt{\quad}$ che si chiama *radicale*; e nel caso particolare di cui si tratta si scriverebbe $\sqrt[6]{64} = 2$, e si leggerebbe: *radice sesta di 64 eguale a 2*.

10. Allorchè si tratta di radici seconde o quadrate, si scrive il radicale senza esponente; $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ significano *radice quadrata* di a , e *radice quadrata* di b .

In tutti gli altri casi, si pone l'esponente della potenza nell'apertura del segno $\sqrt{}$, di maniera che $\sqrt[m]{}$ indica in generale la radice del grado m .

11. Le espressioni $(a+b+c+d)^m$, e $\sqrt[m]{a+b+c+d}$ indicano: la prima l'elevazione alla potenza m della somma $a+b+c+d$, e la seconda l'estrazione della radice m della stessa quantità.

Le espressioni $\left(\frac{a}{b}\right)^m$, $\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$ indicano egualmente la potenza e la radice m della quantità frazionaria $\frac{a}{b}$.

12. L'estrazione delle radici si esprime ancora per mezzo di esponenti frazionari: così, $a^{\frac{1}{2}}$ è la stessa cosa che $\sqrt{a}$, $a^{\frac{1}{4}}$ è la stessa cosa che $\sqrt[4]{a}$. In generale le due espressioni $a^{\frac{1}{m}}$ e $\sqrt[m]{a}$ indicano ambedue la radice m di a . Si può dunque scrivere indifferentemente $\sqrt[m]{a+b+c}$, o $(a+b+c)^{\frac{1}{m}}$ per esprimere la radice m della quantità $a+b+c$.

13. Nell'operazione dell'innalzamento a potenza $a^b = c$, i due numeri componenti a e b non entrano nella stessa maniera nella composizione del risultato c , ed il problema di trovare l'esponente, allorchè la base e la potenza sono date, cessa di essere elementare. Non è questo il luogo adattato ad occuparci di questa considerazione. Vedi LOGARITMI.

14. Le sei operazioni precedenti: l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, la divisione, l'elevazione alle potenze, e l'estrazione delle radici, contengono, come lo vedremo a suo luogo, tutte le regole elementari della costruzione dei numeri. Così tutte le operazioni possibili sono comprese nelle tre forme dirette:

$$a+b=c, \quad a \times b=c, \quad a^b=c$$

e nelle tre forme inverse.

$$c-b=a, \quad \frac{c}{b}=a, \quad \sqrt[b]{c}=a$$

15. Allorchè si paragonano due numeri insieme, si trova necessariamente che questi numeri sono o *eguali* o *inequali*. Il segno dell'eguaglianza ci è noto. Quello dell'ineguaglianza è $<$: così $a > b$ ovvero $b < a$ significa che a è maggiore di b ; dovendo il numero più grande esser posto nell'apertura del segno $<$. L'eguaglianza non può, nella sua semplicità elementare, somministrarci alcuna considerazione nuova; ma l'ineguaglianza può essere riguardata sotto due differenti aspetti: 1° come dando origine ad una *differenza*; 2° come determinando un *quoziente*. I due numeri 12 e 4, per esempio, paragonati insieme, somministrano le due relazioni:

$$12-4=8, \quad 12:4=3;$$

e in questo caso, 8 e 3 si chiamano i **RAPPORTI** dei numeri 12 e 4, cioè: 8 il *rapporto aritmetico*, e 3 il *rapporto geometrico*.

16. Due rapporti eguali stabiliscono una **PROPORZIONE**. Così l'eguaglianza

$$12 - 4 = 15 - 7$$

è una **PROPORZIONE ARITMETICA** di cui il *rapporto* è 8, e l'eguaglianza

$$12 : 3 = 20 : 5$$

è una **PROPORZIONE GEOMETRICA** della quale 4 è il *rapporto*.

Si scrive ancora la proporzione geometrica nella seguente maniera, $12 : 3 :: 20 : 5$, la quale si legge: 12 sta a 3 come 20 sta a 5.

17. Una serie di rapporti eguali forma una **PROGRESSIONE**. La progressione è aritmetica allorché i rapporti sono aritmetici, e s'indica così:

$$\frac{6}{2} : 2 : 4 : 6 : 8 : 10 : 12 : 14 : 16 : 18 : 20 : 22, \text{ ec.}$$

ed è l'abbreviazione di

$$2 - 4 = 4 - 6 = 6 - 8 = 8 - 10 = 10 - 12 = 12 - 14 = \text{ec.}$$

La progressione è geometrica allorché i rapporti sono geometrici. Essa s'indica così:

$$\frac{2}{2} : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256, \text{ ec.}$$

ed è l'abbreviazione di

$$2 : 4 = 4 : 8 = 8 : 16 = 16 : 32 = 32 : 64 = \text{ec.}$$

Tali sono i principali oggetti di cui si occupa la parte elementare della scienza dei numeri. Quanto agli algoritmi superiori sarebbe impossibile, in quest'esame tanto superficiale, di darne alcuna nozione soddisfacente, e non possiamo che rimandare agli articoli i quali gli riguardano.

II. SCIENZA DELL' ESTENSIONE

18. L'estensione è una porzione determinata dello spazio indefinito. Così il posto che i corpi occupano in questo spazio forma l'estensione particolare dei corpi.

19. L'estensione dei corpi ha tre dimensioni: *lunghezza*, *larghezza*, e *profondità* o *altezza*.

Si chiama **SOLIDO** ciò che rinnisce le tre dimensioni dell'estensione.

20. Se si fa astrazione da una di queste dimensioni, si ha la concezione di un'estensione in lunghezza e larghezza solamente, che si chiama **SUPERFICIE**. Le superficie possono essere considerate come i limiti dei corpi.

21. Facendo ancora astrazione da una delle dimensioni delle superficie, si ha la concezione di un'estensione in lunghezza solamente; e quest'estensione si chiama **LINEA**. Si possono considerare le linee come i limiti delle superficie.

22. Le estremità o i limiti di una linea si chiamano **PUNTI**. Si dà ancora il nome di punto al posto ove due linee s'incontrano. Il punto matematico dev'essere concepito come non avente alcuna specie d'estensione.

La generazione delle linee, delle superficie e dei solidi si opera, rapporto all'intelligenza, in un ordine inverso a quello che abbiamo stabilito (*Vedi GEOMETRIA* ma qui si tratta soltanto di darne un'idea popolare.

23. Si considerano due specie di linee: le *rette* e le *curve*.

24. La linea retta, che si chiama semplicemente *retta*, è quella linea di cui tutte le parti hanno una medesima direzione. Non vi è per conseguenza che una sola specie di linea retta.

25. La linea curva è quella la di cui direzione varia a ciascun punto, considerandola come formata da un'infinità di punti posti gli uni accanto agli altri. Vi sono più specie di linee curve.

Una linea s'indica con lettere poste alle sue estremità. AB è una linea retta (Tav. I. fig. 1.), e CD una linea curva. (Tav. I. fig. 2.).

Si chiama *Linea spezzata* qualunque linea ABCDE composta di porzioni di rette consecutive AB, BC, CD, DE, le quali hanno, due a due, un'estremità comune, ad eccezione delle due ultime estremità A ed E, le quali sono quelle stesse della linea spezzata. Queste porzioni di rette, che si suppongono limitate ai punti d'incontro B, C, D si chiamano *lati* (Tav. VII. fig. 5.).

Si chiama *Linea mista*, quella che in parte è curva e in parte retta: tale sarebbe la linea ABC. (Tav. VIII. fig. 1.)

26. La *superficie piana* è quella superficie sopra la quale essendo presi due punti qualunque, e per essi supposta condotta una retta, questa sia interamente contenuta nella superficie, e si confonda con essa. Non vi è che una sola specie di *superficie piana*. Si chiama ancora semplicemente *piano*.

27. La *superficie curva* è quella superficie sopra la quale non si può applicare una linea retta in tutti i sensi. Vi sono più specie di superficie curve.

Si chiama *superficie poliedra* (ovvero *superficie spezzata* per analogia con l'espressione della linea spezzata) qualunque superficie composta di piani consecutivi i quali hanno due a due un'intersezione comune.

Si chiama *superficie mista* qualunque superficie che è in parte piana ed in parte curva.

28. Supporremo, in ciò che segue, che tutte le linee delle quali siamo per parlare siano situate sopra uno stesso piano.

Allorchè due rette s'incontrano, esse formano un angolo. Il punto d'incontro si chiama il *vertice* dell'angolo, e le rette ne sono i *lati*. Un angolo s'indica con tre lettere ponendo quella del vertice nel mezzo. Così l'angolo formato dalle due rette AB, BC, (Tav. I. fig. 5.) si chiama l'angolo ABC. Alcune volte s'indica l'angolo con la sola lettera del vertice.

29. La grandezza d'un angolo non dipende dalla lunghezza delle linee che lo formano, ma dalla differenza delle loro direzioni. Più questa differenza aumenta, e più l'angolo è grande. Così l'angolo BAC (Tav. I. fig. 8.) aumenterebbe successivamente se il lato AB prendesse le direzioni AB', AB'', AB''', ec.; e finalmente arriverebbe al suo *maximum* di grandezza, se il lato AB prendesse la direzione AB'''' opposta a quella dell'altro lato AC. Il *maximum* di grandezza di un angolo è dunque lo stato a cui può avvicinarsi indefinitamente, ma a cui non può arrivare senza cessare di esistere, poichè allora i suoi lati non formano più che una sola linea retta.

30. Si chiamano *angoli contigui* o *angoli adiacenti* due angoli i quali hanno un lato comune, e di cui i due altri non formano che una sola linea retta. Tali sono per esempio gli angoli BAD, DAC. (Tav. I. fig. 12.)

31. Quando due angoli contigui sono eguali (Tav. I. fig. 15.), allora la retta AD incontra la retta BC senza pendere più sopra AB che sopra AC, ossia la differenza della sua direzione con quella di ciascuna di queste rette è la stessa da una parte e dall'altra. La retta AD si dice allora *perpendicolare* sopra la retta BC, e gli angoli eguali BAD, DAC prendono il nome di *angoli retti*.

32. Allorchè una retta ne incontra un'altra senza esserle perpendicolare, essa si dice *obliqua* rapporto a quest'ultima, e gli angoli che essa forma sono più o meno grandi degli angoli retti.

33. Si chiama *angolo ottuso* qualunque angolo maggiore di un angolo retto, e *angolo acuto* ogni angolo minore. Per esempio (Tav. I. fig. 12.), l'angolo BAD è ottuso, e l'angolo DAC è acuto.

34. Allorchè due rette si tagliano in un punto, come AC e DB (Tav. I. fig. 17.) gli angoli che esse formano, e che si trovano in una situazione opposta, sono eguali; essi si chiamano *verticali* ovvero *opposti al vertice*. Così gli angoli eguali AOB, COD sono angoli verticali. Lo stesso si dica rapporto agli angoli AOD, BOC.

Si chiama *bissettrice* d'un angolo ACB la retta CD la quale divide quest'angolo in due angoli eguali ACD, DCB (Tav. VII. fig. 4.).

Due angoli $\angle$ AB, BAC, la di cui somma è eguale ad un angolo retto si dicono *complementi* l'uno dell'altro, ovvero *complementarij* (Tav. I. fig. 8).

Due angoli BAD, DAC (Tav. I. fig. 12.) di cui la somma è equivalente a due angoli retti, si dicono *supplementi* l'uno dell'altro, o *supplementarij*.

È evidente che un medesimo angolo non può avere che un solo complemento, e un solo supplemento, e che per conseguenza due angoli sono eguali allorchè ciascuno di essi è *complementario* o *supplementario* d'un terzo.

35. Due rette AB, CD (Tav. I. fig. 4.), le quali hanno la medesima direzione, e che per conseguenza non possono incontrarsi ancora quando si prolungassero all'infinito, si chiamano *linee parallele*.

36. Allorchè due parallele sono incontrate da una terza retta, questa retta, che in generale si chiama *trasversale*, forma con le parallele tre classi d'angoli eguali due a due.

1.^o Gli angoli situati nel medesimo senso, l'uno al di dentro, l'altro al di fuori delle parallele, ed entrambi da una stessa parte della trasversale, si chiamano *angoli corrispondenti*. Tali sono (Tav. X. fig. 8.) gli angoli eguali AFG, CGH.

2.^o Gli angoli situati al di dentro delle parallele, e da una diversa parte della trasversale, si chiamano *angoli alterni-interni*. Tali sono gli angoli eguali AFG, FGD.

3.^o Finalmente gli angoli situati al di fuori delle parallele e da una diversa parte della trasversale, si chiamano *angoli alterni-esterni*. Tali sono gli angoli eguali EFB, CGH.

Si chiamano in generale *angoli interni* tutti gli angoli che sono compresi al di dentro delle parallele, e *angoli esterni* quelli che sono al di fuori. Gli angoli AFG, BFG, CGF, FGD sono gli angoli interni, e gli angoli AFE, BFE, CGH, DGH sono gli angoli esterni.

37. Allorchè un piano è limitato da linee, si chiama *figura*, e dicesi in particolare *figura rettilinea* quando le linee son rette, e *figura curvilinea* quando le

linee sono curve. Le figure rettilinee si chiamano in generale *poligoni*; le rette le quali formano il limite, prese insieme, ne sono il contorno ossia il *perimetro*.

38. Si chiama in particolare **TRIANGOLO** un poligono di tre lati (*Tav. I. fig. 3*); **QUADRILATERO**, quello di quattro lati (*Tav. I. fig. 7.*); **PENTAGONO**, quello di cinque lati (*Tav. I. fig. 6.*); **ESAGONO**, quello di sei lati, ec., ec.

39. Un poligono essendo composto di angoli e di lati, può essere considerato sotto questi due rapporti. Se si fa questa applicazione al triangolo, si avranno le due seguenti classificazioni:

1.^o Considerato rapporto agli angoli, prende il nome di:

Triangolo rettangolo quando ha un angolo retto; allora il lato opposto all'angolo retto si chiama *ipotenusa*. Per esempio nel triangolo rettangolo AEC (*Tav. I. fig. 10.*), il lato AC è l'*ipotenusa*.

Triangolo ottusiangolo o ambigono, se ha un angolo ottuso;

Triangolo acuziangolo, se i suoi tre angoli sono acuti.

2.^o Considerato rapporto ai lati, prende il nome di:

Triangolo equilatero, se i suoi tre lati sono eguali.

Triangolo isoscele, o *equicure*, se due solamente dei suoi lati sono eguali.

Triangolo scaleno, se i suoi tre lati sono diseguali.

Si chiama *vertice* di un triangolo il vertice di uno qualunque dei suoi angoli, e allora il lato opposto a quest'angolo si chiama la *base* del triangolo. Si prende ordinariamente per vertice del triangolo isoscele il vertice dell'angolo formato dai due lati eguali. Si chiama *altezza* di un triangolo la perpendicolare abbassata dal suo vertice sopra la sua base.

40. Quanto ai quadrilateri, si chiama in particolare:

Quadrato, quello di cui i quattro lati sono eguali e i quattro angoli retti (*Tav. I. fig. 9.*);

Rettangolo, quello di cui i quattro angoli sono retti, senza che i lati siano eguali (*Tav. I. fig. 13.*);

Losanga o *Rombo*, quello di cui i lati sono eguali senza che gli angoli siano retti (*Tav. I. fig. 11.*);

Parallelogrammo, quello di cui i lati opposti sono paralleli (*Tav. I. fig. 14.*);

E finalmente *trapezio*, quello il quale non ha che due lati paralleli (*Tav. I. fig. 16.*).

41. Si chiama in generale *poligono equilatero* quello di cui tutti i lati sono eguali, *poligono equiangolo* quello di cui tutti gli angoli sono eguali, e *poligono regolare* quello di cui gli angoli ed i lati sono eguali.

Due poligoni si dicono *equilateri tra loro*, tutte le volte che essendo situati nel medesimo piano, hanno i lati rispettivamente eguali, e situati nel medesimo ordine, vale a dire allorchè seguitando i loro perimetri nel medesimo senso, il primo lato dell'uno è eguale al primo dell'altro, il secondo dell'uno al secondo dell'altro, il terzo al terzo, e così di seguito.

Egualemente due poligoni si dicono *equiangoli tra loro* tutte le volte che essendo situati nel medesimo piano, hanno gli angoli rispettivamente eguali, e situati nello stesso ordine, vale a dire allorchè seguitando i loro perimetri nel senso medesimo, l'angolo formato dal primo e secondo lato dell'uno è eguale all'angolo formato

dal primo e secondo lato dell' altro, quello formato dal secondo e terzo lato dell' uno è eguale a quello formato dal secondo e terzo dell' altro, e così di seguito.

In ambedue i casi i lati eguali, o gli angoli eguali, si dicono lati ed angoli omologhi.

42. Di tutte le figure curvilinee, non si considera che il circolo nella geometria elementare. Esso è un piano limitato da una linea curva, di cui tutti i punti sono ad eguale distanza da un punto, preso nell' interno della figura, e che si chiama il centro. La curva la quale limita questa figura si chiama *circonferenza del circolo*, o semplicemente *circonferenza*. Tale è la figura PQSBP (Tav. I. fig. 19.). La linea curva PQSBP è la *circonferenza*; lo spazio racchiuso in questa linea è il *circolo*, e il punto A ne è il centro.

Le rette che si potrebbero supporre condotte dal centro a diversi punti della circonferenza, e che sono tutte eguali, si chiamano *raggi*. Tali sono le linee AE, AB, ec. Una retta PQ, condotta nel circolo, e che da ambedue le parti va a terminare alla circonferenza, si chiama *corda*. Allorchè una corda come DC passa per il centro, prende il nome di *diametro*. Un diametro essendo il doppio del raggio, ne segue che tutti i diametri sono eguali.

La parte della circonferenza intercetta, ovvero, come si suol dirsi, sottesa da una corda, si chiama *arco di circolo*. PmQ è l' arco sotteso dalla corda PQ.

Una retta MN, la quale taglia la circonferenza in due parti, si chiama *secante*.

Una retta TR, la di cui direzione coincide con quella della circonferenza in un sol punto di questa curva si chiama *tangente*. Il punto S, comune alle due linee, si chiama punto di *contatto*.

Una porzione di circolo EAB, terminata da due raggi e dall' arco intercetto, si chiama *settore*. Si chiama *segmento* la parte mTQ compresa tra l' arco QmP e la corda PQ.

Si chiama *freccia dell' arco* corrispondente ciascuna delle porzioni OD, OE del diametro DE comprese rispettivamente tra i mezzi D ed E dei due archi ADB, AEB, e il mezzo O della corda comune AB (Tav. VIII. fig. 2.).

43. I rapporti delle linee tra loro sono considerati in uno stesso piano; ma quelli delle linee con le superficie, come pure quelli delle superficie tra loro, sono considerati nello spazio indefinito.

Una retta si dice *perpendicolare* ad un piano allorchè essa forma degli angoli retti con tutte le rette che si possono condurre nel piano partendo dal punto ove essa lo incontra. Così (Tav. I. fig. 18.) la linea AB sarà perpendicolare al piano MC, se conducendo le rette AD, AE, AO, ec. in questo piano, gli angoli BAD, BAE, BAO, ec. sono retti.

44. Un piano CB (Tav. II. fig. 1.) è perpendicolare sopra un altro piano MN, se da un punto qualunque O preso in questo piano, abbassando una perpendicolare OD sopra la sezione AB dei due piani, questa perpendicolare è ancora perpendicolare al piano MN.

45. Allorchè due piani QP e QR (Tav. II. fig. 4.) s'incontrano, essi formano un angolo che si misura con l'angolo delle rette AB ed AC, condotte in questi piani perpendicolarmente alla sezione QS, nel medesimo punto A di questa sezione.

46. Due piani AB, CD, (Tav. II. fig. 7.) sono paralleli allorchè prolungati indefinitamente da tutte le parti, non possono mai incontrarsi; allora le loro sezioni MP, ed ON con un terzo piano, che gli taglia ambedue, considerate in quest'ultimo piano, sono due rette parallele. La distanza dei due piani paralleli è misurata da una perpendicolare QR, abbassata da uno qualunque di questi piani sopra l'altro.

47. Si chiama *angola solido* un angolo O (Tav. II. fig. 9.) formato dalla riunione di più piani MON, MOS, SON, i quali si tagliano in uno stesso punto.

48. Si chiamano in generale *poliedri* i solidi terminati da piani. Se questi piani sono eguali e regolari, i poliedri sono regolari.

Non vi sono che cinque poliedri regolari: il *tetraedro*, terminato da quattro triangoli equilateri eguali; l'*esaedro* ossia il *cubo*, terminato da sei quadrati eguali; l'*ottaedro*, terminato da otto triangoli equilateri eguali; il *dodecaedro*, terminato da dodici pentagoni regolari eguali; l'*icosaedro*, terminato da venti triangoli equilateri eguali.

49. L'*esaedro* terminato da sei piani paralleli due a due, si chiama *parallelepipedo*, e dicesi *parallelepipedo rettangolo* allorchè i piani sono rettangoli; e finalmente dicesi *cubo* come abbiamo detto quì sopra, allorchè i piani sono dei quadrati (Tav. II. fig. 2.).

50. Il *prisma retto* (Tav. II. fig. 3.) è un poliedro il quale ha due piani poligonal paralleli ed eguali, e di cui tutti gli altri piani sono dei rettangoli perpendicolari ad ambedue questi poligoni.

51. Il *prisma obliquo* (Tav. II. fig. 5.) ha, come il prisma retto, due facce eguali e parallele; ma i suoi altri piani sono dei parallelogrammi non perpendicolari ai due poligoni.

52. Allorchè i piani paralleli sono dei triangoli, i prismi si chiamano *prismi triangolari*. Si chiamano ancora *prismi quadrangolari*, allorchè questi piani sono dei quadrilateri; *prismi pentagonali*, allorchè essi sono dei pentagoni; *prismi esagonali* allorchè essi sono degli esagoni, ec. I prismi indicati dalle figure 3 e 5 della Tavola II sono prismi pentagonali.

Si dà indifferentemente il nome di *base* a ciascuno dei piani poligonal di un prisma. La sua *altezza* è la perpendicolare la quale misura la distanza di questi piani.

53. La *piramide* è un poliedro di cui una delle facce, chiamata *base*, è un poligono qualunque, e di cui tutti gli altri piani sono dei triangoli i quali si elevano sopra i lati di questo poligono, e vanno a riunirsi con i loro vertici in uno stesso punto, che si chiama il *vertice* della piramide (Tav. II. fig. 6 e 8.).

Una piramide si dice *triangolare*, *quadrangolare*, *pentagonale*, *esagonale*, ec., secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono, ec.

Si chiama *piramide retta* quella di cui tutti i piani, i quali si riuniscono al vertice, sono dei triangoli isosceli della medesima altezza (Tav. II. fig. 6.), e *piramide obliqua* quella in cui questi triangoli hanno altezze differenti (Tav. II. fig. 8.).

L'*altezza* di una piramide è la perpendicolare abbassata dal suo vertice sopra il piano della sua base.

54. Tra tutti i solidi terminati da superficie curve, non si considera nella geometria elementare che il *cilindro*, il *cono*, e la *sfera*.

Il cilindro è un solido terminato da tre superficie, di cui due sono piane e parallele tra loro, e di cui la terza è convessa e circolare. Può esser considerato come un prisma di cui le basi sieno poligoni regolari di un numero infinito di lati.

Il cilindro è *retto* (*Tav. II. fig. 11.*) allorchè la perpendicolare, abbassata dal centro di una delle sue basi sopra l'altra base, cade sopra il centro di quest'ultima. È poi *obliquo* (*Tav. II. fig. 10.*) in tutti gl' altri casi. Si chiama *asse* del cilindro la retta che unisce i centri delle sue basi. La sua *altezza* è la perpendicolare la quale misura la distanza delle sue basi.

55. Il cono è un solido di cui la base è un circolo, e che va a terminare in alto in un punto che si chiama *vertice*. Si può considerare il cono come una piramide di cui la base sia un poligono regolare di un numero infinito di lati.

La linea retta condotta dal vertice di un cono al centro della sua base si chiama l'*asse*. Il cono è *retto* (*Tav. II. fig. 12.*) allorchè l'*asse* è perpendicolare alla base; è poi *obliquo* allorchè l'*asse* è inclinato (*Tav. II. fig. 13.*). L'*altezza* di un cono è la perpendicolare abbassata dal suo vertice sopra il piano della sua base.

56. La sfera è un solido terminato da una sola superficie curva, di cui tutti i punti sono egualmente lontani da un punto preso nell'interno, che si chiama *centro* (*Tav. II. fig. 14.*).

Tutte le rette condotte dal centro alla superficie della sfera sono per conseguenza eguali; ciascuna in particolare si chiama *raggio della sfera*. Una retta che passa per il centro, e va a terminare da una parte e dall'altra alla superficie, si chiama *asse* o *diametro*. Tutti i diametri di una sfera sono eguali, poichè essi sono tutti composti di due raggi.

ABBREVIAZIONI

USATE NEL CORSO DELL' OPERA

<i>Acust.</i>	—	Acustica.	<i>Geom.</i>	—	Geometria.
<i>Agrim.</i>	—	Agrimensura.	<i>Gnom.</i>	—	Gnomonica.
<i>Alg.</i>	—	Algebra.	<i>Idraul.</i>	—	Idraulica.
<i>Arch.</i>	—	Architettura.	<i>Idrograf.</i>	—	Idrografia.
<i>Arit.</i>	—	Aritmetica.	<i>Idrod.</i>	—	Idrodinamica.
<i>Art.</i>	—	Artiglieria.	<i>Idrost.</i> *	—	Idrostatica.
<i>Ast.</i>	—	Astronomia.	<i>Mec.</i>	—	Meccanica.
<i>Cal. diff.</i>	—	Calcolo differenziale.	<i>Nav.</i>	—	Navigazione.
<i>Cal. int.</i>	—	Calcolo integrale.	<i>Ott.</i>	—	Ottica.
<i>Catot.</i>	—	Catottica.	<i>Pneu.</i>	—	Pneumatica.
<i>Cos.</i>	—	Coseno.	<i>Prosp.</i>	—	Prospettiva.
<i>Cosec.</i>	—	Cosecante.	<i>Sec.</i>	—	Secante.
<i>Cos. vers.</i>	—	Coseno verso.	<i>Sen.</i>	—	Seno.
<i>Cot.</i>	—	Cotangente.	<i>Sen. vers.</i>	—	Seno verso.
<i>Diot.</i>	—	Diottrica.	<i>Stat.</i>	—	Statica.
<i>Din.</i>	—	Dinamica.	<i>Tang.</i>	—	Tangente.
<i>Geod.</i>	—	Geodesia.	<i>Trig.</i>	—	Trigonometria.
<i>Geog.</i>	—	Geografia.	<i>Ved.</i>	—	Vedi.

Nelle chiamate, la cifra che segue la caratteristica dell' articolo indica il paragrafo. Così (*Ved. Alg.* 13.), significa: Vedi l' articolo **ALGEBRA**, paragrafo 13.

N. B. Tutti gli articoli aggiunti saranno contrassegnati con due asterischi, e quelli nei quali saranno state fatte aggiunte o variazioni importanti verranno distinti con un asterisco solo. Delle aggiunte di minor conto non si farà menzione.

DIZIONARIO

DELLA

SCIENZE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE

ABB



AB. Quinto mese dell'anno ebreo; adesso però è l'undecimo (e negli anni intercalari il duodecimo), per essere stato trasportato il principio dell'anno dalla primavera all'autunno. È di 30 giorni e comincia colla luna di Luglio.

Nel 1° giorno di questo mese cade un digiuno in commemorazione della morte di Aronne. Nel 9° giorno si osserva un digiuno solenne in commemorazione della distruzione del Tempio fatta da Nabuccodonosor nell'anno 588 avanti G.C. e della distruzione del secondo Tempio fatta da Tito l'anno 70 dell'era volgare. Questo digiuno è considerato come il più lugubre di tutto l'anno: in questo giorno si leggono pubblicamente nelle Sinagoghe le Lamentazioni di Geremia, ed altri passi della Bibbia esprimenti dolore e desolazione. Nel giorno 18° si osserva un altro digiuno, perchè la lampada che era nel Santuario nel tempio di Acaz si arrovò estinta durante la notte. Tutti questi digiuni però si pospongono di un giorno se cadono in Sabato.

Una piccola festa si celebra nel dì 15 del mese per ricordare un antico uso, per il quale le giovani fanciulle di ciascuna tribù uscivano fuori vestite di bianco, e si mostravano ballando ai giovani ebrei in età da prender moglie in veduta di essere scelte da essi in matrimonio. Questa festa è chiamata *Tubeab*, ossia *il giorno quindici del mese Ab*, poichè la parola *Tub*, che rappresenta i caratteri T e B, ossia 6 e 9, dagli Ebrei è usata per esprimere il numero quindici.

Il mese di Ab non può cominciare nè più presto del 10 Luglio, nè più tardi del 7 Agosto. Nell'anno 1838 principia nel 17 Luglio.

AB. È ancora il nome del duodecimo mese dell'anno siriano, e coincide col nostro mese d'Agosto.

ABACO. Vedi **ABBACO**.

ABACO. (PAOLO DELL') Vedi **ABBACO** (PAOLO DELL').

ABBACO. Istrumento in uso presso gli antichi per facilitare i calcoli aritmetici.

In greco chiamavasi $\alpha\beta\alpha\kappa\acute{o}\varsigma$, ed in latino *abacus*. Alcuni etimologisti fanno derivare questo nome dalla parola fenicia *abak*, che significa *polvere*. Luca da Borgo antico scrittore d'Algebra lo suppone una contrazione della parola *arabico*. La prima derivazione senza dubbio è la più probabile. Pare che nella sua origine questo strumento consistesse in una piccola tavola bene spianata e coperta di polvere, o di arena, sulla

Diz. di Mat. Vol. I.

quale si eseguivano i calcoli, e si disegnavano le figure. Ciò si prova con Marciano Capella, e col seguente passo di l'ersio *Sol. I. vers. 131*:

*Nec qui abaco numeros, et secto in pulvere metus
Scit risisse vaser.*

Un tale istrumento sembra antico quanto l'aritmetica stessa, ritrovandosi presso i Greci, i Romani, i Chinesi, i Germani, ed i Franchi; nè sarebbe da rigettarsi l'opinione di coloro che vogliono che in origine servisse a disegnarvi le lettere per insegnare a leggere ai fanciulli. Col tempo la sua forma variò, e divenne finalmente un quadro lungo diviso da più corde di rame, fra loro parallele, ed in ognuna delle quali erano infilate dieci piccole palle d'avorio o di legno, mobili come i grani delle corone (*Tav. III. fig. 1 e 2*). La prima linea a destra era quella delle unità, la seconda quella delle decine, la terza quella delle centinaia ec. Per scrivere un primo numero sull'abaco si cominciava dal disporre tutte le palle nella parte superiore dello strumento, ed in seguito si abbassava nella parte inferiore di ciascuna linea un numero di palle eguale alle unità dell'ordine di queste linee. Così, per esempio, per scrivere il numero 3564 si abbassavano 4 palle nella parte inferiore della prima linea, 6 in quella della seconda, 5 in quella della terza, e 3 in quella della quarta; allora il numero 3564 si trovava scritto come lo è nella figura 1 della Tavola III.

Se, scritto questo numero, si fosse voluto aggiungere ad esso un altro numero 53729, si cominciava dall'abbassare 9 palle dalla parte superiore alla parte inferiore della prima linea; e siccome, nel caso attuale, nella parte superiore non ne restavano che sole sei, dopo avere abbassate queste 6 palle, si rialzavano tutte e dieci nella parte superiore, abbassando una palla per questa diecina nella seconda colonna, e si terminava l'operazione sulla prima, abbassando 3 palle per completare le 9 che si dovevano abbassare. Passando alla seconda colonna si abbassavano 2 palle per la cifra 2 delle diecine del numero 53729. Venendo poi alla terza colonna si abbassavano primieramente le 5 palle che rimanevano in alto, quindi si rialzavano tutte, abbassando per la diecina una palla della quarta colonna, e si calavano due palle nella terza colonna per completare la cifra 7. Passando alla quarta colonna si abbassavano tre palle per la cifra 3 delle migliaia, e finalmente si abbassavano 5 palle nella quinta colonna per la cifra 5 delle diecine di migliaia. La disposizione finale delle palle dell'abaco dopo questa operazione era quella rappresentata dalla figura 2 della Tavola III, ed il numero 57293 che vi si trova scritto nella parte inferiore è appunto la somma dei due numeri 3564 e 53729. Per aggiungere un nuovo numero a 57293 si terrebbe il medesimo metodo, e così in seguito. Si vede dunque che coll'aiuto di questo strumento le addizioni dei numeri possono effettuarsi con somma facilità: lo stesso si dica delle sottrazioni che possono eseguirsi con un metodo inverso a quello che ora abbiamo descritto.

“ L'abaco abbandonato da tutte le nazioni europee, ma tuttavia adoprato dai negozianti nella China ed in alcune parti delle Indie, potrebbe utilmente servire ad insegnare i primi principj dell'aritmetica, unico uso forse per il quale presentemente possa essere da noi adoprato. Per una descrizione più minuta del modo di servirsi di questo strumento per l'oggetto dell'istruzione si veda l'articolo *Numerazione* di questo Dizionario.

I Chinesi che chiamano l'abaco col nome *Shwanpan* lo adoprano con una prontezza da maravigliare. Si dice che mentre una persona legge rapidamente più numeri, un'altra può sommarli e darne il totale nel tempo medesimo che la prima impiega a leggerli. Il loro abaco differisce però da quello descritto di sopra, avendo in ciascuna corda cinque sole palle, una delle quali è distinta dalle altre o per il colore o per la grossezza, e vale per cinque delle altre.

ABBACO di PITAGORA. Tavola per facilitare i calcoli. Era probabilmente una tavola di moltiplicazione simile a quella che abbiamo anche adesso, e che porta il nome di *Tavola di Pitagora*.

ABBACO (PAOLO DELL'). Nacque in Firenze verso il principio del decimo quarto secolo celebre per l'invenzione della bussola, scoperta che favorì gli arditi tentativi dei navigatori del secolo seguente. Paolo dell' Abbaco deve essere annoverato fra i dotti di quel tempo, di cui gli utili lavori prepararono i progressi che ben presto si operarono nel vasto dominio delle cognizioni matematiche. Contemporaneo di Dante, di Cino, e di Petrarca, alcuni biografi, senza collocarlo nel grado stesso di questi sommi poeti, lodano alcune delle sue produzioni letterarie, che non ostante le molte loro scorrezioni, palesano un talento e un genio non ordinario. Ma Paolo dovette la sua fama alle sue prodigiose cognizioni in aritmetica, e in geometria; esse gli meritano il nome d' *Abbaco*, poichè *Paolo dell' Abbaco* significa letteralmente *Paolo dell' Aritmetica*. Si crede che egli fosse uno dei primi matematici che praticassero l'Algebra. Sono pure a lui dovute varie importanti osservazioni astronomiche, che egli fece coll'aiuto d'istrumenti di sua invenzione. Egli morì nel 1375 poco tempo avanti il Boccaccio.

ABBASSAMENTO (*Algebra*). Si chiama abbassamento di un'equazione la riduzione di questa equazione ad un grado inferiore. Per esempio, l'equazione del sesto grado $x^6 + px^3 + q = 0$ si abbassa al secondo facendovi $x^3 = y$; mentre allora abbiamo $y^2 + py + q = 0$, e sostituendo questi valori di x^3 , x^6 nell'equazione data, essa diviene $y^2 + py + q = 0$. In generale, un'equazione della forma $x^{2n} + px^n + q = 0$ può sempre abbassarsi al secondo grado, facendovi $x^n = y$; ed un'equazione del grado mn e della forma

$$x^{mn} + A_1 x^{m(n-1)} + A_2 x^{m(n-2)} + \dots + A_{n-1} x^m + A_n = 0$$

si abbassa al grado n con sostituire una nuova incognita $y = x^m$.

** Esaminiamo attualmente altre circostanze, nelle quali un'equazione è suscettibile d'abbassamento.

Si abbia l'equazione generale del grado m

$$X = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \dots + A_{m-1} x + A_m = 0 \dots (1)$$

le radici della quale siano rappresentate dalle m quantità $a, b, c, d, \dots$, si potrà abbassare il grado della medesima, quando sia data una relazione qualunque espressa da un'equazione di primo grado fra due delle radici a e b , cioè allorchè si abbia

$$b = f(a) \dots (2)$$

non trovandosi a che al primo grado in $f(a)$. Infatti siccome a e b sono radici dell'equazione X , esse devono soddisfare alla medesima, e sostituendole avremo

$$a^m + A_1 a^{m-1} + A_2 a^{m-2} + A_3 a^{m-3} + \dots + A_{m-1} a + A_m = 0 \dots (3)$$

$$b^m + A_1 b^{m-1} + A_2 b^{m-2} + A_3 b^{m-3} + \dots + A_{m-1} b + A_m = 0 \dots (4)$$

ed eliminando b fra l'equazioni (2) e (4), otterremo un'equazione della seguente forma in a sola; cioè

$$a^m + P_1 a^{m-1} + P_2 a^{m-2} + P_3 a^{m-3} + \dots + P_{m-1} a + P_m = 0 \dots (5)$$

Ora tanto l'equazione (3), quanto l'equazione (5), dovendo essere soddisfatte da uno stesso valore di a , ne viene per conseguenza che esse ammettono un fattore comune, che ritroveremo applicando alle medesime la teoria del massimo comune divisore: trovato questo comun divisore si eguaglierà a zero, e ricavandone il valore della radice a si abbasserà facilmente la proposta mediante la divisione per $x - a$; quindi sostituendo questo valore di a nella relazione (2), potremo il più dalle

volte ottenere dalla stessa un'altra radice della proposta. Per vedere però quando ciò succeda, e quando no, esaminiamo la natura delle radici della trasformata (5). Supposto che la relazione (2) dia $a = f'(b)$, è chiaro che la trasformata (5), che in sostanza si è ottenuta mediante la sostituzione di $f(a)$ in luogo di x nella proposta, non è che una nuova equazione, le radici della quale sono una data modificazione o funzione di quelle della proposta stessa, talché le nuove radici saranno ciascuna eguali ad una funzione delle prime, e potranno essere espresse da $f'(a)$, $f'(b)$, $f'(c)$; siccome dalla formazione generale dell'equazioni la proposta (1) può essere rappresentata da

$$X = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)(x-f)..... = 0.....(6)$$

così la trasformata (5), postavi x in luogo di a , può mettersi sotto la seguente forma

$$X' = [x-f'(a)] \cdot [x-f'(b)] \cdot [x-f'(c)] \cdot [x-f'(d)] \cdot [x-f'(e)] \dots = 0.....(7)$$

Considerando sotto questo punto di vista le due equazioni (3) e (5) risolte nei loro fattori di primo grado, si vedrà a colpo d'occhio *a priori*, quale dovrà essere il massimo comun divisore delle medesime, e quante radici della proposta si possono con esso determinare.

Infatti se una delle radici della trasformata (7), per esempio $f'(a)$, sia eguale ad una o più delle radici della (6), si avrà un comun divisore di primo grado; e se ancora altre radici della (7) $f'(b)$, $f'(c)$, ... sieno eguali ad una o più delle radici della (6), si avranno tanti comuni divisori di primo grado, quante saranno le radici della (7) eguali ad alcuna di quelle della (6); moltiplicando quindi insieme tutti questi divisori comuni otterrassi il massimo comun divisore fra le due equazioni (6) e (7). Veduta pertanto *a priori* qual sia la natura di questo massimo comun divisore non vi è più difficoltà nessuna a determinare quante radici possano con esso scuoprirsi. Primieramente è certo che se n sia il grado di questo massimo comun divisore, risoluto nei suoi fattori semplici farà conoscere n radici della proposta, il cui grado mediante la divisione potrà abbassarsi di n unità. In secondo luogo ponendo nella relazione (2) i valori già trovati delle n radici, si troveranno altre n radici della proposta se le radici comuni trovate $f'(a)$, $f'(b)$... sieno eguali la prima ad alcuna delle $b, c, d, \dots$, la seconda ad alcuna delle $a, c, d, \dots$, e non si abbiano mai le equazioni $f'(a) = a$, $f'(b) = b$... ec., nel quale ultimo caso non si avrebbero delle nuove radici, ma si ricaderebbe in quelle già trovate. L'esempio schiarirà quanto possa ancora aver di meno chiaro l'esposta teoria. Se $n = 1$, si avrà un divisore comune di primo grado che farà conoscere una delle radici per esempio $f'(a)$, e ne farà conoscere anche un'altra se quella trovata sia eguale ad alcuna delle $b, c, d, \dots$ ec.; ma non ne ricaveremo nessun'altra se abbiasi $f'(a) = a$. Se $n = 2$, si avranno due radici, per esempio $f'(a)$, $f'(b)$, le quali ne somministreranno due altre se la prima non sarà eguale ad a , e la seconda a b , nel qual caso si ricaderà nelle radici già trovate. Generalizzando si vedrà che il massimo comun divisore di grado n non ci potrà fare scuoprire meno di n radici, nè più di $2n$.

Rimane da osservare il caso, in cui le due radici a e b entrassero *similmente* nella data relazione, ciò che succederebbe se la relazione data desse

$$a = f(b), \text{ e } b = f(a),$$

mentre in questo caso il divisore comune che si otterrebbe ascenderebbe, è vero, al secondo grado, e darebbe le due radici a e b che entrano nella data relazione, ma non farebbe conoscere nessuna nuova radice; poichè la sostituzione di a nella relazione data ci condurrebbe a trovare b , e la sostituzione di b ci porterebbe a scuoprire a ; il che non darebbe, come ognun vede, nessuna luce sulle altre radici.

Si può dedurre come un caso particolare della precedente analisi, il principio fondamentale delle radici eguali.

Infatti sia l'equazione generale

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \dots + Tx + U = 0 \dots (1)$$

e supponiamo che fra le due radici a e b , si abbia la relazione $b = ha + r$, (h ed r essendo numeri conosciuti e dati *a priori*).

Poichè l'equazione (1) deve essere soddisfatta dalle due quantità a e $ha + r$, ne segue che si può mettere in questa equazione $hx + r$ in luogo di x , ciò che dà la nuova equazione

$$(hx+r)^m + P(hx+r)^{m-1} + Q(hx+r)^{m-2} + \dots + T(hx+r) + U = 0 \dots (2)$$

e tanto l'equazione (1) quanto l'equazione (2) dovranno esser soddisfatte da una medesima radice a ; si faccia adesso $r = 0$ nella relazione data $b = ha + r$; essa diviene $b = ha$, e l'equazione (2) si riduce a

$$h^m x^m + Ph^{m-1} x^{m-1} + Qh^{m-2} x^{m-2} + \dots + Thx + U = 0.$$

Ma siccome per un medesimo valore di x quest'equazione deve sussistere con l'equazione (1), si può sostituire ad una di queste equazioni il risultato della loro sottrazione, ciò che dà

$$(h^m - 1)x^m + P(h^{m-1} - 1)x^{m-1} + Q(h^{m-2} - 1)x^{m-2} + \dots + T(h - 1)x = 0,$$

ovvero, osservando che $(h-1)x$ divide tutti i termini di questa equazione, ed effettuando questa divisione,

$$(h^{m-1} + h^{m-2} + \dots + h + 1)x^{m-1} + P(h^{m-2} + h^{m-3} + \dots + h + 1)x^{m-2} + Q(h^{m-3} + h^{m-4} + \dots + h + 1)x^{m-3} + \dots + T = 0$$

Attualmente se, oltre l'ipotesi di $r = 0$, si suppone $h = 1$, ciò che equivale a dire che due delle radici b ed a sono eguali, l'equazione precedente diviene

$$mx^{m-1} + P(m-1)x^{m-2} + Q(m-2)x^{m-3} + \dots + T = 0$$

equazione il di cui primo membro deve avere un comun divisore $x - a$ con quello della proposta

Ma $mx^{m-1} + P(m-1)x^{m-2} + \dots + T$ non è altra cosa che il polinomio derivato del primo membro della proposta

$$x^m + Px^{m-1} + \dots + Tx + U = 0,$$

donque finalmente nel caso in cui quest'ultima equazione abbia radici eguali, deve esistere un comun divisore fra il primo membro di questa equazione e il suo polinomio derivato.

Questa maniera di dimostrare il principio della teoria delle radici eguali si deve al sig. POISSON. *Vedi POLINOMIO DERIVATO, e RADICI EGUALI.*

Passiamo adesso a trattare diversi casi particolari, relativi all'antecedente teoria.

ESEMPIO I

Si abbia l'equazione

$$x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30 = 0 \dots (1),$$

nella quale si sappia, che per due delle radici x ed a esiste la seguente relazione

$$2x + a = 4 \dots (2).$$

Siccome a è radice, così sostituendola nell'equazione (1) avremo

$$a^4 + 5a^3 - 7a^2 - 29a + 30 = 0 \dots (3);$$

ma dalla relazione (2) si ha $a=4-2x$, valore che sostituito nell'equazione (3) la cambia in

$$(4-2x)^3+5(4-2x)^2-7(4-2x)-29(4-2x)+30=0,$$

dunque sviluppando, riducendo, e dividendo tutto per 4 otteniamo

$$8x^4-84x^3+298x^2-411x+189=0 \dots (4)$$

Ora l'equazione (4) dovendo coesistere con l'equazione (1), ciò fa evidentemente conoscere, che deve esistere un divisore comune fra queste due equazioni: infatti cercando questo divisore con i soliti metodi, troviamo che questo è $x-1$, e mandatolo a zero, si ha $x=1$, valore che messo nella relazione (2) dà $a=2$, cioè 1 e 2 sono radici dell'equazione (1), e soddisfanno alla relazione data (2): dividendo perciò l'equazione (1) per $(x-1)(x-2)$, si ottiene l'equazione abbassata.

$$x^2+8x+15=0,$$

la quale dà per le altre due radici -3 , e -5 , talché le quattro radici della proposta sono 1, 2, -3 , e -5 .

ESEMPIO II

Si abbia l'equazione

$$x^3+x^2-x-1=0 \dots (1),$$

e la relazione data fra due delle radici a ed x di questa equazione sia

$$2x+a=3 \dots (2):$$

dalla sostituzione di a radice verrà

$$a^3+a^2-a-1=0,$$

ma dalla relazione (2) si ha $a=3-2x$, perciò sostituendo abbiamo

$$(3-2x)^3+(3-2x)^2-(3-2x)-1=0.$$

Sviluppando, riducendo, cambiando i segni e dividendo per 8, si ha

$$x^3-5x^2+8x-4=0 \dots (3).$$

Cercando il comun divisore fra l'equazioni (1), e (3), le quali devono esistere insieme, si trova essere esso

$$x-1,$$

dal quale si ricava $x=1$, valore che messo nell'equazione di relazione dà $a=1$, ossia siamo precisamente nel caso, in cui $f'(a)=a$, ed è perciò che non si possono avere altre radici, e che la proposta non può abbassarsi che di un grado. Dividendo la proposta per $x-1$, si ottiene pur l'equazione abbassata

$$x^2+2x+1=0,$$

la quale dà le altre due radici -1 e -1 , e le tre radici sono -1 , -1 , e 1.

ESEMPIO III

Sia l'equazione

$$x^4-2x^3-3x^2+4x+4=0 \dots (1),$$

e la relazione data per due delle radici a ed x della detta equazione sia

$$2x+a=3 \dots (2).$$

Dalla sostituzione di a radice avremo,

$$a^4 - 2a^3 - 3a^2 + 4a + 4 = 0,$$

ma dalla relazione (a) si ha $a = 3 - 2x$, perciò sostituendo abbiamo

$$(3 - 2x)^4 - 2(3 - 2x)^3 - 3(3 - 2x)^2 + 4(3 - 2x) + 4 = 0.$$

Sviluppando, riducendo e dividendo per 4, viene

$$4x^4 - 20x^3 + 33x^2 - 20x + 4 = 0 \dots (3)$$

Cercando il comun divisore fra l'equazioni (1) e (3), le quali devono esistere insieme, si trova questo essere

$$x^2 - 4x + 4.$$

Mandandolo a zero le sue radici sono 2, e 2, e siccome il divisore trovato è del secondo grado, si potranno con esso determinare quattro radici della proposta, vale a dire tutte, purché però non si verifichi la circostanza di $f'(a) = a$: posto dunque uno dei valori trovati nella data relazione ottengo $a = -1$, e perciò concludo che le radici della proposta sono $a, a, -1, -1$.

ESEMPIO IV

Si abbia l'equazione

$$x^6 - 3x^4 - x^3 + 7x^2 - 4 = 0 \dots (1),$$

e la relazione data fra due delle radici a ed x sia

$$ax + a = 3 \dots (a).$$

Sostituendo nella proposta la radice a , si ottiene

$$a^6 - 3a^4 - a^3 + 7a^2 - 4 = 0:$$

ma $a = 3 - 2x$, perciò avremo

$$(3 - 2x)^6 - 3(3 - 2x)^4 - (3 - 2x)^3 + 7(3 - 2x)^2 - 4 = 0,$$

e sviluppando, riducendo, cambiando i segni, e dividendo per 4, viene

$$4x^6 - 24x^5 + 53x^4 - 53x^3 + 24x^2 - 4 = 0 \dots (3)$$

Siccome l'equazione (3) deve come sopra coesistere con l'equazione (1), così dovranno queste due equazioni avere un divisore comune, il quale cercato con i consueti metodi si trova essere

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4.$$

Mandato a zero questo divisore, si ha per radici dello stesso 1, 2, e 2, le quali messe nella relazione (2) per i valori 2 e 2, danno -1 e -1 , e per il valore 1 si ha di nuovo $a = 1$: ciò prova che in questo caso, abbiamo una delle radici della trasformata (3), per la quale si verifica la circostanza di $f'(a) = a$, ed è perciò che messa questa radice nella relazione (2), essa non può rendere che la stessa radice; d'altronde la proposta essendo del quinto grado, così tutte le radici vengono con ciò determinate, e sono $a, a, -1, -1, e 1$.

ESEMPIO V

Trattiamo adesso un caso, nel quale le radici entrino similmente nella relazione data, e sia l'equazione

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0 \dots (1),$$

la quale abbia due delle radici x ed a legate dalla relazione

$$x+a=5\dots(2)$$

Sostituendo nella proposta a invece di x abbiamo

$$a^4-5a^3+5a^2+5a-6=0;$$

ma dalla relazione (2) si deduce $a=5-x$, perciò avremo

$$(5-x)^4-5(5-x)^3+5(5-x)^2+5(5-x)-6=0,$$

la quale al solito sviluppata e ridotta si rancia in

$$x^4-15x^3+80x^2-180x+144=0\dots(3)$$

e cercato il comun divisore fra l'equazione (1), e l'equazione (3), si trova che questo è

$$x^2-5x+6,$$

cioè di secondo grado, come era stato previsto nell'esposizione del metodo generale; il qual divisore mandato a zero, dà le due radici 3, e 2, che insieme adempiono alla relazione data; dividendo la proposta per il fattore x^2-5x+6 , si ottiene l'equazione abbassata

$$x^2-1=0,$$

che ha per radici 1 e -1; talchè le radici della proposta sono 1, -1, 2, e 3.

Questi esempj basteranno per far comprendere con qual metodo si può abbassare un'equazione qualunque, allorchè esiste una data relazione fra due radici della stessa. Per maggiori schiarimenti su questo proposito si veda *La Croix Complément des Elements d'Algebra* N.º 38, 39 e 40, il *Trattato d'Algebra di Lefebure de Fourcy* N.º 506, 509, 508, e 509, ed il *Trattato d'Algebra* dei Sigg. Mayer e Choquet N.º 457, 453, 459, 460, 461 e 462, e per gli altri casi, nei quali un'equazione è suscettibile d'abbassamento, si vedano gli articoli ELIMINAZIONE, RADICI EGUALI, EQUAZIONI RECIPROCHE, ed EQUAZIONI SINOMIE.

ABBASSAMENTO (Geom.). In geometria si dice *abbassare* una perpendicolare da un punto sopra una linea o sopra una superficie, e in questo caso, la parola *abbassare* significa *condurre*.

•• **ABBASSAMENTO dell'Orizzonte sensibile** (Astr.). È la quantità di cui l'orizzonte sensibile è abbassato al di sotto del piano orizzontale che tocca la terra. Per ben comprendere in che consista questo *abbassamento*, si premetta che per altezza di un astro qualunque S (Tav. II. fig. 15.) s'intende l'angolo che il raggio OS condotto dall'astro fa coll'orizzonte razionale AB , o colla sua paralella OM determinata da una livella. Si supponga adesso che uno spettatore situato in un punto elevato O della terra rappresentata da $ADNEB$ osservi l'angolo che l'astro S fa coll'orizzonte sensibile dello spettatore, cioè con quel circolo che separa la parte visibile del cielo dalla parte invisibile: è evidente che l'angolo in tal modo osservato, e determinato dall'incontro del raggio visuale OS con OF tangente alla sfera terrestre, è maggiore dell'angolo SOM , che misura la vera altezza dell'astro, della quantità MOF ; e quest'angolo MOF è appunto ciò che si chiama *abbassamento* o *depressione* dell'orizzonte sensibile, del quale bisogna diminuire l'angolo osservato per ottenere l'altezza dell'astro. Una tal depressione non avrebbe luogo se invece di misurare l'altezza dell'astro nel modo, di sopra indicato se ne misurasse la distanza dallo zenit mediante un filo a piombo, e si prendesse quindi il complemento dell'angolo osservato; ma questo metodo ed altri che si potrebbero egualmente proporre, per ottenere l'altezza dell'astro spogliata dell'abbassamento dell'orizzonte, non sono praticabili in mare attese le oscillazioni del vascello, che impediscono l'uso della livella, e del filo a piombo. Vediamo dunque come possa determinarsi

questo abbassamento. Nel triangolo rettangolo COF l'angolo OCF è complemento dell'angolo COF, dunque l'angolo MOF, ossia l'abbassamento cercato, essendo esso pure complemento di COF, sarà eguale a OCF = C. Dalla trigonometria si ha

$\text{tang } C = \frac{OE}{CF}$, e dalla geometria si ha per la tangente OF,

$$OF^2 = ON(ON + 2R) = a(a + 2R),$$

chiamando a l'altezza dello spettatore sopra il livello del mare, ed R il raggio terrestre. Trascurando pertanto a come piccolissimo di fronte a $2R$ si avrà in fine $OF^2 = 2aR$; e sostituendo si otterrà per l'espressione dell'abbassamento

$$\text{tang } C = \frac{\sqrt{2aR}}{R} = \sqrt{\frac{2a}{R}}.$$

Non può dirsi però che sia questa la vera misura dell'abbassamento dell'orizzonte, poichè la refrazione della luce, cangiando ai nostri occhi le apparenze del globo, eleva gli oggetti che ci circondano, ed estende i limiti dell'orizzonte. In forza della refrazione si vedono gli oggetti che sono anco al di là di F in m , venendo all'occhio i raggi lungo la curva mKO : la depressione cercata θ non è dunque determinata dall'angolo MOF, ma dall'angolo MOk formato dalla tangente alla curva Okm . L'esperienza ha dimostrato che l'angolo MOF deve esser diminuito di 0,08 per divenire eguale alla depressione θ , onde si ha $\theta = 0,92C$; siccome però anche come questi piccolissimi sono sensibilmente proporzionali alle loro tangenti perciò si porrà

$$\theta = 0,92 \times \text{tang } C = 0,92 \sqrt{\frac{a}{\frac{1}{2}R}} = b\sqrt{a},$$

indicando con b il fattor costante $\frac{0,92}{\text{sen } 1'' \sqrt{\frac{1}{2}R}}$, ed esprimendo l'arco θ in secondi

(Vedi Asco). Supposto il raggio medio terrestre sei volte 3266330 piedi si troverà $\log b = 1,7826223$. L'altezza a deve esser valutata in piedi, e la formula darà con facilità la depressione θ .

Con questa formula è stata calcolata la seguente tavola, che dà l'angolo di abbassamento dell'orizzonte a diverse altezze dell'osservatore.

TAVOLA DEGLI ABBASSAMENTI DELL' ORIZZONTE

ELEVAZIONE DELL' OSSERVATORE ESPRESSA IN PIEDI	ABBASSAMENTO DELL' ORIZZONTE	ELEVAZIONE DELL' OSSERVATORE ESPRESSA IN PIEDI	ABBASSAMENTO DELL' ORIZZONTE
1	0°. 1'. 1"	30	0°. 5'. 32"
2	0. 1. 26	32	0. 5. 43
3	0. 1. 45	34	0. 5. 53
4	0. 2. 1	37	0. 6. 9
5	0. 2. 15	40	0. 6. 24
6	0. 2. 29	45	0. 6. 47
7	0. 2. 40	50	0. 7. 9
8	0. 2. 51	55	0. 7. 30
9	0. 3. 2	60	0. 7. 50
10	0. 3. 12	70	0. 8. 27
11	0. 3. 24	80	0. 9. 2
12	0. 3. 30	90	0. 9. 35
14	0. 3. 47	100	0. 10. 6
16	0. 4. 3	150	0. 12. 23
18	0. 4. 17	200	0. 14. 18
20	0. 4. 31	300	0. 17. 30
22	0. 4. 45	400	0. 20. 12
24	0. 4. 57	500	0. 22. 35
26	0. 5. 9	600	0. 24. 45
28	0. 5. 21	800	0. 28. 35

Se da un punto O elevato sulla superficie del globo si osserva l'angolo ottuso ZOK , ossia la distanza angolare apparente dell'orizzonte dallo zenit, l'eccezzo di quest'angolo sopra 90° è evidentemente l'abbassamento $\varnothing = MQK$, che corrisponde all'altezza $ON = a$ dello spettatore. L'equazione dunque di sopra trovata $\varnothing = b \vee a$, potendo servire a determinare questa altezza a , scioglierà il problema che consiste in trovare l'altezza di un osservatore che ha misurato l'angolo di depressione del luogo che esso occupa. Per maggiori dettagli su questo articolo si veda il Trattato di Geodesia del sig Puissant.

ABBASSAMENTO dei pianeti per effetto della parallasse. È la quantità angolare di cui vediamo i pianeti più bassi di quello che gli vedremmo che se fossimo posti nel centro della terra, ove converrebbe essere per vedere i movimenti celesti più uniformi. Questo abbassamento in certi casi è più di un grado per la luna; nè può farsi conto di osservazione alcuna se prima non venga corretta dall'altezzazione ragionata da un tale abbassamento. *Vedi PARALLASSE.*

ABBASSAMENTO del circolo crepuscolare. È la quantità di cui il Sole è abbassato sotto l'orizzonte nel tempo che il crepuscolo della sera è finito totalmente, o quando comincia l'aurora; cioè quando cominciansi a vedere le più piccole stelle nella sera dopo il tramontare del sole, o quando più non si vedono all'apparire dell'aurora. Questo abbassamento secondo il calcolo comune è di diciotto gradi, ossia della ventesima parte di tutto il giro del Cielo: ma questi diciotto gradi non si calcolano lungo il corso obliquo che fa il sole nel parallelo diurno, ma si devono misurare perpendicolarmente sotto l'orizzonte lungo un circolo verticale, che passi

per lo zenit, ed il nadir, e per il centro del sole. Il tempo che il sole impiega ad arrivare all'abbassamento del circolo crepuscolare, è almeu di un ora e dodici minuti; ma è più lungo per un osservatore che non sia posto sotto la linea equinoziale, ed ogni volta che il sole non trovisi precisamente nell' equatore. *Vedi CREPUSCOLO.*

L' *Abbassamento* di una stella sotto l'orizzonte è misurato dall' arco di un circolo verticale compreso sotto l'orizzonte tra questa stella e l'orizzonte stesso. *Vedi STELLA, VERTICALE.*

ABBASSAMENTO, del Polo. Tanto è l'abbassamento di un polo sotto l'orizzonte, quanta è l'altezza dell' altro polo sopra l'orizzonte: perciò l'abbassamento del polo è sempre eguale alla latitudine dell' osservatore, il quale, muovendosi verso l'equatore, di tanti gradi diminuirà l'abbassamento e l'altezza dei poli, di quanti gradi si accosterà alla linea equinoziale. *Vedi ALTEZZA DEL POLO.*

ABBATTUTA o' **ROVINATA** (*Fortificazione*). Trinceramento tumultuario fatto con alberi gettati a terra e disposti in lunghezza colle radici indentro, e coi rami verso il nemico. Quest' opera serve ad impellire l' avanzamento del nemico, e dà comodo alla moschetteria di far fuoco su di esso: viene spesso adoprata nei luoghi dove abbondano gli alberi di una mezzana grossezza. Le abbattute, dietro le quali si scava un fosso onde servano a trattenere la cavalleria, qualche volta si fanno per maggiormente difendere un ridotto, o una via coperta: ed in generale si usano dovunque, si rende necessario un intoppo ai progressi del nemico, purchè però sieno esse fiancheggiata da un fuoco sufficiente ad impedire che il nemico le possa distruggere a suo bell' agio. Questo genere di fortificazione è il più antico e il meno dispendioso.

ABBONDANTE (*Aritmetica*). Un numero *abbondante* è quello di cui la somma dei divisori è più grande delle unità contenute nel numero. Per esempio 12 è un numero abbondante, perchè ha per divisori i numeri 1, 2, 3, 4, 6, di cui la somma è 16. Un numero come 10, maggiore della somma 8 dei suoi divisori 1, 2, 5, è un numero *deficiente* o *difettoso*. Fra il numero *abbondante* e il numero *deficiente* si trova il numero *perfetto*; esso è quello che è eguale alla somma di tutti i suoi divisori. Il numero 6 è perfetto, perchè è eguale alla somma dei suoi divisori, 1, 2, 3.

ABBREVIAZIONE (*Algebra*). Dicesi in generale abbreviazione la riduzione di una quantità composta ad un' espressione più semplice. (*Vedi RIDUZIONE ALGEBRAICA*). Per abbreviare l' equazione

$$x^3 + ax^2 - cx^2 + abx = abc - acx - bcx + bx^2$$

si comincia in primo luogo da far passare nel primo membro tutti i termini affetti da x , ciò che dà

$$x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + obx + acx + bcx = abc.$$

Si mettono in seguito fra parentesi le diverse quantità le quali moltiplicano una medesima potenza di x , ed abbiamo

$$x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x = abc.$$

Se le quantità a , b , c , fossero numeri, si effettuerebbero le operazioni indicate, e supponendo che si abbia in questo caso

$$a+b+c = A,$$

$$ab+ac+bc = B,$$

$$abc = C,$$

l' equazione proposta si ridurrebbe alla forma

$$x^3 - Ax^2 + Bx = C$$

È importante il ridurre sempre le formule alle espressioni le più semplici che possano avere.

- ABEL (NICCOLÒ ENRICO). Nato nel 25 Agosto 1802, e morto nella fresca età di circa ventisei anni e mezzo. Se non possiamo collocarlo fra gli analisti di primo ordine, n'è unica cagione la sua morte prematura che gli ha impedito di competero coi più grandi matematici del suo tempo nel numero delle opere: ma i suoi primi saggi, confrontati con quelli dei migliori matematici, indicano sufficientemente un talento che lo avrebbe portato ai più alti posti nella scienza. Nacque nella provincia di Christiansand in Norvegia, in un villaggio detto Frindoe da un ecclesiastico in bassa fortuna. Cominciò i suoi studj nella scuola cattedrale di Cristiania, e all'età di sedici anni mostrò una decisa inclinazione per le matematiche, nelle quali si rese così distinto da meritare che Holmboe, suo pubblico maestro, gli desse lezioni private. Dopo gli elementi, che imparò rapidamente, fu messo a studiare l'*Introduzione all'analisi degl'infinitamente piccoli* di Eulero, e il *Calcolo differenziale e integrale* dello stesso autore, non meno che il *Gran Trattato* di Lacroix: lesse quindi avidamente le opere di Gauss, di Poisson, di Lagrange; e tolse specialmente a seguire i metodi di quest'ultimo. Uscito dalla scuola cattedrale Abel passò all'Università di Cristiania. Ma avendo già perduto il padre, e trovandosi privo di beni di fortuna, dovette sollecitare un posto gratuito in quell'istituto; e ricevere i benefizj dei professori pei primi due anni dei suoi studj: in seguito ottenne un sussidio straordinario dal governo.

Nel 1820 cominciò a pubblicare, nel *Magazzino per le scienze naturali di Cristiania*, alcune memorie di analisi, di cui la prima è intitolata: *Metodo generale per trovare una funzione di una variabile, allorchè una proprietà di questa funzione è espressa da un'equazione fra due variabili*. Nel 1824 i professori Rasmusen, e Hansteen, maravigliati dai suoi progressi gli ottennero la facoltà di viaggiare per due anni in Francia, in Italia e in Germania, a spese del Governo, all'oggetto di proseguire i suoi studj. Nel 1825 partì con parecchi suoi compagni d'università e giunse nell'estate dello stesso anno a Berlino, dove strinse amicizia con Crelle, il quale volgeva già in mente la pubblicazione d'un giornale per le matematiche trascendenti. Abel, rapito da una tale idea, fece conoscere al dotto prussiano una quantità grande d'importanti lavori da lui apparecchiati, e promettendogli la sua cooperazione gli diede un forte impulso per mandare ad effetto il suo divisamento. In tal modo noi dobbiamo in molta parte ad Abel, uscito appena dai banchi della scuola, la pubblicazione di sì bel giornale che ha meritato a Crelle la riconoscenza di tutti i geometri. Dopo sei mesi di permanenza Abel partì da Berlino, e viaggiò per l'Italia, per la Francia, e per la Germania: ma il suo ingegno non fu conosciuto, nè apprezzato quanto meritava. Ripatriato dopo venti mesi di assenza non poté avere nessuno impiego, nessun soccorso; e privo d'ogni mezzo andò a ricovrarsi presso la sua povera madre a Cristiania, ove per vivere dovè accettare un impiego affatto secondario. Colà a poco a poco l'abbandono in cui viveva cominciò ad alterare la sua salute. Non l'opprimeva il vedersi in povertà, perchè gli uomini della sua tempra mirano più alto che al denaro, ma bensì il sentire la propria superiorità senza trovar nessuno che volesse comprendere la potenza del suo ingegno, e il vedere di non esser capace d'arrivare a forza di scoperte a vincere l'indifferenza. Dopo aver languito per qualche tempo morì nel 6 Aprile 1829 alle miniere di Froland in Norvegia, dove era andato a visitare i suoi parenti. Frattanto il governo prussiano volendo attirare nei suoi stati un uomo che poteva sì validamente contribuire ai progressi delle scienze, gli fece offrire un onorevole impiego a Berlino: ma questa risoluzione non venne a disporsi in Norvegia se non dopo la morte di Abel.

L'Istituto di Franela, con una decisione senza esempio, ordinò che la metà del premio grande di matematica, per l'anno 1830, fosse data alla madre di Abel, che dovè per tale onore risentir maggiormente la perdita che aveva fatto.

I lavori di Abel che attirano specialmente l'ammirazione dei geometri, sono le sue ricerche sulle funzioni ellittiche. Dopo la scoperta del calcolo integrale si sperò per un momento di ridurre alle funzioni algebriche e circolari l'integrazione di tutte le funzioni differenziali di una sola variabile; ma, dopo molti tentativi infruttuosi, si riconobbe che bisognava collocare fra l'infinità di formule, che non si sapevano integrare, un'espressione assai semplice, quella cioè che contiene in modo irriducibile la quarta potenza dell'incognita, sotto un radicale quadrato. Tale formula, a cui aveva condotto la rettificazione delle sezioni coniche, rimase ribelle agli sforzi di tutti i geometri, e Laplace è fin giunto a dire che è impossibile di ottenere tale integrale sotto forma finita; proposizione che più tardi Abel ha tentato di dimostrare. Comunque sia di cotesta impossibilità, piuttosto che perdersi in vani sforzi, fecero meglio i geometri a considerare tal classe di differenziali come una trascendente particolare, procurando di ridurre alla loro forma più semplice tutte quelle che ne dipendevano. Fu detto che Maclaurin e d'Alembert fossero stati i primi ad occuparsi di tal riduzione: ma il fatto non è esatto; poichè assai prima che i suddetti geometri pubblicassero i loro lavori su tale soggetto (che sono dal 1742 al 1746, e non di gran momento), un geometra italiano, il Conte Giulio Fagnano, uno dei più acuti analisti del suo tempo, aveva aperto la strada a tali ricerche pubblicando nel 1718 nel Tomo XXX del *Giornale dei Letterati d'Italia* una memoria, in cui dava un'integrale particolare dell'equazione differenziale che serve alla divisione dell'arco della lemniscata, ed esponeva le equazioni algebriche che servono alla soluzione del problema. Resa in progresso generale dal suo autore, tale scoperta (che trasportava ad una curva trascendente un procedimento che per venti e più secoli era stato creduto applicabile alla geometria elementare soltanto) forma la base di ciò che chiamasi *la comparazione delle amplitudini* nella teoria delle funzioni ellittiche, ed ha meritato gli encomj di tutti i geometri. Eulero, venuto in cognizione della scoperta di Fagnano, ripigliò lo stesso soggetto e trovò, per una specie di divinazione, l'integrale generale di un'equazione differenziale del primo ordine, di cui ciascun membro era una trascendente ellittica completa. Ma questa integrale non poteva rappiccarsi all'analisi ordinaria, e fu Lagrange che ebbe il merito di trovarla direttamente con un metodo estremamente elegante. Fin allora non era stata fatta altra comparazione che quella degli archi di una funzione ellittica presi sulla stessa curva; ma nel 1775 Landen, illustre geometra inglese, trovò un teorema assai notevole, pel quale s'imparava a misurare sempre un arco d'iperbola con due archi d'ellisse, e fondò la teoria che di presente chiamasi *la trasformazione dei moduli*, e che serve alla trasformazione di una data sezione conica in un'altra di parametro diverso. Posteriormente Lagrange mostrò con un metodo semplicissimo, come poteva ridursi, per trasformazioni successive, un arco d'ellisse a differir pochissimo da una linea retta o da un arco di circolo.

Tuttavia tali ricerche restavano sparse e senza un legame comune; quando nel 1793 Legendre pubblicò una memoria sulle trascendenti ellittiche, nella quale cominciando in prima a stabilire un algoritmo atto ad esprimere tali funzioni, e a calcolarle con facilità, e continuando poi le ricerche di Lagrange dava una scala di trasformazione pei moduli. Scorse lungo tempo senza che nessuno si applicasse a tali questioni, e sebbene Gauss, col suo annunzio sulla divisione dell'arco della lemniscata, avesse mostrato che si era occupato delle trascendenti ellittiche, e si suppa d'altro canto che ha fatto scoperte importanti in tale parte d'analisi, egli non ha però ancora pubblicato il frutto delle sue ricerche. Le-

gendre frattanto colla perseveranza de' suoi studj preparò nel corso di venti anni i suoi *Esercizj di calcolo integrale*, in cui tra le altre cose tratta compiutamente delle funzioni ellittiche, dà tavole pel loro calcolo numerico, e mostra alcune delle loro applicazioni alla meccanica. Ma appena aveva egli nel 1827 messo fuori il suo *Trattato delle funzioni ellittiche*, quando Abel pubblicò nel secondo volume del Giornale di Crelle la sua prima memoria sopra le stesse funzioni. Questa memoria, tutta ripiena di belle scoperte e di nuove vedute, contiene le formule necessarie per la comparazione delle amplitudini, e dà per la moltiplicazione e per lo sviluppo delle trascendenti ellittiche espressioni elegantissime, analoghe a quelle che da lunga pezza si conoscevano per le funzioni circolari. Appena si bel lavoro poteva esser conosciuto dai geometri, Jacobi di Königsberg inserì, nel N° 123 del giornale di Schumacher intitolato *Astronomische Nachrichten*, una breve notizia nella quale annunziava teoremi di somma importanza sulla trasformazione dei moduli per un'infinità di scale nuove. Abel rispose con una seconda memoria in cui si occupava anch'egli di tale trasformazione in modo generale; fin da quel momento nacque una gara tra quei due giovani ed illustri rivali. Ma sebbene la pubblicazione delle loro memorie siasi fatta in diversi tratti di tempo, nulladimeno questi sono sì vicini, i metodi sono sì differenti, che non potrà cadere in mente a nessuno, il quale sappia come si operi in analisi, che i due giovani geometri, pubblicando a gara, a due o tre mesi di distanza, una serie di scoperte importanti, abbiano preso niente l'uno dall'altro. Le loro idee si sono senza dubbio fecondate mutuamente; ma ognuno di loro ha dovuto lavorare sopra un fondo proprio. Il complesso dei loro lavori forma una teoria compiuta delle funzioni ellittiche, la quale ha meritato di essere esposta da Legendre in alcuni supplementi al suo grande Trattato sulle funzioni medesime.

Gli altri lavori di Abel consistono in parecchie memorie sulle equazioni algebriche, sulle serie, sulle integrali euleriane, sopra un problema di meccanica ec., che tutte sono modelli d'invenzione, di eleganza di metodi, e di chiarezza di dimostrazioni; del che potrà giudicare anco lo studioso degli elementi leggendo una memoria inserita nel Giornale di Crelle sulla convergenza delle serie, nella quale si trovano varj risultati fino ad ora sconosciuti, e che appartengono esclusivamente ai primi elementi di questo ramo di analisi. Il sig. Crelle lo chiama con giustizia uno di quei genj, che appariscono una volta sola in un secolo.

Da molti viene attribuita ad Abel una rimarcabile scoperta. Si sa che nessuna soluzione generale è stata mai trovata delle equazioni al di sopra del quarto grado: vale a dire nessun problema è stato fin qui risoluto, in cui per le condizioni della questione il numero cercato o l'incognita sia moltiplicata per sé stessa più di tre volte. Soltanto alcuni particolari casi sono stati pienamente esaminati e risolti, conforme si vedrà ai rispettivi articoli di questo *Dizionario*; e sebbene in qualunque caso particolare si possa sempre ottenere per l'incognita un valore approssimato, che si scosti dal vero meno di qualunque quantità data, per quanto piccola essa sia, pure la soluzione generale ed esatta non è stata mai trovata. Abel ha dimostrato che una tal soluzione non è possibile, e che le radici di un'equazione del quinto grado, o di un grado superiore non possono essere espresse con una funzione generale algebrica. Noi però siamo in dovere di osservare, affinchè l'onore anco di questa scoperta non sia rapito all'Italia, che una tal verità era stata molto tempo prima scoperta e dimostrata dal celebre matematico italiano Paolo Ruffini nella sua opera intitolata: *Teoria generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebrica delle equazioni generali di grado superiore al quarto*, Bologna 1799, 2 vol. in-8°.

Il numero degli scritti di Abel prova l'attività del suo spirito, e l'ardore con cui coltivava le scienze, e rende sempre più dolorosa e rincrescevole la di lui perdita. Oltre una memoria presentata all'Istituto di Francia, e molte altre inserite nel Giornale di Cristiania, e nell'*Astronomische Nachrichten* (Nuove Astronomiche) del Professore Schumacher, egli ha dato al giornale di Crelle ventuna memoria nel breve periodo di circa due anni. Il governo svedese ha commesso ad Hansteen la pubblicazione in un sol corpo di tutte le opere di Abel con una compiuta biografia di questo illustre autore, sul quale chi desiderasse maggiori particolarità potrà consultare l'articolo *Abel* scritto dal Prof. Guglielmo Libri, ed inserito nel Tomo LVI della *Biographie Universelle*, Parigi 1834, non meno che il *Dictionnaire de la Conversation, et de la Lecture* N° I. Parigi 1832.

ABENEZRA. Nome arabo della bella stella di prima grandezza conosciuta più comunemente sotto il nome di *Aldebaran*. Vedi ALDERARAS.

ABERRAZIONE. Movimento apparente dei corpi celesti prodotto dalla combinazione del moto della luce con quello della Terra intorno al Sole. Il cambiamento di posizione che mediante questo movimento vengono a risentire le stelle fisse è così piccolo (essendo minore della novantesima parte del diametro apparente del Sole), che gli antichi astronomi non se n'erano accorti; e, sebbene sia esso un effetto necessario di due cause conosciute all'epoca della sua scoperta, pure la teoria non l'aveva fatto neppur sospettare, quando fu annunziato ai dotti nel 1728. Al celebre astronomo inglese Bradley è dovuta questa importante scoperta, della quale egli stesso ha esposto la storia nel numero 406 delle *Transazioni Filosofiche*. Egli vi fu condotto, come diremo in appresso, da parecchie osservazioni fatte con estrema accuratezza, con istrumenti a grandi dimensioni, ed intraprese all'oggetto speciale di determinare l'annua parallasse delle stelle fisse. (Vedi PARALLASSE).

Se il nostro senso della vista fosse perfetto, o se la luce non avesse una velocità maggiore di quella delle gocce della pioggia, avremmo un' *aberrazione terrestre*, vale a dire, gli oggetti cambierebbero ai nostri occhi la loro situazione relativa quando cominciasimo a muoverci. Eccone un escupio familiare e a tutti noto. In tempo di calma la pioggia cade perpendicolarmente, ed uno che trovisi in una vettura aperta nel davanti non riceve nessuna goccia d'acqua quando la vettura sta ferma. Ma se questa si muove, e corre rapidamente, la pioggia entra per il davanti, e bagna chi vi è dentro, come se prendesse una direzione obliqua. La ragione di questo fatto è evidente: il moto col quale andiamo incontro alla pioggia fa sì che riceviamo quella che è in aria, prima che sia caduta; e ciò avviene come se la pioggia, stando noi fermi, avesse preso una direzione obliqua seguendo la diagonale d'un parallelogrammo; i di cui lati fossero la velocità della pioggia d'alto in basso, e la velocità della vettura orizzontalmente o in avanti. Per la stessa ragione se camminassimo lesti come un raggio di luce, tutto intorno a noi sarebbe confusione. Ma siccome la luce si muove con una velocità che la nostra immaginazione non può concepire (intorno a 170000 miglia italiane per secondo), il suo moto è così grande paragonato col più grande che possiamo darci da noi stessi, che il suo passaggio da un luogo terrestre ad un altro; può senza errore considerarsi come istantaneo. Il moto di uno spettatore sulla terra che gira intorno al sole con una velocità di circa sedici miglia per secondo, sebbene minore più di diecimila volte di quello della luce, pure è sufficiente a cagionare una piccola variazione nella situazione d'una stella, variazione che è sensibile ai buoni istrumenti astronomici.

Supponiamo adesso S (Tav. V. fig. 6.) una stella ad una distanza immensa dalla terra. Dalle osservazioni le più accurate abbiamo che le linee condotte dalla stella a tutti i punti dell'orbita terrestre, e che debbono formare un cono più

o meno obliquo, secondo la latitudine della stella, sono sempre parallele fra loro in qualunque luogo si trovi la terra A. Ciò posto, indichino SE e le sue parallele, che si vedono punteggiate nella figura, la direzione dei raggi luminosi della stella, e si consideri un raggio luminoso come una successione di tenuissime molecole moventisi le une dopo le altre in linea retta. Se ora una molecola luminosa incontra nel punto *a* il centro dell'apertura superiore di un tubo o di un telescopio Aa inclinato per rapporto ad SE, essa, supponendo immobile il tubo, andrà ad urtare nella superficie interna di questo, conseguentemente verrà assorbita o riflessa, e non giungerà in A all'occhio dell'osservatore. Ma se si suppone che il tubo sia trasportato parallelamente a sè stesso da A in E, e ciò nel tempo che la molecola luminosa percorrerà la distanza *aE*, è evidente che questa molecola scenderà liberamente lungo l'asse del tubo, trovandosi in *δ* quando il tubo è in B, in *c* quando il tubo è in C, in *d* quando il tubo è in D, e finalmente giungendo in E all'occhio dell'osservatore quando il tubo arriva nella posizione EQ. Così la molecola luminosa, senza deviare dalla direzione *aE*, si sarà sempre trovata nell'asse del tubo; *δ* l'osservatore che si figura l'immagine dell'oggetto nella direzione EQ, nella quale la riceve, vedrà la stella in Z e non in S. La differenza che passa fra la vera situazione e il luogo apparente della stella, o l'angolo *aEQ* costituisce l'*aberrazione*. Dobbiamo fare adesso le seguenti osservazioni.

1° La figura della quale ci siamo serviti per dimostrare la causa dell'aberrazione è estremamente contorta, poichè AE deve essere minore della diecimillesima parte di *aE*: l'aberrazione sarà dunque piccolissima. Il dare alla figura le vere dimensioni sarebbe stato per il nostro scopo altrettanto inutile quanto impraticabile, poichè sebbene nella nostra figura l'aberrazione sia eccessivamente accresciuta, pure l'effetto e la ragione di essa è la stessa che si sarebbe ottenuta dando alla luce la sua vera velocità relativa.

2° Nel triangolo AaE si ha dalla Trigonometria la proporzione

$$aE : AE :: \text{sen } aAE : \text{sen } AaE,$$

donde si trae

$$\text{sen } AaE = \frac{AE}{aE} \text{sen } aAE.$$

Ma nella costruzione della figura abbiamo supposto che la distanza AE sia percorsa dalla terra nel tempo stesso che la luce percorre la distanza *aE*, perciò queste distanze stanno fra loro come la velocità della terra sta alla velocità della luce, e conseguentemente si ha

$$\frac{AE}{aE} = \frac{\text{velocità della terra}}{\text{velocità della luce}};$$

e siccome l'angolo *AaE* è eguale all'angolo d'aberrazione SEZ si ha

$$\text{seno dell'aberrazione} = \frac{\text{velocità della terra}}{\text{velocità della luce}} \text{sen } aAE.$$

Se si esprime coll'unità la velocità della terra in un tempo dato, quella della luce nel tempo medesimo viene espressa da 10188, dunque si ha nuovamente

$$\text{seno dell'aberrazione} = \frac{1}{10188} \text{sen } aAE.$$

Da questa espressione si deduce che l'aberrazione è massima quando l'angolo αAE è retto, poichè allora $\text{sen } \alpha AE = \text{sen } 90'' = 1$. Ma in questo caso l'equazione precedente diviene

$$\text{seno dell'aberrazione} = \frac{1}{10185} = \text{sen } 20'';$$

così la massima aberrazione è di $20''$, o con maggiore esattezza di $20'',253$, come risulta ancora dalle osservazioni. La medesima equazione fa pure vedere che l'aberrazione è nulla quando l'angolo αAE è nullo, ossia quando αA diviene tangente all'orbita della terra.

3° L'aberrazione è sempre nel piano che passa per la linea AD , direzione del moto della terra, e per la direzione SE dei raggi luminosi della stella; quindi siccome la terra cangia continuamente la direzione del suo moto girando intorno al sole, varierà pure la direzione dell'aberrazione.

4° L'effetto generale dell'aberrazione si è di portar sempre la stella in avanti, nel senso in cui ad ogni istante si muove la terra, in forza del quale effetto e del giro della terra intorno al sole ne viene che la stella sembra descrivere, come diremo anco in appresso, una piccola ellisse di cui l'asse maggiore è di circa $40'',50$, e di cui l'asse minore varia secondo la latitudine della stella, divenendo zero per le stelle situate nell'ecclittica, nel qual caso la stella pare oscillare in una linea retta.

La teoria dell'aberrazione si spiega in un modo più razionale per mezzo del parallelogrammo delle forze (Vedi *COMPOSIZIONE DELLE FORZE*). Infatti sia A (Tav. V. fig. 5.) una particella luminosa che incontri in O , con una celerità rappresentata dalla linea AO in un tempo t , l'occhio dell'osservatore mosso da C in B con una celerità rappresentata dalla linea CO nello stesso tempo t . Ora l'urto in O darebbe al raggio luminoso la direzione OA , in virtù della sola velocità AO , e gli darebbe la direzione OB , in virtù della sola velocità CO . Ne risulta dunque una direzione mista OD , secondo la diagonale del parallelogrammo $ADBO$ costruito sopra OA ed $OB = OC$, e l'osservatore vedrà la stella in D , e non in A . L'angolo d'aberrazione AOD sarà dato nel triangolo BOD dalla proporzione

$$\text{sen } BDO = \text{sen } AOD : \text{sen } BOD :: OB : BD = OA,$$

dalla quale si dedurrà come precedentemente

$$\text{sen } AOD = \text{sen } BOD \text{ sen } 20'',253.$$

Per rendere di più facile intelligenza il modo, in cui si forma questa direzione mista, non ripetiamo inutile l'addurre il seguente esempio. Sia $AECG$ (Tav. VII. fig. 1.) un vascello che va da dritta a sinistra. Supponiamo che da un angolo C di questo vascello venga gettata una pietra all'altro angolo A , e che, nel tempo che questa percorre CA , il vascello si sia avanzato verso la sinistra di un tratto CD o AB : quegli che è nel vascello in A si troverà allora giunto nel punto B , e sarà colpito dalla pietra come se non avesse fatto moto alcuno: la pietra gli sembrerà venire dall'angolo D , nella direzione DB , come avrebbe potuto venirgli da C , lungo CA , se il vascello fosse rimasto immobile. L'impressione sarà la stessa, mentre la relazione del punto C col punto A , la loro situazione, la loro distanza, non dipendono in modo alcuno dal moto del vascello: questo moto è comune alla pietra e al vascello, quindi la pietra percorrerà rispetto al vascello lo stesso cammino che avrebbe percorso se il moto non fosse esistito. Tuttavia nello spazio assoluto la pietra è venuta da C in B : così essa ha fatto lo stesso reale cammino, che fatto avrebbe una pietra, che dalla riva R fosse stata

direttamente gettata in B. Ecco dunque due pietre; l'una che viene dalla riva R, e che ha scorso la linea CB, e l'altra che è partita dall'angolo C del vascello, ed ha percorso egualmente la linea CB a cagione del moto del vascello: ora quest'ultima si è fatta sentire nella direzione DB, dunque anco l'altra, che fosse stata gettata dalla riva R, si sarebbe realmente fatta sentire nella direzione DB a quello, che essendo nell'angolo A del vascello, si fosse trovato trasportato da A in B, mentre la pietra veniva da C in B.

Supponiamo adesso, il che per il nostro oggetto è abbastanza esatto, che la terra si muova in un circolo (l'eclittica), di cui il sole occupi il centro. La linea SA (Tav. V. fig. 1) perpendicolare al piano dell'eclittica è diretta verso il polo dell'eclittica stessa. Sia SB la direzione di una stella, PSQ perpendicolare nel piano dell'eclittica ad SB, ed RSE perpendicolare a PSQ nello stesso piano. Quando la terra è in T essa si muove nella direzione TM perpendicolare ad ST, e la stella a causa della sua gran distanza si trova nella direzione CT parallela a SB. Per quello che si è detto di sopra l'aberrazione avrà luogo nel piano CTM, vale a dire la stella si troverà un poco più bassa verso TM, e apparirà nella direzione TD. Si muova l'indice SN intorno al circolo insieme colla terra, cosicchè indichi sempre la direzione nella quale si muove la terra, cioè sia SN nel suo movimento costantemente parallelo a TM, e perpendicolare a ST. Il piano BSN essendo parallelo al piano CTM, è precisamente quel piano in cui apparirebbe accadere l'aberrazione se lo spettatore fosse in S, ed S si movesse colla celerità della terra: ma siccome lo spettatore non si accorge del proprio moto, perciò supponiamolo collocato in S, ed allora accadrà nel piano ESN quella stessa aberrazione, che in realtà ha luogo nel piano CTM. In seguito di ciò che è stato detto l'aberrazione è massima quando l'indice N segna i punti Q o P, cioè quando la terra si trova in E o in R; ed è poi minima quando l'indice segna i punti E o R, cioè quando la terra si trova in P o in Q; poichè l'angolo BSN è un angolo retto quando N è in P o in Q, e differisce della massima quantità da un angolo retto quando N è in R o in E. Quindi l'aberrazione cresce mentre la terra si muove da P a E, diminuisce da E a Q, cresce da Q ad R, e diminuisce di nuovo da R a P. La linea, che indica la direzione in cui la stella apparisce, si muove intorno ad SB nel corso di un anno, e descrive un cono, mentre la stella sembra descrivere una piccola ovale o ellisse *pegr* intorno a B, l'asse maggiore della quale è parallelo a PQ, ed il minore ad RE. In questa ellisse *p* è il luogo apparente della stella quando la terra è in P, e è il luogo apparente della medesima quando la terra è in E, e: la deviazione si compie nel corso d'un anno.

Quando la stella è nel polo dell'eclittica, cioè quando si trova nella direzione SA, l'angolo ASN è sempre retto, l'aberrazione è sempre della stessa grandezza, e il cammino apparente della stella è un circolo. A misura che noi prendiamo stelle nelle quali la direzione SB sia più inclinata all'eclittica, ossia a misura che noi prendiamo stelle di minor latitudine, l'ovale descritta in virtù dell'aberrazione diviene più schiacciata in proporzione della sua lunghezza; cosicchè quando la stella è nell'eclittica sembra che oscilli avanti e indietro in una linea retta, andando e tornando una volta ogni anno.

Se la stella è nel coluro dei solstizj, i punti P e Q saranno gli equinozj, ed R ed E i solstizj. L'aberrazione sarà in conseguenza massima nei solstizj, e minima negli equinozj.

Le stelle ci compariscono situate in una grande sfera, nel di cui centro siamo collocati. Possiamo perciò rappresentare il fenomeno dell'aberrazione sopra un globo comune col tracciarvi intorno alla stella una piccola ellisse, o ovale, l'asse maggiore della quale sia parallelo all'eclittica, e la di cui figura sia più o meno

schacciata, secondo che la stella è più o meno vicina all'eclittica, ossia secondo che è minore o maggiore la di lei latitudine. L'asse maggiore sarà sempre un arco di $40''$,50, e l'asse minore sarà un arco di $40''$,50 moltiplicato per il seno di BSE, ossia per il seno della latitudine della stella.

Avanti di procedere a determinare la precisa quantità dell'aberrazione in ogni punto del corso della terra nell'eclittica, daremo un succinto ragguaglio storico della scoperta fattane, che è una delle più importanti nella storia della scienza. Gli argomenti che servivano d'appoggio al moto della terra, sebbene passabilmente concludenti, pure erano principalmente fondati sulla somma semplicità di questa ipotesi in confronto delle altre; poichè tutti i fenomeni fino allora osservati potevano egualmente bene spiegarsi nella supposizione, che tutti i pianeti si muovessero intorno al sole, nel tempo stesso che il sole si movesse intorno alla terra. Restava dunque a trovarsi un qualche *experimentum crucis*, un qualche fenomeno, che non ammettesse altra spiegazione fuori di quella che potesse derivare dal moto della terra. La prima idea che si presentò agli astronomi fu, che se la terra realmente si muoveva, le stelle avrebbero sembrato cangiar di posto: sebbene peraltro essi non fidassero molto in questa conclusione, poichè conoscevano che la distanza delle stelle avrebbe potuto esser sì grande, che l'intero diametro dell'orbita terrestre sarebbe stato per la terra un cangiamento da luogo troppo piccolo per produrre un cangiamento percettibile nella posizione delle stelle (Vedi PARALLASSE).

Per comprender ciò si supponga che, quando la terra è in Q (Tav. V. fig. 1.), noi osserviamo la stella nella direzione QG, e quando la terra è in P, noi la vediamo nella direzione PF. Si conduca PH parallela a QG. Lo spettatore, che si crede immobile, se osserva la stella in queste due epoche scorgerà una differenza di posizione corrispondente all'angolo HPF, a meno che la distanza della stella non sia così grande da rendere quest'angolo impercettibile ai suoi strumenti. Questa differenza però si verificherà nel piano che passa per la stella e per il diametro PQ, laddove l'effetto dell'aberrazione ha sempre luogo in un piano perpendicolare a questo.

I primi Astronomi dopo Copernico posero in opera ogni cura, e si diedero alle più esatte osservazioni, per quanto il poterano permettere gli strumenti astronomici allora conosciuti, all'oggetto di scoprire e determinare la parallasse delle stelle fisse, e dar così la prova tanto desiderata del moto della terra. Alcuni credettero di averla trovata, e non temerono di assegnarne la quantità: altri, ed in maggior numero, appoggiandosi ad osservazioni più esatte la trovarono assolutamente insensibile, e doverono concludere per la sua non esistenza. Quest'ultima opinione in fine prevalse, e Ticone Brahé, e Riccioli, che crederono di essersene meglio assicurati colle proprie osservazioni, s'indussero appunto per questa ragione a negare il moto annuo della terra. Ficard osservò il primo nel 1672 alcune variazioni nella stella polare, come egli narra nella relazione del suo viaggio di Uranibourg, e se ne assicurò mediante replicate osservazioni fatte nel corso di dieci anni. Tornò allora in campo l'idea di una parallasse, che tenne divise le opinioni degli astronomi. Hooke pretese di aver trovato una parallasse di 15 secondi nella stella γ del Dragone. Flamsteed pure, avendo nel 1689 e negli anni successivi osservato la stella polare trovò che la declinazione ne era di $40''$ più piccola nel mese di Luglio che nel mese di Dicembre. Le sue osservazioni erano giuste, ma non provavano la parallasse, come lo fece vedere Cassini nelle memorie dell'Accademia di Parigi del 1699. Eustachio Manfredi suppose che le alterazioni osservate nelle stelle dipendessero da una fluttuazione irregolare nella materia eterea: ma era questa una spiegazione troppo vaga, ed assolutamente inammissibile di fronte ad una certa regolarità scoperta in quelle alterazioni. Si trovavano pertanto gli astronomi nella massima

Incertezza non potendo, nè ulteriormente dubitare delle annue variazioni nella posizione delle stelle, nè conciliarle con l'ipotesi di una parallasse, mentre esse si verificavano in una direzione affatto diversa da quella, nella quale avrebbero avuto luogo se realmente questa parallasse fosse esistita. Era dunque necessario, per risolvere una questione così importante e difficile, l'istituire una serie di molteplici ed esattissime osservazioni, all'oggetto di scoprire la legge (se alcuna ve ne fosse stata) delle variazioni delle stelle nella declinazione e nell'ascensione retta, ed assegnarne quindi una causa sufficiente e plausibile: in sostanza si richiedeva un esperto osservatore che somministrasse i dati, ed un profondo geometra che sciogliesse il problema. Un inglese riuniti l'una e l'altra qualità, spiegò con rara felicità il fenomeno, ed alle prove che già si avevano del sistema copernicano una nuova ne aggiunse, che può piuttosto chiamarsi una dimostrazione matematica.

Nell'anno 1725 Samuele Molyneux, ricco particolare irlandese, propose a Bradley, allora professore di astronomia nel collegio di Saville ad Oxford, d'intraprendere insieme una serie di osservazioni per verificare ciò che era stato detto sopra i movimenti delle stelle, e per determinarne la quantità e la legge. Accettò Bradley con premura la proposizione, ed entrambi si accinsero all'impresa. Lo strumento più corretto che in quel tempo si conoscesse per misurare gli angoli piccolissimi era il settore. Il settore è uno strumento che serve a misurare la distanza angolare di un astro dallo zenit dello spettatore, nel momento che l'astro passa pel meridiano, determinandosi lo zenit per mezzo di un filo a piombo. Molyneux ne volle uno della massima precisione, e ne commise la costruzione a Giorgio Graham. Quest'orologiaro, celebre nelle arti non meno pel suo genio che pel suo zelo, secondò mirabilmente il desiderio di Molyneux, e costruì un settore di ventiquattro piedi di raggio, col mezzo del quale diveniva sensibile la variazione di un solo secondo, e la di cui esattezza sorpassava di gran lunga tutto ciò che fino a quel tempo si era veduto in questo genere. Il settore fu eretto a Kew vicino a Londra sotto la direzione di Molyneux, il quale cominciò le sue osservazioni nel 3 Dicembre 1725 scegliendo a tale oggetto la stessa stella già osservata da Hooke, cioè quella indicata nei cataloghi colla lettera γ alla testa del Dragone, che è alla distanza di circa 16° dal polo dell'eclittica, e che passa prossimamente allo zenit di Londra. Dopo non molto tempo però richiamato Molyneux a coprire distinte cariche nello Stato non poté, nè continuare le sue osservazioni, nè stabilire teoria nessuna su quelle già fatte, e tutto lasciò a Bradley, che eccellente osservatore, e dotto geometra, proseguì solo nel luogo medesimo le stesse ricerche, con una assiduità e con una costanza, che lo condussero finalmente a scoprire la causa del fenomeno.

Poniamoci intanto nella situazione di Bradley. Misurando la distanza della stella dallo zenit, quando essa si trova nel meridiano, viene a misurarsi pure la sua distanza polare, poichè lo zenit ed il polo sono due punti del meridiano distanti l'uno dall'altro del complemento della latitudine del luogo: cioè, aggiungendo la differenza fra 90° e la latitudine di Kew alla distanza meridionale della stella dallo zenit nel luogo medesimo, noi otteniamo la sua distanza polare. Nella figura 2 della Tavola V, S rappresenta la situazione media della stella, e *aev* la piccola ellisse descritta dalla stella in un anno. Il lettore deve immaginarsi questa ellisse posta nel cielo, e la linea PS condotta sopra il suo capo in modo che Z sia il suo zenit, e P il polo. Vediamo ora come si possano determinare i punti dell'ellisse *aev*, corrispondenti alle quattro principali epoche dell'anno, cioè i solstizj, e gli equinozj. Tornando di nuovo alla figura 1 della Tavola V, nella quale abbiamo collocato lo spettatore in S, sembrerà che il sole descriva il circolo che effettivamente descrive la terra; cioè mentre la terra si muove da Q in R il sole sembrerà muoversi da P in E. Perciò, quando la terra è in Q,

L'aberrazione, spingendo il luogo apparente della stella verso SR, cioè 90° avanti la terra, lo spinge ancora verso una linea 90° dietro il luogo apparente del sole. Sia adesso T (Tav. V. fig. 3.) la terra, IVEA il corso apparente del sole ossia l'eclittica, TP l'asse della terra, MVNA l'equatore; quindi, se il sole si muove nella direzione indicata dalle frecce, V è l'equinozio di primavera, E il solstizio d'estate, A l'equinozio di autunno, ed I il solstizio d'inverno. Il circolo NEPQZSMI che racchiude l'intera figura è il coluro dei solstizj, e siccome la stella γ del Dragone è vicinissima a questo coluro, noi la supporremo sul medesimo nel punto S. Sia Z lo zenit dello spettatore, vale a dire si supponga questi in un punto tale della terra che il filo a piombo cada nella direzione TZ: il punto Z, in forza del moto diurno della terra, descriverà ogni giorno il circolo, che nella figura si vede indicato con una linea punteggiata. Il meridiano e il circolo mobile che passa per P e Z, e siccome la figura è immobile, il luogo della stella, e il polo dell'eclittica si trovano sul meridiano. Ciò posto supponiamo che sia il tempo dell'equinozio di primavera, quando cioè pare che il sole sia in V; allora essendo il punto I 90° dietro V, la stella sarà spinta in forza dell'aberrazione verso I, e sembrerà in v. Similmente e, a, ed i indicheranno le posizioni apparenti della stella corrispondenti ai punti E, A, ed I, supponendosi che la parte punteggiata dell'ellisse sia descritta sull'altra parte della sfera, che dobbiamo immaginarci dietro alla figura. La figura 2 della tavola V è staccata dalla figura 3 della stessa tavola, e rappresenta il corso della stella come comparisce allo spettatore in T, essendo il meridiano SZP condotto in modo che Z rimanga sul suo capo, e P dietro a lui.

Immaginiamo pertanto uno spettatore nella situazione di Bradley con un istrumento atto a misurare la sola distanza polare, essendo il tempo del solstizio d'inverno. Siccome la stella pare che si muova da i in v, essendo questo il tragitto che fa la stella dal solstizio d'inverno all'equinozio di primavera, così la distanza polare andrà di giorno in giorno crescendo: dopo l'equinozio di primavera diminuirà, e continuerà a far così fino all'equinozio d'autunno, dopo il quale comincerà di nuovo a crescere fino al solstizio d'inverno dove compirà l'intero giro che le avrà fatto percorrere l'aberrazione. Queste furono precisamente le apparenze osservate da Bradley. Egli vide, nel 17 Dicembre 1725, che la stella precedentemente osservata passava al meridiano un poco più verso il sud, che nei primi giorni del mese. In principio tanto esso che Molyneux non fecero molta attenzione a questa differenza; essa, piccola come era, poteva derivare da qualche errore di osservazione; non ostante il 20 Dicembre la stella si era ancora avanzata verso il sud, e continuò a far lo stesso nei giorni seguenti, senza che questo moto progressivo potesse più attribuirsi a un difetto nelle osservazioni. Questa variazione nella situazione della stella sembrava tanto più singolare, in quanto che si effettuava in una direzione affatto contraria a quella, nella quale l'avrebbe prodotta la parallasse annua, la ricerca e determinazione della quale era l'oggetto principale delle osservazioni. Infatti in forza delle leggi di una possibile parallasse una stella avrebbe dovuto descrivere un'ellisse più o meno allungata secondo la sua minore o maggior latitudine, ma sarebbe apparsa sempre nella parte opposta a quella della terra, cioè nella direzione stessa del sole: perciò nel solstizio d'inverno, tempo in cui si facevano le osservazioni, la stella doveva comparire in v e non in i, e nell'inoltrarsi verso l'equinozio di primavera dovendo descrivere l'arco ve la sua distanza polare doveva giornalmente diminuire e non già aumentare. Una tal cosa imbarazzò oltremodo Bradley, che, non potendo altrimenti attribuire il fenomeno alla ricercata parallasse, non sapeva concepire una causa atta a produrlo.

In principio egli sospettò che ciò provenisse da qualche nutazione o moto co-

nico nell'asse della terra: ma i risultati di osservazioni fatte sopra altre stelle non permetteranno di adottare questa ipotesi. Infatti una piccola stella che era alla stessa distanza dal polo, ed opposta in ascensione retta alla γ del Dragone avrebbe dovuto avere, in virtù di questa nutazione, il medesimo cangiamento in declinazione; pure essa non ne aveva avuto che la metà appena, come appunto si rilevò, confrontando giorno per giorno le variazioni dell'una e dell'altra osservate nello stesso tempo: era questa la stella 35^a della Giraffa nel catalogo di Flamsteed. Per assicurarsi meglio dei fatti Bradley fece costruire un nuovo settore, che fu collocato a Wansted nel 1727, e cominciò di nuovo ad esaminare accuratamente quali erano le variazioni delle stelle secondo la loro diversa situazione.

Dopo moltissime osservazioni fatte con estrema diligenza, Bradley concepì (senza che si sapesse come vi giungesse) la felice idea, che l'apparente aberrazione delle stelle fisse fosse prodotta dalla combinazione del moto annuo della terra col moto progressivo della luce, che fino dal 1675 era stato scoperto da Roemer mediante l'osservazione dei satelliti di Giove. Egli provò questa ipotesi, e vedendo che essa si accordava perfettamente con tutte le osservazioni, rese conto della sua scoperta nel Dicembre 1728 nelle *Transazioni filosofiche* della Società Reale di Londra, pubblicando ancora, ma senza dimostrazione, le formule trigonometriche che servivano al calcolo dell'aberrazione. Per far vedere quanto la sua ipotesi si accordava colle osservazioni, Bradley dispose in una tavola 15 osservazioni della γ del Dragone fatte in tutti i mesi dell'anno. Vi si vedeva di quanto in ogni giorno quella stella doveva esser più meridionale secondo il calcolo rigoroso eseguito dietro i principj che di sopra abbiamo indicati, e di quanto lo era essa divenuta dietro l'osservazione: la differenza non oltrepassa giammai un secondo e mezzo. Lo stesso accordo che si vedeva in questa tavola della γ del Dragone si riscontrava pure in tutte le altre stelle; così Bradley dovè riguardare questo accordo delle osservazioni come una dimostrazione della sua ipotesi, o piuttosto dovè cessare di considerare come ipotesi una teoria che si accordava sì bene, e col moto della terra, e con quello della luce.

Molti autori hanno scritto sull'aberrazione dopo Bradley. Fra essi citeremo Clairaut, che nelle Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1737 diede le dimostrazioni delle formule per calcolare l'effetto dell'aberrazione sulla latitudine, longitudine, ascensione retta, e declinazione degli astri, Tommaso Simpson, Eustachio Manfredi, il P. Paolo Frisi, e Fontaine Desruettes. Eulero ha trattato questa materia colla solita sua superiorità nelle Memorie dell'Accademia di Berlino del 1746 Tomo II. Su questo medesimo soggetto possono pure consultarsi i Trattati elementari di Astronomia, i Dizionarij di filosofia naturale di Gehler, Fischer ec. Un eccellente ragguaglio sopra l'aberrazione si trova nel *Traité élémentaire d'Astronomie physique* di Biot, Parigi 1811, seconda edizione Vol. 3^o pag. 120 e segg. Si trovano tavole d'aberrazione con spiegazioni e illustrazioni nelle opere del Barone di Zach, *Tabulae speciales aberrationis et nutationis etc.* Gotha 1806, e *Nouvelles tables d'aberration et de nutation pour 1504 étoiles, avec une table générale d'aberration pour les planètes et les comètes*, Marsiglia 1812, con un supplemento impresso nel 1813. Delambre pure ha calcolato tavole di aberrazione per tutti i pianeti: so ne possono vedere i particolari nel suo *Trattato di Astronomia*.

Le formule, che danno l'aberrazione delle stelle in longitudine, latitudine, ascensione retta, e declinazione, in diversi modi si dimostrano. Il seguente elegantissimo metodo si trova negli eccellenti *Elementi di Astronomia* del sig. Santini, Padova 1830, 2 Vol. in-4^o seconda edizione.

Rappresenti BTN (Tav. VII. fig. 2) l'orbita della terra intorno al sole S,

SC la linea degli equinozi, B il perielio, ed N l'afelio. Indichi la linea TP nel cielo stellato la posizione d'una stella corrispondente ad una longitudine l , e ad una latitudine boreale λ , e sia r la distanza della vera posizione della stella dal centro della terra in T. Le stesse quantità relative alla posizione apparente della stella sieno l' , λ' , r' . La celerità Ta del raggio luminoso $= \gamma$, quella dell'occhio $Tt = V$, e la loro risultante Tb sia $= \gamma'$. Riferiscasi la posizione della stella nello spazio a tre assi ortogonali delle x, y, z , prendendo per l'asse delle x la linea degli equinozi SC, per quello delle y la sua perpendicolare sul piano dell'eclittica, e per quello delle z l'asse dell'eclittica, e sieno x, y, z , le coordinate del luogo vero, x', y', z' , le coordinate del luogo apparente. Avremo in primo luogo (Vedi COORDINATE).

$$x = r \cos l \cos \lambda, \quad x' = r' \cos l' \cos \lambda',$$

$$y = r \sin l \cos \lambda, \quad y' = r' \sin l' \cos \lambda',$$

$$z = r \sin \lambda, \quad z' = r' \sin \lambda'.$$

Se indichiamo adesso per $(r, x), (r, y), (r, z), (r', x), (r', y), (r', z)$ gli angoli che le linee TP, Tb fanno con gli assi delle x, y, z , avremo dalla Geometria analitica

$$\cos(r, x) = \frac{x}{r} = \cos l \cos \lambda, \quad \cos(r', x) = \frac{x'}{r'} = \cos l' \cos \lambda',$$

$$\cos(r, y) = \frac{y}{r} = \sin l \cos \lambda, \quad \cos(r', y) = \frac{y'}{r'} = \sin l' \cos \lambda',$$

$$\cos(r, z) = \frac{z}{r} = \sin \lambda, \quad \cos(r', z) = \frac{z'}{r'} = \sin \lambda'.$$

Decomponendo quindi le celerità γ, γ' in tre parallele agli assi delle x, y, z , formeremo per le leggi della meccanica le seguenti componenti: per γ

$$\gamma \cos l \cos \lambda, \quad \gamma \sin l \cos \lambda, \quad \gamma \sin \lambda,$$

e per γ'

$$\gamma' \cos l' \cos \lambda', \quad \gamma' \sin l' \cos \lambda', \quad \gamma' \sin \lambda'.$$

Del pari, chiamando l'angolo TRC (che la direzione della celerità V dell'occhio fa coll'asse delle x) $= \varphi$, si potrà V decomporre in due parallele alle x, y , che saranno rappresentate da $V \cos \varphi, V \sin \varphi$, la terza nel senso delle z essendo nulla per essere la direzione della celerità V nel piano stesso delle x, y . Ora essendo γ' la risultante di γ e di V, le componenti della prima essendo rispettivamente parallele alle componenti delle ultime dovranno eguagliare la loro somma: quindi avremo le tre equazioni

$$\left. \begin{aligned} \gamma' \cos l' \cos \lambda' &= \gamma \cos l \cos \lambda + V \cos \varphi \\ \gamma' \sin l' \cos \lambda' &= \gamma \sin l \cos \lambda + V \sin \varphi \\ \gamma' \sin \lambda' &= \gamma \sin \lambda \end{aligned} \right\} (A)$$

Dalla somma dei quadrati delle quali si otterrà dopo le opportune riduzioni

$$\gamma' = \sqrt{[\gamma^2 + 2\gamma V \cos \lambda \cos(\varphi - l) + V^2]}$$

Frattanto osservando che la celerità della luce è grandissima in confronto di quella della terra, potremo senza incorrere in errore trascurare le potenze di $\frac{V}{\gamma}$

superiori alla prima, e però dopo aver posto la precedente equazione sotto la forma

$$\gamma' = \gamma \sqrt{\left(1 + \frac{2V \cos \lambda \cos(\varphi - I)}{\gamma} + \frac{V^2}{\gamma^2}\right)},$$

e prendendo i soli due primi termini dello sviluppo del radicale che si avrà coi metodi ordinarj, otterremo

$$\gamma' = \gamma \left(1 + \frac{V}{\gamma} \cos \lambda \cos(\varphi - I)\right) \dots (B)$$

Sarà ora facile il determinare i valori di λ' e di I' per mezzo di I , λ , e $\frac{V}{\gamma}$. Infatti dall'equazione (B) si ha

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{V}{\gamma} \cos \lambda \cos(\varphi - I)} = 1 - \frac{V}{\gamma} \cos \lambda \cos(\varphi - I)$$

trascurando al solito i termini che contengono le potenze di $\frac{V}{\gamma}$ superiori alla prima; il qual valore posto nell'ultima delle equazioni (A) darà

$$\text{sen } \lambda' = \frac{\gamma'}{\gamma} \text{sen } \lambda = \text{sen } \lambda - \frac{V}{\gamma} \text{sen } \lambda \cos \lambda \cos(\varphi - I) \dots (a).$$

Ponendo adesso $\lambda' = \lambda - q$, q sarà piccolissimo, e dell'ordine stesso di $\frac{V}{\gamma}$; quindi nello sviluppo di $\text{sen}(\lambda - q)$ datoci dalle formule trigonometriche trascurando le potenze di q superiori alla prima avremo

$$\text{sen } \lambda' = \text{sen}(\lambda - q) = \text{sen } \lambda - q \cos \lambda \dots (b).$$

Eguagliando ora i due valori di $\text{sen } \lambda'$ avuti dalle equazioni (a) e (b), si determinerà il valore di q , dalla sostituzione del quale in $\lambda' = \lambda - q$ avremo finalmente il cercato valore di

$$\lambda' = \lambda - \frac{V}{\gamma} \text{sen } \lambda \cos(\varphi - I) \dots (1)$$

Per determinare I' si divida la seconda delle equazioni (A) per la prima e si avrà

$$\text{tang } I' = \frac{\gamma \text{sen } I \cos \lambda + V \text{sen } \varphi}{\gamma \cos I \cos \lambda + V \cos \varphi};$$

e dividendo il denominatore e il numeratore del secondo membro di questa equazione per $\gamma \cos I \cos \lambda$ si otterrà

$$\text{tang } I' = \frac{\text{tang } I + \frac{V \text{sen } \varphi}{\gamma \cos I \cos \lambda}}{1 + \frac{V \cos \varphi}{\gamma \cos I \cos \lambda}},$$

ed eseguendo la divisione, e trascurando, come si è avvertito di sopra, i termini che contengono $\frac{V^2}{\gamma^2}$, $\frac{V^3}{\gamma^3}$, ec, si ha dopo le riduzioni richieste dalla Trigonometria

$$\operatorname{tang} l' = \operatorname{tang} l + \frac{V \operatorname{sen} \varphi}{\gamma \cos l \cos \lambda} - \frac{V \operatorname{tang} l \cos \varphi}{\gamma \cos l \cos \lambda};$$

la quale equazione, postovi il valore di $\operatorname{tang} l$, e fatte le necessarie riduzioni diviene in fine

$$\operatorname{tang} l' = \operatorname{tang} l + \frac{V}{\gamma} \frac{\operatorname{sen}(\varphi - l)}{\cos^2 l \cos \lambda} \dots (a').$$

Ponendo $l' = l + q'$, e trascurando per la ragione già detta le potenze di q' che oltrepassano la prima nello sviluppo di $\operatorname{tang}(l + q')$, sarà

$$\operatorname{tang} l' = \operatorname{tang} l + \frac{q'}{\cos^2 l} \dots (b');$$

confrontando quindi i due valori di $\operatorname{tang} l'$ otterremo il valore di q' , che sostituito in $l' = l + q'$ darà finalmente

$$l' = l + \frac{V}{\gamma} \frac{\operatorname{sen}(\varphi - l)}{\cos \lambda} \dots (2)$$

Resta a determinare l'angolo φ , e la celerità V . Quanto a φ , essendo (*Tav. VII. fig. 2*) $\text{TBC} = \text{RTS} + \text{TSC}$, se pongasi la longitudine della terra $= L = \text{TSC}$, e l'angolo $\text{STR} = \varepsilon$, sarà $\varphi = L + \varepsilon$. L'angolo ε , che il raggio vettore S fa colla

tangente, si vedrà facilmente determinato dall'equazione differenziale $\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{r d\nu}{dr}$.

Chiamando ora p il semiparametro dell'orbita, e l'anomalia vera TSB , l'equa-

zione polare all'ellisse $r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$ differenziata darà $\frac{d\nu}{dr} = \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{p e \operatorname{sen} \nu}$; donde otterremo

$$\operatorname{tang} \varepsilon = \frac{1 + e \cos \nu}{e \operatorname{sen} \nu},$$

ponendo in luogo di p il suo valore $r(1 + e \cos \nu)$ dato dall'equazione polare all'ellisse. Dal valore di $\operatorname{tang} \varepsilon$, e dalle formule trigonometriche

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\operatorname{tang} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}}, \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \alpha}}$$

si avrà dopo le necessarie sostituzioni e riduzioni

$$\operatorname{sen} \varepsilon = \frac{1 + e \cos \nu}{\sqrt{(1 + 2 e \cos \nu + e^2)}}$$

$$\cos \varepsilon = \frac{e \operatorname{sen} \nu}{\sqrt{(1 + 2 e \cos \nu + e^2)}}.$$

Il valore di V viene dato dalla Meccanica per mezzo dell'equazione

$$V = U \sqrt{\left(\frac{2}{r} - 1\right)}, \text{ nella quale } U \text{ rappresenta la celerità media della terra nel}$$

caso che essa descrivesse annualmente un circolo di raggio $= 1$, ed r rappresenta il raggio vettore che dal Sole va alla terra. Per la dimostrazione di questa equazione noi rimanderemo ai diversi trattati particolari, e specialmente al *Trattato*

di *Meccanica* del sig. Poisson, Parigi 1833 Vol. 1, pag. 483, N° 222. Ponendo frattanto nel valore di V il valore di $r = \frac{p}{1+e \cos v} = \frac{1-e^2}{1+e \cos v}$, datoci dalla equazione polare all'ellisse, avremo senza difficoltà nessuna dopo le riduzioni

$$V = U \sqrt{\left(\frac{1+2e \cos v + e^2}{p} \right)}.$$

Se ora nelle equazioni (1), (2) poniamo $\varphi = L + \iota$, rappresentando L la longitudine eliocentrica della terra avremo

$$\lambda' = \lambda - \frac{V \sin \lambda}{\gamma} \left(\cos(L-l) \cos \iota - \sin(L-l) \sin \iota \right),$$

$$l' = l + \frac{V}{\gamma \cos \lambda} \left(\sin(L-l) \cos \iota + \cos(L-l) \sin \iota \right);$$

e sostituendo in luogo di $V \sin \iota$, $V \cos \iota$ i precedenti valori, e riflettendo ancora che $v = L - \pi$, se π rappresenta la longitudine del perielio terrestre, otterremo

$$\lambda' = \lambda + \frac{U \sin \lambda}{\gamma \sqrt{p}} \left(\sin(L-l) + e \sin(\pi-l) \right) \dots (1')$$

$$l' = l + \frac{U}{\gamma \sqrt{p \cos \lambda}} \left(\cos(L-l) + e \cos(\pi-l) \right) \dots (2').$$

La frazione $\frac{U}{\gamma}$ rappresenta il rapporto fra la celerità media della terra, e la celerità della luce. Se adunque poniamo $\gamma = 1$, sarà U l'arco che la terra descriverebbe in virtù del suo moto medio nel tempo dalla luce impiegato a percorrere il semiasse maggiore della sua orbita. Ora dietro i risultamenti di Delambre fondati sopra le osservazioni degli eclissi dei Satelliti di Giove (*Vedi* SATELLITI DI GIOVE) la luce impiega 493,22 a descrivere il semiasse maggiore dell'orbita terrestre, nel qual tempo la terra percorre, in virtù del suo moto medio, un arco di 20,227; quindi sarà il coefficiente costante $\frac{U}{\gamma \sqrt{p}} = 20,225$, rammentandosi che $p = 1 - e^2$.

Sogliono gli astronomi per maggior comodo nelle formule (1'), (2'), in luogo delle longitudini eliocentriche della terra e del perielio, introdurre le longitudini del Sole, e del perigeo, che da quelle differiscono sempre di 180°. Ponendo dunque la longitudine del sole = S , del perigeo solare = p , avremo $S = 180 + L$, $p = 180 + \pi$: di più ponendo il valore dell'eccentricità $e = 0,0167836$ (*Vedi* ECCENTRICITÀ) otterrassi

$$\lambda' = \lambda - 20'',25 \sin(S-l) \sin \lambda - 0'',34 \sin \lambda \sin(p-l) \dots (1'')$$

$$l' = l - 20'',25 \cos(S-l) \sec \lambda - 0'',34 \sec \lambda \cos(p-l) \dots (2'')$$

Vedesi di qui come l'ultimo termine dipendente dall'eccentricità dell'orbita terrestre è picciolissimo, e può quasi sempre trascurarsi.

Le differenze $\lambda' - \lambda$, $l' - l$, che dagli astronomi chiamansi aberrazione in latitudine e in longitudine, variano al variare dell'angolo $S - l$; e siccome quest'angolo nel corso di un anno prende successivamente tutti i valori possibili della circonferenza, così le quantità $\lambda' - \lambda$, $l' - l$ corrisponderanno continuamente a

tutti i valori fra il massimo positivo e il massimo negativo: ed esaurito nel corso dell'anno l'intero periodo degli accrescimenti e delle diminuzioni progressive, torneranno queste e quelli a riprodursi nuovamente nello stesso ordine. Così, come già avevamo trovato di sopra in forza del ragionamento, si rileva ora dal calcolo delle formule che le oscillazioni dipendenti dal moto progressivo della luce, tendenti ad allontanare le stelle dalla loro media posizione, sono periodiche, ed ogni anno si riproducono nello stesso ordine.

Dalle stesse formule si rileva pure: 1° che l'aberrazione in latitudine è nulla quando $S-l=0$, ovvero $=180^\circ$, cioè nelle congiunzioni e nelle opposizioni, ed al contrario è massima nelle quadrature, cioè quando $S-l=90^\circ$, ovvero $=270^\circ$; 2° che l'aberrazione in longitudine è massima nelle congiunzioni e nelle opposizioni, e nulla nelle quadrature.

Per ottenere le formule dell'aberrazione in ascensione retta e in declinazione riferiscasi la posizione delle linee Ta , Tb (Tav. VII. fig. 2) al piano dell'equatore, e tanto la celerità del raggio luminoso, come anche quella dell'occhio risolvansi in tre parallele a tre assi ortogonali, il primo dei quali sia la linea SC degli equinozi, il secondo la sua perpendicolare posta nel piano dell'equatore, ed il terzo l'asse dell'equatore diretto verso il polo boreale, ai quali assi per ordine daremo il nome di x , y , z . Ritenute ora le denominazioni precedenti, indichino α , δ l'ascensione retta e la declinazione vera della stella, α' , δ' le stesse quantità affette dall'aberrazione; ragionando nel modo che abbiamo fatto di sopra le componenti di γ , γ' nelle direzioni x , y , z saranno

$$\gamma \cos \alpha \cos \delta, \quad \gamma \sin \alpha \cos \delta, \quad \gamma \sin \delta,$$

$$\gamma' \cos \alpha' \cos \delta', \quad \gamma' \sin \alpha' \cos \delta', \quad \gamma' \sin \delta'$$

Del pari la celerità V dell'occhio si decomporrà in primo luogo, chiamando al solito φ l'angolo che essa fa coll'asse delle x , nelle due componenti $V \cos \varphi$, $V \sin \varphi$, la prima delle quali è diretta nel senso delle x , e la seconda lungo una perpendicolare alla linea stessa, ma nel piano dell'eclittica. Chiamando ora ϵ l'obliquità dell'eclittica, è chiaro che la componente $V \sin \varphi$, trovandosi compresa nel piano delle y , z , farà un angolo ϵ coll'asse delle y ; laonde potrà decomporosi nelle due componenti $V \sin \varphi \cos \epsilon$, $V \sin \varphi \sin \epsilon$, la prima delle quali sarà parallela all'asse delle y , e la seconda all'asse delle z . Così le tre componenti di V parallele agli assi delle x , y , z , saranno

$$V \cos \varphi, \quad V \sin \varphi \cos \epsilon, \quad V \sin \varphi \sin \epsilon.$$

Quindi essendo γ' risultante delle velocità V , γ , ed essendo le sue componenti parallele rispettivamente a quelle delle ultime, avremo le equazioni

$$\left. \begin{aligned} \gamma' \cos \alpha' \cos \delta' &= \gamma \cos \alpha \cos \delta + V \cos \varphi \\ \gamma' \sin \alpha' \cos \delta' &= \gamma \sin \alpha \cos \delta + V \sin \varphi \cos \epsilon \\ \gamma' \sin \delta' &= \gamma \sin \delta + V \sin \varphi \sin \epsilon \end{aligned} \right\} \dots (A')$$

Se dalla somma dei quadrati di queste tre equazioni si estrae la radice quadrata, e si trascurano le potenze di $\frac{V}{\gamma}$ superiori alla prima, si otterrà dopo le ritra volta indicate

$$\gamma' = \gamma \left(1 + \frac{V}{\gamma} (\cos \alpha \cos \delta \cos \varphi + \sin \alpha \cos \delta \sin \varphi \cos \epsilon + \sin \delta \sin \varphi \sin \epsilon) \right) \dots (B')$$

Sostituiscasi ora questo valore di γ' nella terza delle equazioni (A'), e con riduzioni

del tutto simili a quelle già praticate di sopra per trovare da un'equazione simile il valore di λ' si troverà

$$\delta' = \delta + \frac{V}{\gamma} \sin \varepsilon \cos \delta \sin \varphi - \frac{V}{\gamma} \sin \delta (\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi \cos \varepsilon).$$

Se adesso la quantità chiusa fra parentesi si moltiplichi e si divida per 2, ed al risultato si aggiunga e si sottragga $\frac{\sin \alpha \sin \varphi}{2} + \frac{\cos \alpha \cos \varphi \cos \varepsilon}{2}$, si avrà dopo le opportune riduzioni, ed osservando che $\frac{1 + \cos \alpha}{2} = \cos^2 \frac{1}{2} \alpha$, e che $\frac{1 - \cos \alpha}{2} = \sin^2 \frac{1}{2} \alpha$, la seguente espressione

$$\delta' = \delta + \frac{V}{\gamma} \sin \varepsilon \cos \delta \sin \varphi - \frac{V}{\gamma} \sin \delta \left(\cos^2 \frac{1}{2} \alpha \cos (\varphi - \varepsilon) + \sin^2 \frac{1}{2} \alpha \cos (\varphi + \varepsilon) \right) \dots (3)$$

Similmente se la seconda delle equazioni (Δ') dividasi per la prima, e si facciano i medesimi ragionamenti e le stesse riduzioni eseguite per ottenere il valore di ρ' si avrà

$$\rho' = \alpha + \frac{V}{\gamma} \sec \delta (\sin \varphi \cos \alpha \cos \varepsilon - \sin \alpha \cos \varphi);$$

e se anco in questa equazione la quantità chiusa in parentesi si moltiplichi e si divida per 2, ed al risultato si aggiunga e si sottragga $\frac{\sin \alpha \cos \varphi \cos \varepsilon}{2} + \frac{\sin \varphi \cos \alpha}{2}$, avremo dopo le necessarie riduzioni di sopra avvertite

$$\rho' = \alpha + \frac{V}{\gamma} \sec \delta \left(\cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon \sin (\varphi - \alpha) - \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \sin (\varphi + \alpha) \right) \dots (4)$$

Per eliminare l'angolo φ osservo che il confronto delle equazioni (1), e (2) precedentemente trovate con l'equazioni ($1''$), e ($2''$), qualora si ponga il coefficiente costante

$$\frac{U}{\gamma \sqrt{p}} = 20'',25 = n, \text{ dà}$$

$$\frac{V}{\gamma} \cos (\varphi - l) = n \sin (S - l) + ne \sin (p - l),$$

$$\frac{V}{\gamma} \sin (\varphi - l) = -n \cos (S - l) - ne \cos (p - l).$$

Ponendo in queste relazioni successivamente $l = 0, = \alpha, = -\alpha$, si formeranno i valori di $\frac{V}{\gamma} \cos \varphi$, $\frac{V}{\gamma} \sin \varphi$, $\frac{V}{\gamma} \cos (\varphi - \alpha)$, $\frac{V}{\gamma} \sin (\varphi - \alpha)$, $\frac{V}{\gamma} \cos (\varphi + \alpha)$, e $\frac{V}{\gamma} \sin (\varphi + \alpha)$, che sostituiti nelle equazioni (3), (4) danno

$$\begin{aligned} \delta' = & \delta - n \sin \varepsilon \cos \delta \cos S - n \sin \delta \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon \sin (S - \alpha) - n \sin \delta \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \sin (S + \alpha) \\ & - ne \sin \varepsilon \cos \delta \cos p - ne \sin \delta \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon \sin (p - \alpha) - ne \sin \delta \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \sin (p + \alpha) \dots (3') \end{aligned}$$

$$\alpha' = \alpha - [n \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon \cos(S - \alpha) - n \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \cos(S + \alpha)] \sec \delta$$

$$- [n e \cos^2 \frac{1}{2} \varepsilon \cos(p - \alpha) - n e \sin^2 \frac{1}{2} \varepsilon \cos(p + \alpha)] \sec \delta \dots (4')$$

Se ora s'introducano i valori di $\varepsilon = 23^\circ, 28'$, di $n = 20'', 25$, e di $e = 0,01678$ si avranno per il calcolo dell'aberrazione in declinazione ed ascensione retta delle stelle le seguenti equazioni

$$\delta' = \delta - 8'', 06 \cos S \left\{ \cos \delta - 19'', 41 \sin(S - \alpha) \right\} \sec \delta - 0'', 84 \sin(S + \alpha) \left\{ \sec \delta - 0, 01 \sin(p + \alpha) \right\} \sec \delta$$

$$- 0, 14 \cos p \left\{ \cos \delta - 0, 33 \sin(p - \alpha) \right\} \sec \delta - 0, 01 \sin(p + \alpha) \left\{ \sec \delta - 0, 01 \sin(p + \alpha) \right\} \sec \delta$$

$$\alpha' = \alpha - 19'', 41 \cos(S - \alpha) \left\{ \sec \delta - 0'', 33 \cos(p - \alpha) \right\} \sec \delta$$

$$+ 0, 84 \cos(S + \alpha) \left\{ \sec \delta - 0, 01 \cos(p + \alpha) \right\} \sec \delta$$

Il valore di δ' riferito di sopra porge un metodo pronto e facile per dedurre il valore di n dalle osservazioni fatte nel corso di un anno. Si sottragga dalle declinazioni osservate la precessione fra il principio dell'anno e l'epoca di ciascheduna; avendole così ricondotte alla media posizione, che ha luogo nel principio dell'anno si confronti la massima colla minima declinazione osservata. Sia δ'' la massima declinazione, δ' la minima. Calcolando a numeri il coefficiente di n per questi due istanti, il che si ottiene col sostituire nell'equazione (3') i valori di α , δ , ε , S , p , ed e ; e supponendo che si abbia $\delta'' = \delta + a''n$, $\delta' = \delta - a'n$ avremo

$$n = \frac{\delta'' - \delta'}{a'' + a'}$$

In tal modo hanno potuto gli astronomi con ogni precisione determinare n , che a Bradley risultò di $20''$, a Delambre di $20'', 253$, e ad altri in diversa quantità variando da $20'', 25$ a $20'', 7$. Ultimamente è stato determinato in $20'', 5$ dal sig Richardson, osservatore assistente al Reale Osservatorio di Greenwich, che lo ha dedotto da più di quattromila osservazioni, per cui ha ottenuto la medaglia d'oro della Società astronomica di Londra.

Convien qui avvertire che per ottenere n nella massima precisione debbono spogliarsi le declinazioni osservate dai movimenti periodici della nutazione, ed anche dai moti propri di ciascuna stella, se taluno siasene manifestato in una lunga serie di anni: in una parola conviene allontanare qualunque altro movimento, e non lasciare che quello dipendente dall'elemento da determinarsi. Le stelle che passano in vicinanza dello zenit sono da preferirsi, perché l'incertezza delle osservazioni dipendente dallo stato dell'atmosfera sparisce quasi del tutto.

ABERRAZIONE DEI PIANETI. L'aberrazione deve aver luogo pei pianeti come per le stelle fisse; e questo appunto ci vien confermato dalle osservazioni. Sebbene in questo caso l'aberrazione sia il risultato di tre movimenti diversi, pure è assai più facile a calcolarsi di quella delle stelle fisse.

Sia P (Tav. VII. fig. 3.) un pianeta che si muove con una celerità Pp in un tempo t , e sia PD la celerità di un raggio luminoso nello stesso tempo. Questo raggio, partecipando delle due celerità Pp e PD, arriverebbe per la diagonale PT alla terra, supponendo questa immobile in T; e l'osservatore situato nel punto T vedrebbe il pianeta in P, quando è giunto in p. Supponiamo ora che nel medesimo tempo t la terra si muova da M in T colla celerità TM, essa incontrerà il raggio luminoso in T, e la celerità PT del raggio, combinata con quella della terra TC = TM, produrrà una sensazione composta nella direzione della diagonale Tp' del parallelogrammo p'PTC, costruito sulle linee TC e PT

proporzionali alla celerità della terra e della luce. Così l'osservatore vedrà il pianeta in p' , e conseguentemente s'ingannerà dell'angolo $p'Tp$, che è eguale al moto geocentrico del pianeta, più il moto della terra, e che si chiama l'angolo di aberrazione del pianeta. Se il moto del pianeta procedesse nel senso stesso di quello della terra, invece della somma si avrebbe la differenza dei moti. In tutti i casi però l'aberrazione è eguale al moto relativo.

Si otterrebbe ancora un medesimo risultato riferendo al pianeta, in senso contrario, il moto della terra da M in T ; poichè, considerando la terra come immobile in T , e supponendo invece che il pianeta da p' vada in P , il moto totale p/p sarà l'aberrazione. Ma questo moto totale non è altro che il moto geocentrico del pianeta, vale a dire il suo moto apparente di traslazione intorno alla terra, che si figura immobile.

Sia dunque m il moto geocentrico di un pianeta in un minuto secondo di tempo, v la velocità della luce, cioè il tempo che essa impiega a giungere dal sole fino a noi, ed r la distanza del pianeta dalla terra, prendendosi per unità il raggio dell'orbita terrestre; rv sarà il tempo che la luce impiegherà ad arrivare dal pianeta alla terra, e conseguentemente mr il moto geocentrico del pianeta nel tempo rv . Avremo dunque

$$\text{aberrazione} = mr = mr(493''),$$

essendoci dato dall'osservazione $v = 8', 13'', 2$ di tempo, o $493''$ di grado. Possiamo dunque di qui dedurre:

1° Che l'aberrazione del pianeta è eguale al suo moto geocentrico nel tempo dal raggio luminoso impiegato a giungere dal pianeta fino alla terra:

2° Che per l'effetto dell'aberrazione il pianeta apparisce trasportato in senso contrario al suo moto geocentrico. In tal guisa, se è diretto, l'aberrazione togliesi dalla posizione media per avere la posizione apparente, il contrario accade se è retrogrado.

Secondochè pertanto m sarà il moto geocentrico in longitudine, in latitudine, in ascensione retta, o in declinazione, la formula trovata darà l'aberrazione in longitudine, in latitudine, in ascensione retta, o in declinazione.

Per gli sviluppi e per maggiori particolarità rimanderemo il Lettore al *Trattato d'astronomia* di l'elambre, Tom III, cap. XXX. Anco il sig. Biot ha trattato con somma chiarezza ed eleganza il caso dell'aberrazione dei pianeti e delle comete nel trattato di sopra citato vol. 3°, pag. 147, e segg. Le massime aberrazioni in longitudine dei pianeti sono le seguenti:

Urano	25'', 0
Saturno	27'', 0
Giove	29'', 8
Marte	37'', 8
Venere	43'', 2
Mercurio	59'', 0
La Luna	6'', 8

L'aberrazione varia tra zero e questi numeri. Quella del Sole è invariabile, essendo costantemente di $20'', 253$. L'aberrazione dei pianeti in latitudine è quasi insensibile, perchè pochissimo si allontanano dall'eclittica. La più grande, che è quella di Mercurio, è di circa $4'', 3$.

È facile il prevedere dietro il fin qui detto che il moto diurno della terra, o la sua rotazione sul suo asse in venticquattro ore deve esercitare un'influenza

sensibile nella posizione degli astri. Questo fenomeno infatti ha luogo, ed è ciò che dagli astronomi si chiama *aberrazione diurna*. Se si chiami pertanto V la celerità rotatoria di quel punto della terra in cui si trova l'occhio dell'osservatore, γ la celerità progressiva della luce, δ l'ascensione retta d'un astro, ϑ la sua declinazione, è chiaro che a questo caso si potranno applicare i medesimi ragionamenti che ci condussero a trovare l'aberrazione delle stelle fisse in longitudine e in latitudine, purché si cangi λ in δ , I in α , e la longitudine L della terra nell'ascensione retta del punto culminante, ossia di quel punto del cielo che passa pel meridiano in quell'istante, pel quale si cerca l'aberrazione diurna. Indicando adunque con θ l'ascensione retta del punto culminante, ossia il tempo siderale ridotto in gradi, che determina ad ogni istante la posizione dell'osservatore rapporto all'equinozio mobile di primavera, con α' l'ascensione retta apparen-

te dell'astro, con ϑ' la declinazione apparente, ed in luogo di $\frac{U}{V\rho}$ scrivendo γ , le equazioni (1'), (2'), qualora si consideri la terra come sferica, e per conseguenza nulla l'eccentricità e , si esageranno nelle appresso

$$\alpha' = \alpha + \frac{V}{\gamma \cos \delta} \cos(\theta - \alpha)$$

$$\vartheta' = \vartheta + \frac{V}{\gamma} \sin \delta \sin(\theta - \alpha)$$

Con queste formule si potrebbe senza difficoltà calcolare l'effetto dell'aberrazione diurna; siccome però il suo *maximum* non eccede i tre decimi di secondo, così nelle osservazioni anco le più delicate non se ne fa conto. Lo studioso però potrà consultare il Trattato citato di sopra del sig. Santini Vol. II n° 399, non meno che gli altri trattati di astronomia.

ABERRAZIONE (Optica). Dispersione dei raggi della luce, che partendo da un oggetto, e riflettendosi in uno specchio, o refrangendosi in una lente invece di andare a riunirsi in un punto solo si spandono in una piccola estensione, e formano in conseguenza un'immagine un poco confusa dell'oggetto.

Una lente od uno specchio si dicono perfetti quando tutti i raggi di luce che emanano da un oggetto vengono refratti o riflessi in un punto solo che dicesi fuoco. La difficoltà però di dare agli specchi e alle lenti la curva, che sarebbe necessaria a produrre quest'effetto, ha fatto adottare la forma sferica, la quale non fa altro che avvicinare i raggi della luce, senza peraltro riunirli in un punto unico. Allora, si ha una serie infinita di fuochi lungo l'asse, dove vanno successivamente a riunirsi, a guisa di altrettanti strati conici, i raggi riflessi o refratti da ciascun circolo concentrico dello specchio o della lente, e sebbene in tal caso, rigorosamente parlando, non vi sia fuoco, pure questo nome si dà a quel punto in cui si riunisce un maggior numero di raggi. Una tal diffusione di fuochi, prodotta dalla sfericità delle lenti o degli specchi, disperdendo la luce rende incerte ed offuscate le immagini, il qual difetto è conosciuto col nome di *aberrazione di sfericità*, ed è tanto più grande quanto maggiore è il numero dei gradi della superficie riflettente o refrangente. Sopra questa aberrazione, come ancora sui mezzi che sono stati proposti per correggerla possono vedersi i trattati particolari di ottica, e specialmente quello di Smith, del quale esistono due traduzioni francesi; l'una del P. Pezenas stampata in Avignone nel 1767, 2 Vol. in-8°, e l'altra di Duval-Leroy impressa in un vol. in 4° a Brest nello stesso anno, ambedue corredate di note pregevolissime.

La diversa refrangibilità dei diversi raggi colorati produce pure una diffusione di fuochi, che si conosce sotto il nome di *aberrazione di refrangibilità*. Si sa che un raggio di luce, proveniente dal sole, o da altro corpo luminoso, è composto di sette differenti colori o fasci colorati, che sono il violetto, l'indaco, il turchino, il verde, il giallo, l'arancio, e il rosso: la riunione di tutti produce il bianco. Questi fasci non si refrangono tutti egualmente passando per una lente: da ciò nasce che la luce soffre una decomposizione nel passaggio; il fascio violetto come il più refrangibile ha un fuoco più vicino alla lente, il rosso che è il meno refrangibile lo ha più lontano, gli altri lo hanno nello spazio intermedio nell'ordine in cui gli abbiamo enunziati. In un canocchiale di 27 piedi i fasci rossi si riuniscono in un fuoco che è distante quasi di un piede dal fuoco dei violetti. Una tale dispersione o diffusione di fuochi, che viene misurata dalla distanza angolare del raggio più refrangibile da quello che lo è meno, non produce nei punti di mezzo una colorazione sensibile nelle immagini, poichè la riunione dei diversi colori ricompone e ristabilisce la luce bianca scomposta dalla lente, ma sugli orli le altera e le deforma affatto contornandole con una specie d'iride. Di qui si vede che l'aberrazione di sfericità rende confuse le immagini, e l'aberrazione di refrangibilità vi aggiunge un'alterazione nei colori. Per correggere l'aberrazione di refrazione, detta da alcuni ancora *aberrazione cromatica* della greca parola *χρωμα*, colore, Eulero verso la metà del secolo decimottavo propose di fare delle lenti composte di sostanze dotate di un diverso potere refrattivo, e ciò condusse alla invenzione dei canocchiali acromatici. (Vedi ACROMATICO)

- * ABIB. Primo mese dell'anno ecclesiastico ebraico, ora più generalmente conosciuto col nome caldeo di Nisan. È di 30 giorni, e principia colla nuova luna più prossima all'equinozio di primavera, ossia al 21 di Marzo. Nell'anno 1838 principia il 27 Marzo. Vien prescritto nell'Esodo Cap. XII, vers. 2, che da questo mese, nel quale gli Ebrei uscirono dall'Egitto, cominci l'anno sacro, cioè quello che deve servire a regolare tutte le feste e solennità.

La sera del giorno quattordicesimo di questo mese comincia la gran festa di Pasqua secondo il precetto dell'Esodo Cap. XII, vers. 18: *Il primo mese ai quattordici del mese alla sera mangerete gli azzimi sino al dì vigesimo primo dello stesso mese alla sera*. Al tramontar del sole si uccide l'agnello pasquale, comincia l'uso del pane non fermentato, e cessa qualunque lavoro. Un covone di orzo veniva colto la sera del dì 15, e veniva offerto al Signore come la primizia della raccolta: il giorno successivo cominciava la mietitura. Nel giorno 21^o cessa l'uso del pane azzimo.

La commemorazione della morte di Giosué si osserva un digiuno nel dì 26 del mese, purchè però questo giorno non cada in Sabato, nel qual caso il digiuno si rimette al giorno seguente, ossia alla Domenica.

Il mese di Abib nell'anno civile degli Ebrei moderni non è più il primo dell'anno, ma il settimo, e negli anni intercalari l'ottavo, cominciandosi presentemente l'anno dal mese di Tisir. Abib non può mai principiare nè in Lunedì, nè in Mercoledì, nè in Venerdì, e tutte le volte che regolarmente il mese dovrebbe principiare con uno di questi giorni, si evita un tal caso coll'aggiungere o col togliere un giorno all'anno precedente.

La parola Abib significa *spiga*, e il mese ricevè senza dubbio un tal nome dalla stagione in cui esso cade, poichè in Egitto e in Palestina il grano è spigato in quel tempo.

Abib è pure il nome che i moderni Cristiani Cofti danno al loro mese, che comincia il 25 di Giugno. Il nome cofto è *Epi*.

- ** ABOUL-HASSAN (A.L.), astronomo arabo, viveva verso il principio del secolo XIII. Il sig. Sédillot ha fatto conoscere nel 1810 un'opera di questo autore

sull'astronomia degli Arabi. Da un libro dell'Albatenio si era raccolto, che, verso l'anno 900 dell'era nostra, gli Arabi sostituito avevano i seni alle corde, delle quali aveva fatto uso Tolomeo, e che sopra i principj di una proiezione quasi incognita ai Greci, si era così fondata una nuova trigonometria. L'Albatenio aveva altresì dato una qualche idea, vaga però ed imperfetta, delle nostre tangenti e i suoi seni erano espressi in parti sessagesimali, come le corde di Tolomeo. La parte della teoria degli Arabi, che rimaneva tuttora incognita, trovossi nell'opera di Aboul-Hassan intitolata *Dei principj e dei fini*, nella quale vedonsi descritti persino la teorica e l'uso degli stromenti astronomici, di cui Tolomeo si serviva. Questa descrizione lascia molto a desiderare; ma con chiarezza sufficiente, benchè senza dimostrazioni, sono esposti i metodi, che all'età sua adoperavansi per calcolare tutti i problemi dell'astronomia sferica; e la sua trigonometria è molto più semplice e più spedita che non quella dei Greci, e più compiuta di quella dell'Albatenio, benchè fondata sullo stesso principio. Questo libro, se non altro, riempie una lacuna importante nella storia dell'astronomia.

È stata pubblicata un'opera intitolata: *Aboul Hhassan, traité des instrumens astronomiques*, Parigi 1834-35, 2 vol. in-4°. Pare che questa sia la stessa della precedente; noi però non possiamo assicurarla non avendone cognizione se non per la citazione che ne fa il Prof. Guglielmo Libri nella sua opera: *Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*. Parigi 1838, vol. I. pag. 461.

- ** ABOUL-WAFFA (MOHAMMED-BEN-YANHA), ALBOUDDJANY celebre matematico ed astronomo, nacque a Bouzdjan nel 328 dell'egira (939 di Gesù Cristo). Nel 959 passò nell'Irac, ed assistito da parecchi astronomi vi fece delle osservazioni per corregger quelle della *Tavola verificata*, di cui si parla nel seguente articolo. L'opera che ne contiene il risultato si chiama *Zyjd-âl-chamil* cioè *Tavola che comprende*. Aboul-Waffa ha molto scritto sull'astronomia, e sull'aritmetica. Morì nel 998.

- ** ABOU-MANSOUR, astronomo arabo, il di cui nome è YANHA-BEN-ALY-BEN-ALY-MANSOUR, detto MOUNEDDIEM o l'ASTRONOMO. Nacque l'anno 241 dell'egira (855 di G. C.). L'estensione delle sue cognizioni gli acquistò grande reputazione; fu colmato di onori e di benefizj dai Califfi, sotto il regno dei quali visse, e particolarmente da Mamoun, nome che ricorda i più bei giorni della gloria degli Arabi. Questo principe fece Abou-Mansour capo degli astronomi che aveva raccolti. Fu questo dotto che diresse le osservazioni di Bagdad e di Damasco: quindi gli venne attribuita la *Tovola verificata* risultamento delle osservazioni fatte in quelle due città. Abou-Mansour non si occupò unicamente dell'astronomia, ma coltivò ancora la letteratura, e compose una *Raccolta di vite di poeti arabi*, che fu poi continuata da suo figlio.

ABRACALEO (*Astron.*). È uno dei nomi della seconda stella dei Gemelli indicata nei cataloghi colla lettera *β*. Viene pure chiamata *Polluce*.

- ABRAHAM-BEN-R-CHIJA o CHAJA soprannominato il *Principe*, rabbino spagnuolo, nato verso l'anno 1070, aveva cognizioni astronomiche e geografiche estesissime avuto riguardo al tempo in cui viveva. Fra quelle delle sue opere che si trovano nella biblioteca del Vaticano, e che interessano particolarmente la storia delle matematiche citeremo principalmente quella che fu pubblicata in ebraico con note marginali da Sebastiano Munster sotto il seguente titolo: *Sphœra mundi describens figuram terrae dispositionemque orbium coelestium et motus stellarum autore Rabi Abraham hispano filio R. Haijoe. Sebast. Munsterus quicquid difficile in hebraismo apud autorem istum invenitur explicatum est annotationibus nostris, ne librum nudum tibi lector tradere-mus. Bosileae, per Henrichum Petrum, 1546, in-8*. Questa edizione venne acc. *Diz. di Mot. Vol. I.*

compagnata da una traduzione latina di Oswald Schreckenfuchsio, e da una versione latina dello stesso traduttore di un trattato di aritmetica. Ecco il titolo che precede queste due traduzioni: *Sphaera mundi auctore Rabbi Abrahamo hispano filio R. Haijae, Arithmetica secundum omnes species suas in numeris integris et fractis auctore Rabbi Elija orientali cum exemplis conscripta, quos libros Oswaldus Schreckenfuchsius vertit in linguam latinam, Sebastianus Munsterus illustravit annotationibus. Basileae, per Henrichum Petrum, 1546 in-8°.*

Dobbiamo ancora ad Abraham-Ben-R-Chija un'altra opera, nella quale tratta dei Pianeti, delle due sfere e del Calendario dei Greci, dei Romani, e degli Ismaeliti; è pure autore di un Trattato di Geometria nel quale si applica alla spiegazione dei triangoli sferici, e alla conversione degli angoli e dei cerchi. Tutti questi scritti, che sono almeno il frutto di una prodigiosa erudizione, non sono oggi curiosi che a motivo del tempo nel quale vennero composti, e perchè possono servire a segnare il punto di partenza ed i progressi delle scienze matematiche durante il medio evo. Per altre notizie si può consultare il *De Rossi, Dizionario degli autori ebrei*. Parma 1802. 2 vol. in-8.

ABRAHAM ZACUTH. Vedi ZACUTH (ABRAHAM).

ABREU (GIOVANNI EMANUELE D') geometra portoghese, allievo e compagno di del celebre da-Cunha, nacque nel 1754. Coltivò con ardore le matematiche e vi fece rapidi progressi. Ritenuto per alcun tempo in prigione a causa delle sue opinioni religiose, abbandonò il servizio militare, al quale erasi in principio dedicato, per darsi tutto allo studio delle scienze. Fu eletto membro dell'accademia delle scienze, e professore di matematiche nell'accademia reale di marina, e nel collegio dei nobili. Divenuto infermo, ottenne il riposo, e andò in Francia, dove pubblicò la traduzione dei *principj matematici di Da-Cunha* preceduti da una notizia su quest'autore, Bordeaux 1806, un vol. in-8°. Quest'opera venne ristampata a Parigi nel 1816.

Ripatriato morì alle isole Azzore nel 1815. Durante la sua dimora in Francia pubblicò un *Supplimento alla traduzione di Euclide di Peyrard, pubblicata nel 1804, ed alla geometria di Legendre, con un Saggio sulla vera teoria delle parallele*, 1808 in-8°.

ABSIDI. Questa parola nell'astronomia fisica è meno usata del termine *Apsidi*; perciò rimandiamo il lettore a quest'ultima parola. Basterà qui il dire che gli absidi sono i due punti che nell'orbita di un pianeta determinano l'afelio e il perielio, cioè la sua massima e la sua minima distanza dal sole.

ACAMPTO (*Ottica*). Parola usata da Leibnitz per indicare quelle figure che non riflettono la luce, sembrano sieno opache e levigate, e per conseguenza dotate delle proprietà necessarie per operare questa riflessione. Nelle opere di Leibnitz Tomo III pag. 203 si può vedere la spiegazione di questo paradosso.

ACARNAR o ACHARNAR. È questo il nome arabo della bella stella di prima grandezza, che vedesi all'estremità dell'Eridano. Nei cataloghi vien segnata colla lettera α .

ACCADEMIA. Luogo amenissimo, ombreggiato da alberi, distante sei stadj (poco meno d'un miglio) dalla città di Atene. Questo luogo prese un tal nome da un certo Academo o Ecademo, ricco cittadino d'Atene, che ne era l'originario possessore, e che si racconta avervi fondato una scuola di esercizi ginnastici. Verso la metà del quinto secolo avanti l'era volgare questo sito venne in possesso di Cimone, generale ateniese, che vi aggiunse dei viali, lo adornò di statue e di fontane, e lo convertì in un luogo di ritiro, che alle bellezze della natura univa le più eleganti produzioni dell'arte. Alla sua morte egli lasciò al pubblico questo giardino che divenne il posto favorito di riunione per gli amanti

della filosofia e della meditazione. Ivi era solito Socrate ritirarsi a conversare coi suoi discepoli: ma fu il suo illustre scolare, Platone, che il primo diede celebrità all'accademia, fondandovi una scuola nella quale insegnò la filosofia, che dal suo autore fu detta platonica, e dal luogo accademica.

Dopo il risorgimento delle lettere nel decimoquinto secolo, la parola accademia tornò a rivivere in Italia, ma con un significato diverso da quello che aveva avuto nei tempi antichi. Essa fu usata per esprimere non una scuola in cui la filosofia era insegnata da un maestro ai suoi discepoli, ma una società d'individui formata per l'oggetto speciale di coltivare la dottrina o la scienza, e comunemente costituita e riconosciuta dal capo dello stato nel quale era stabilita; e questo è anche oggi il significato che ordinariamente si dà alla parola accademia. Ciò che ora si chiama accademia rassomiglia più a ciò che anticamente dicevasi Museo, nome dato, per esempio, alla celebre società di dotti fondata in Alessandria dal primo Tolomeo. Le accademie, che spesso si trovano indicate coi nomi di società, associazioni, musei, atenei, istituti ec., hanno grandemente contribuito ai progressi rapidi e sicuri, che nei tempi moderni hanno fatto le scienze fisiche e matematiche. Lungo sarebbe il fare una compiuta enumerazione di tutte le accademie, che in ogni ramo di scibile umano sono state fondate in varj tempi, e che in Italia specialmente si sono moltiplicate in un numero incredibile: chi desiderasse di averne qualche notizia potrà consultare il Quadrio, *Storia e ragione d'ogni poesia*, il Tiraboschi *Storia della letteratura italiana antica e moderna*, Ginguené, *Histoire littéraire d'Italie* ec. Noi ci contenteremo di rammentare le principali fra quelle che più particolarmente hanno fatto oggetto dei loro studj le scienze fisiche e matematiche, e che hanno pubblicato in collezioni di memorie i risultati delle loro ricerche.

In Italia, che fu la prima a dare l'esempio di accademie scientifiche e letterarie nella forma moderna, la prima accademia scientifica pare che sia quella che venne stabilita a Napoli nel 1560 col titolo di *Accademia Secretorum Naturae*. A questa, che fu di breve durata, successe l'altra detta dei *Lincei*, fondata in Roma nel 1603 dal principe Federigo Cesi, e di cui fu membro Galileo: questa pure si disciolse poco dopo la morte del suo fondatore avvenuta nel 1630. (a) Ma la più celebre di tutte, la più benemerita dei moderni avauzamenti delle scienze è l'antica accademia fiorentina del *Cimento*, che è stata il modello di tutte le altre che posteriormente si sono stabilite nelle varie parti d'Europa. Fu essa istituita nel 19 Giugno 1657 in Firenze per lo studio delle scienze fisiche dal principe (e poscia cardinale) Leopoldo dei Medici fratello del Granduca Ferdinando II, e furono membri della medesima gli uomini più illustri di quel tempo, il Redi, il Borelli, il Viviani, Magalotti ec. Col modesto titolo di *Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento* essa pubblicò in Firenze nel 1667 una raccolta preziosa d'importantissimi esperimenti ed osservazioni sulla pressione dell'aria, sulla compressibilità dell'acqua, sul caldo e sul freddo, sul suono, sui proiettili, sulla luce e sopra altri argomenti fisici; della qual raccolta in seguito Musschenbroek ne diede alla luce una traduzione latina con note. La stampa dei *Saggi* fu incominciata nel 1666, ma non ebbe il suo termine che nel 1667; perciò in alcuni esemplari si legge la prima data, mentre in altri nei quali è stata corretta si trova la seconda: ciò ha fatto sì che questa prima edizione vien citata ora coll'una, ed ora coll'altra data. L'accademia del *Cimento* a sommo danno delle scienze non sussistè che soli anni nove, e mesi otto e mezzo,

(a) D. Baldassarre Odescalchi ha pubblicato una storia molto particolarizzata di questa accademia col seguente titolo: *Memorie Storico-critiche dell'accademia dei Lincei, e del principe Federico Cesi*. Roma 1806 in-4.

avendo tenuto l'ultima adunanza nel 5 Marzo 1667. Chi desiderasse di avere particolarità preziose e interessanti sulla medesima potrà consultare il Nelli, *Saggio di storia letteraria fiorentina*, Lucca, 1759 in-4º, Tiraboschi *Storia letteraria ec. Lib. II cap. 2º § 35*, e sopra tutti il Dott. Giovanni Targioni Tozzetti *Notizie degli aggrandimenti delle scienze fisiche accaduti in Toscana ec.* Firenze 1780, Vol. I pag. 373, e segg. I *Saggi* furono ristampati dallo stesso sig. Targioni nell'ultimo volume dell'opera citata coll'aggiunta di parecchie altre esperienze inedite estratte dai manoscritti autografi dell'accademia.

L'accademia reale delle scienze e belle lettere di Napoli fu istituita nel 1778, ed ha pubblicato nei suoi atti importanti memorie sopra varj punti di matematiche. Esistono ancora accademie scientifiche a Padova, Milano, Siena, Verona, Genova ec., che tutte hanno pubblicato raccolte di memorie. L'accademia di Bologna fu in origine eretta nel 1690 da Eustachio Manfredi, in seguito insignito di astronomo, allora in età di soli sedici anni. I soci appellarono la loro istituzione: *Accademia degli Inquieti*, e presero il motto: *Mens agitat*. Nel 1714 quest'accademia venne unita all'Università o Istituto di Bologna, e da quel tempo assunse il nome di Accademia dell'Istituto, o Accademia Clementina, da Clemente XI sotto il di cui pontificato ebbe luogo una tal riunione. I suoi atti sono stati pubblicati fino dal 1731 col titolo di *Commentarii*. Aggiungeremo in fine l'Accademia Reale di Torino in Piemonte, che in origine non fu che una semplice privata società stabilita verso la metà del decorso secolo dal giovine Lagrange, che allora, sebbene non avesse compiuta l'età di venti anni, occupava il posto di professore di matematiche nella scuola reale di artiglieria di quella città. Il primo volume de' suoi atti venne pubblicato in latino nel 1759, e destò la maraviglia dei più profondi matematici per alcune memorie di somma originalità che portavano il nome di Lagrange fino allora non conosciuto. Gli Atti dell'accademia di Torino, che per qualche tempo continuarono ad essere arricchiti delle produzioni di quel sommo geometra, furono pubblicati in latino fino al 1784: da quell'epoca sono stati compilati in francese.

In Francia molte sono le accademie che vi hanno fiorito e che tuttora vi fioriscono: noi ci ristingeremo a parlare dell'Accademia Reale delle Scienze di Parigi. Questa fu eretta da Colbert nel 1666, ma fu interamente riorganizzata nel 1699; e dal momento della sua nuova costituzione le sue ricerche si limitarono alle sole scienze fisiche e matematiche. L'accademia delle scienze di Parigi cominciò a pubblicare i suoi atti fino dal 1666, ma non è che dal 1699 in poi che è venuto regolarmente ogni anno alla luce un volume fino alla soppressione dell'accademia nel 1793. Nel 1795 tutte le accademie che precedentemente si trovavano in Parigi vennero riunite sotto varie classi col nome d' *Istituto nazionale* per ordine del Direttorio. Questo stabilimento è andato soggetto successivamente a molte modificazioni; adesso però l'Istituto o Accademia Reale è composta di cinque grandi divisioni o classi: la prima, chiamata *Accademia delle scienze*, è composta di sessantacinque membri ordinarij, e di cento corrispondenti: la seconda, chiamata *Accademia francese*, è composta di quaranta membri: la terza, chiamata *Accademia delle iscrizioni e belle lettere*, è composta di quaranta membri ordinarij, e di sessanta corrispondenti, unitamente a otto membri associati: la quarta, chiamata *Accademia delle belle arti*, è composta di quarantun membro ordinario, e di trentasei corrispondenti, unitamente ad otto membri associati: e la quinta, chiamata *Accademia delle scienze morali e politiche*, è composta di trenta membri. Ciascuna classe si aduna una volta per settimana. I posti vacanti si conferiscono col mezzo dei voti dei membri; ma l'elezione è sottoposta all'approvazione del re: ognuno dei membri ordinarij ha una pensione di 1500 franchi l'anno. Fino dalla sua creazione l'Istituto

francese si è collocato nel primo posto fra tutte le dotte società d'Europa, di cui gli uomini più illustri sono stati compresi ordinariamente nella lista de' suoi membri.

Nel 1652 fu stabilita a Vienna dal medico Bausch la società detta *Academia Naturae Curiosorum*, ma essa fu una semplice istituzione privata, nè venne riconosciuta che nel 1670 dall'imperatore Leopoldo I, dal quale poi nel 1687 assunse il nome di *Academia Cesareo-Leopoldina*: onde con ragione possiamo asserire che la sua fondazione è posteriore d'assai a quella del *Cimento*. I suoi atti in principio furono pubblicati in separati trattati, ma dopo il 1684 comparvero in volumi col titolo di *Ephemerides et Acta Academiae Caesareae Naturae Curiosorum*. L'accademia di arti e scienze di Vienna fu eretta nel 1705.

L'accademia reale delle scienze e belle lettere di Berlino è stata per lungo tempo una delle più celebri fra le società dotte di Europa. Essa fu istituita nel 1700 da Federico I, che ne fece primo presidente il Leibnitz. Il primo volume de' suoi atti comparve nel 1710 col titolo di *Miscellanea Berolinensia*, il quale fu succeduto da altri volumi ad intervalli di tre o quattro anni sino all'avvenimento al trono di Federico il grande nel 1740, che, nel 1744, prese questa società sotto la sua speciale protezione, e le diede una nuova organizzazione per estendere la sua utilità, e per innalzarla ad un grado più alto di quello che per l'addietro aveva occupato. Fu fatto presidente Manpertuis, e l'accademia venne divisa in quattro classi, cioè: 1° fisica, 2° matematica, 3° filosofica, 4° storica e filologica. Le nomine si fanno mediante i voti dei membri da sottoporsi all'approvazione sovrana. Dal 1746 in poi comparve regolarmente ogni anno un volume di memorie che, per un lungo corso di anni furono scritte in francese, ma adesso si pubblicano in tedesco. Le antiche memorie si estendono fino al 1771, dopo questa epoca furono chiamate *Nouveaux Memoires* fino al 1787, dopo il quale anno cominciò una nuova serie.

Nel 1754 fu istituita ad Erfurt dall'Elettore di Mentz un'accademia per l'avanzamento delle scienze utili, i suoi atti furono in principio pubblicati in latino col titolo di *Acta academiae electoralis moguntinae scientiarum utilium*; al presente però si pubblicano in tedesco. A Gottinga, Monaco, Mannheim, e Tubinga esistono accademie scientifiche le di cui memorie sono molto stimate.

L'accademia reale delle scienze di Stockholm fu in origine una privata società fondata da Linneo e da pochi suoi amici nel 1739, nè fu riconosciuta dal Governo se non che due anni dopo. I suoi atti si pubblicano in fascicoli trimestrali, che ogni anno formano un volume in-8°. I primi quaranta volumi dal 1739 al 1779 si chiamano *Antiche Transazioni*; quelli che sono stati pubblicati dopo diconsi *Nuove Transazioni*. Sono scritti in svedese, ma sono stati ancora tradotti in tedesco. L'accademia mantiene un professore di filosofia sperimentale, che, unitamente a due segretarij, è stipendiato coi fondi che la società possiede per legati e donazioni fattele. Ancora a Copenhagen fu eretta nel 1742 dal conte d'Holstein un'accademia che gode di molta reputazione, e pubblica in danese i suoi atti.

L'accademia imperiale di Pietroburgo al pari di molte altre utili istituzioni di Russia riconosce la sua fondazione dalla mente ardita e intraprendente di Pietro il Grande. Questo monarca però non viase abbastanza per mandare ad effetto il piano che avea formato dietro l'idea suggeritagli dalle accademie osservate in Francia nel suo viaggio del 1717, e dietro i consigli di Cristiano Wolff e di Leibnitz. Ma immediatamente dopo la sua morte, nel 1725, Caterina I che gli successe procedè ad eseguire le intenzioni del suo defunto consorte: l'accademia fu tosto istituita, e tenne la sua prima adunanza nel dicembre di quell'anno. L'Imperatrice scelse alcuni dei più distinti matematici e filosofi stranieri di quel

tempo per illustrare e dar nome alla nuova istituzione, e gl'indusse con generosi stipendj ad accettarvi dei posti col titolo di professori. In questo numero furono Wolff, Niccolò e Daniele Bernoulli, Bulfinger ec. Questi professori sono quindici in tutti oltre un presidente e un direttore. Vi sono ancora quattro agiunti che suppliscono nel caso di mancanza di alcuno dei professori, e che intervengono alle adunanze ordinarie dell'accademia finattantochè con nuove nomine non sieno riempiti i posti vacanti. Nei primi tempi questa istituzione andò soggetta a qualche incertezza nella sua fama secondochè essa era protetta o trascurata dal sovrano regnante; ma dall'avvenimento al trono dell'Imperatrice Elisabetta che la collocò sopra base più larga e indipendente, ella ha conservato un'alta reputazione. La sua rendita annuale è considerevole, e così è stata in grado di poter rendere un importante servizio facendo esplorare varie parti dell'Impero russo per mezzo dei viaggiatori Pallas, Stolberg, Klaproth, ed altri che non occorre il qui rammentare. I suoi atti fino all'anno 1747 inclusive, formanti in tutto quattordici volumi, sono scritti in latino, e sono intitolati *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Altri venti volumi fino al 1777, scritti pure in latino, portano il titolo di *Novi Commentarii*. Dopo il 1777 hanno preso il nome di *Acta*, e sono scritti parte in latino e parte in francese. Si calcola che del numero totale delle memorie matematiche, che comparvero in questi atti fino al 1783, anno della sua morte, il celebre Eulero ne abbia scritto un'intera metà; ed inoltre egli lasciò circa un centinaio di memorie addizionali, che sono venute alla luce nei volumi stampati posteriormente. Queste memorie di Eulero contribuirono più di qualunque altra opera del suo tempo a semplificare e perfezionare la moderna analisi.

Esistono altre dote società in Europa oltre quelle di sopra menzionate, ma siccome esse portano il nome di *Società, Istituti* ec., così noi ne parleremo soltanto alla parola sotto la quale sono conosciute.

ACCELERATO (*Meccanica*). Moto *accelerato* dicesi quel moto che rievve ad ogni istante e nel tempo di tutta la sua durata un'accelerazione di velocità. Segue l'opposto nel moto *ritardato*, moto la di cui velocità diminuisce continuamente. In generale s'indieano tanto i moti *accelerati*, quanto i moti *ritardati* col nome comune di *moti varii*.

Nella teoria generale del moto, dopo il caso di una velocità costante che dà luogo al moto *uniforme*, il caso più semplice è quello di una velocità che cresce o decresce per gradi eguali. Il moto si dice allora *uniformemente vario*, e particolarmente *uniformemente accelerato*, allorchè la velocità aumenta, e *uniformemente ritardato*, quando la velocità diminuisce. Tutto quello che diremo sopra il moto uniformemente accelerato si applica egualmente, in un ordine inverso, al moto uniformemente ritardato.

La forza che produce un moto *uniformemente accelerato* è dunque una forza *acceleratrice costante*; vale a dire che essa agisce costantemente sopra il mobile nella stessa maniera, aumentando la sua velocità di una quantità eguale in tempi eguali in tutta la durata del moto. Per ben comprendere l'effetto di una tal forza, si deve concepire il tempo nel quale essa agisce come diviso in un'infinità d'intervalli eguali ed infinitamente piccoli, al principio di ciascuno dei quali la forza acceleratrice imprime al mobile un nuovo impulso. Allora, considerando il moto come uniforme nel tempo di ciascuno intervallo in particolare, il moto accelerato si comporrà di una serie di moti uniformi di una stessa durata infinitamente piccola, e di velocità differenti. Così, indicando per v la velocità del primo intervallo, le velocità seguenti formeranno la progressione aritmetica

$$2v, 3v, 4v, 5v, 6v, \dots, tv,$$

t indicando il numero totale degli intervalli ossia il tempo del moto. Chiamando dunque v la velocità *finale*, cioè la velocità acquistata nel tempo t , si avrà l'equazione

$$v = t\gamma \dots (a)$$

Ma in tutta la durata del moto uniforme, gli spazj percorsi dal medesimo mobile sono proporzionali alle velocità, e possono conseguentemente esser rappresentati queste velocità. Dunque lo spazio percorso in ciascun istante successivo infinitamente piccolo è eguale alla velocità di quell'istante, e la somma di tutti questi spazj ossia di tutte queste velocità è eguale allo spazio percorso nel tempo t . Indichiamo questo spazio per e , ed avremo

$$e = \varphi + 2\varphi + 3\varphi + 4\varphi + 5\varphi \dots + t\varphi.$$

Ora la somma dei termini del secondo membro di questa eguaglianza è $\frac{1}{2}(\varphi + t\varphi)t$, ovvero $\frac{1}{2}(\varphi + v)t$, a motivo di $t\varphi = v$ (*Vedi l'ACCESSIONI ARITMETICHE*). Abbiamo dunque

$$e = \frac{1}{2}(\varphi + v)t;$$

φ , rappresentando la velocità nel primo istante infinitamente piccolo, e una quantità infinitamente piccola, poichè il mobile era in riposo al principio di questo istante, essa deve dunque essere considerata come nulla rapporto a v (*Vedi CALCOLO DIFFERENZIALE*). Così togliendola si ha in fine

$$e = \frac{1}{2}vt \dots (b).$$

Le due equazioni (a) e (b) contengono tutta la teoria del moto *uniformemente accelerato*.

Risulta prima di tutto dall'equazione (b) un'importante considerazione. Se prendiamo il tempo t per l'unità di tempo, abbiamo $e = \frac{1}{2}v$; così lo spazio percorso nello prima unità di tempo, è lo metà della velocità acquistata alla fine di questo tempo. Ora, siccome si può prendere per unità quell'intervallo di tempo che si vorrà, si ha dunque questa proposizione generale: *Una forza acceleratrice costante comunica ad un mobile in un tempo qualunque una velocità doppio dello spazio che esso ha percorso in questo medesimo tempo*. Se dunque dopo un intervallo di tempo qualunque la forza acceleratrice cessasse di agire, ed il mobile continuasse a muoversi in una maniera uniforme con la velocità acquistata, questa velocità gli farebbe percorrere in un secondo intervallo, eguale al primo, uno spazio doppio di quello che esso ha percorso nel primo intervallo.

Se noi indichiamo adesso per v' un'altra velocità acquistata in un altro tempo t' , e per e' lo spazio percorso, avremo egualmente

$$v' = t'\gamma, \text{ ed } e' = \frac{1}{2}v't';$$

dalle due espressioni $v = t\gamma$ e $v' = t'\gamma$ si deduce la proporzione

$$v : v' :: t : t',$$

vale a dire che le velocità finali sono proporzionali ai tempi nei quali esse sono state acquistate.

Le due espressioni $e = \frac{1}{2}vt$ ed $e' = \frac{1}{2}v't'$ divengono $e = \frac{1}{2}vt^2$, ed $e' = \frac{1}{2}v't'^2$, sostituendo in luogo di v e di v' i loro valori $t\gamma$ e $t'\gamma$. Si ha dunque ancora l'altra proporzione

$$e : e' :: t^2 : t'^2,$$

e ciò indica che gli spazj percorsi stanno fra loro come i quadrati dei tempi.

Segue da quest'ultima proposizione che, se un corpo mosso con moto uniformemente accelerato percorre in un tempo dato uno spazio egualmente dato, esso percorrerà in un tempo doppio del primo uno spazio quadruplo; e generalmente se i tempi formano la progressione aritmetica

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots,$$

gli spazj percorsi saranno

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \dots$$

Ora, prendendo la differenza di ciascuno dei termini di quest'ultima serie con quello che lo precede, avremo gli spazj percorsi in ciascun istante in particolare. Queste differenze sono:

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \dots$$

Dunque gli spazj percorsi successivamente in porzioni eguali di tempo stanno fra loro come la serie dei numeri impari.

Così, conoscendo lo spazio g percorso nel primo secondo con un moto uniformemente accelerato, per trovare quello percorso nell'ottavo secondo in particolare, si stabilirebbe la proporzione.

$$1 : 15 :: g : x = 15g,$$

mentre per avere lo spazio totale percorso negli otto secondi, si stabilirebbe l'altra proporzione

$$1 : 8^2 :: g : x = 64g.$$

Tutte le deduzioni delle precedenti formule possono essere recapitolate come segue.

$$e : e' :: t^2 : t'^2,$$

$$e : e' :: v^2 : v'^2,$$

$$v : v' :: \sqrt{e} : \sqrt{e'},$$

$$t : t' :: \sqrt{e} : \sqrt{e'},$$

$$e : e' :: vt : v't',$$

$$t : t' :: \frac{e}{v} : \frac{e'}{v'},$$

$$t : t' :: ev' : e'v.$$

Dietro quello che abbiain detto, prendendo il secondo per unità di tempo, basta conoscere la quantità g ossia lo spazio percorso nel primo secondo del tempo da un moto uniformemente accelerato, per potere con l'aiuto delle precedenti formule calcolare tutte le circostanze di questo moto. È dunque importante di fare entrare nelle formule questa quantità costante g , onde renderle immediatamente applicabili ai casi particolari. Ora abbiamo in generale, $e : e' :: t^2 : t'^2$, e per conseguenza $e : g :: t^2 : 1$, ciò che somministra

$$e = gt^2 \dots \dots (m)$$

Ma g essendo lo spazio percorso nel primo secondo, la velocità finale al termine di questo secondo sarà ag , e conseguentemente la velocità finale, dopo il tempo t sarà

$$v = agt \dots \dots (n)$$

t esprimendo un numero di secondi.

Dalle due equazioni (m) ed (n) si ricavano i seguenti teoremi pratici, i quali abbracciano tutte le questioni che possono proporsi sopra il moto uniformemente accelerato:

$$\begin{array}{lll}
 1 \dots t = \frac{v}{2g} & 5 \dots t = \frac{2e}{v} & 9 \dots t = \sqrt{\frac{e}{g}} \\
 2 \dots v = 2gt & 6 \dots v = 2\sqrt{eg} & 10 \dots v = \frac{2e}{t} \\
 3 \dots e = gt^2 & 7 \dots e = \frac{v^2}{1g} & 11 \dots e = \frac{tv}{2} \\
 4 \dots g = \frac{e}{t^2} & 8 \dots g = \frac{v}{2t} & 12 \dots g = \frac{v^2}{4e}
 \end{array}$$

La caduta dei corpi pesanti nel vuoto ci dà l'esempio di un moto uniformemente accelerato; mentre l'esperienza ha dimostrato che gli spazi che essi percorrono sono proporzionali ai quadrati dei tempi, e che le velocità che essi acquistano sono semplicemente proporzionali ai tempi. La gravità è dunque, come lo scoprì Galileo, una forza acceleratrice costante, e conoscendo solamente lo spazio percorso da un corpo nel primo secondo della sua caduta, si potranno determinare con esattezza tutte le particolarità del moto di questo corpo. Dobbiamo tuttavia fare osservare che la gravità non è una forza costante che per le cadute di una mediocre altezza; mentre rigorosamente essa varia in ragione inversa dei quadrati delle distanze dal centro della terra. (*Vedi Attrazione*). Ma quando l'altezza dalla quale un corpo cade è poco sensibile rapporto al raggio della terra, si può allora supporre, senza errore, come lo vedremo in seguito, che la gravità sia costante.

Esperienze, fatte con un'esattezza estrema (*Vedi PENDOLO*), hanno dimostrato che lo spazio percorso nel primo secondo da un corpo che cade liberamente, in virtù della sola gravità, varia con la latitudine dei luoghi, e che esso è lo stesso per tutti i corpi, sotto una medesima latitudine. A Parigi, questo spazio è eguale a metri 4,9044. Abbiamo dunque per Parigi $g = 4^m.9044$; e con l'aiuto di questo numero, possiamo risolvere tutti i problemi relativi alla caduta dei corpi. In tutto ciò che segue facciamo astrazione dalla resistenza dell'aria, ovvero, ciò che equivale allo stesso, consideriamo i moti come se avessero luogo nel vuoto.

1° PROBLEMA. Quale spazio ha percorso un mobile in una caduta di 10 secondi, e qual'è la sua velocità finale? Qui abbiamo $t = 10$, dunque (3), $e = 10^2 \times 4,9044 = 490,44$. Lo spazio percorso nella caduta è dunque di $490^m.44$. Egualmente (2), $v = 2 \cdot 10 \cdot 4,9044 = 98^m,088$, ultima velocità acquistata.

11° PROB. Qual numero di secondi impiegherà un corpo per cadere da un'altezza di 400 metri? Qui abbiamo $e = 400$, e la formula (9) ci dà

$$t = \sqrt{\frac{400}{4,9044}} = 9 \text{ secondi in circa.}$$

III° PROB. Quanto tempo un corpo deve impiegare cadendo per acquistare una velocità finale di 100 metri per secondo?

Abbiamo $v = 100$, e la formula (1) ci dà

$$t = \frac{100}{2 \cdot 4,9044} = 10 \text{ secondi, e } \frac{2}{10} \text{ in circa.}$$

IV. PROB. Trovare l'altezza dalla quale un corpo deve cadere per acquistare una velocità finale di 100 metri per secondo.

Facendo $v = 100$ nella formula (7) essa dà

$$e = \frac{100^2}{4 \cdot 9.8044} = 509^m, 7464.$$

Questo problema si presenta spesso nella meccanica.

L'azione della gravità sopra un corpo è indipendente dalla velocità che potrebbe comunicarglisi lanciandolo dall'alto in basso con una forza qualunque; poichè il suo effetto essendo semplicemente quello d'imprimere al corpo velocità eguali in tutti i momenti del moto, quantunque il corpo in questi differenti momenti sia animato da velocità differenti, egli è evidente che questa azione non dipende dalla grandezza della velocità del mobile, e che indicando per a la velocità comunicata al mobile da una forza qualunque, al momento della sua caduta, la velocità finale sarà $a + gt$, e lo spazio percorso $at + gt^2$, avendo così agito sopra il mobile tutte e due nel medesimo tempo le forze d'impulsione e di gravità, come se ciascuna di esse in particolare fosse sola. Ora è naturale il supporre che una simile cosa deve succedere in senso inverso, vale a dire che in un corpo lanciato verticalmente dal basso in alto la gravità deve diminuire continuamente la velocità in quei medesimi gradi che essa l'aumenterebbe nel tempo della caduta del corpo, vale a dire che se s'indica per a la velocità iniziale del corpo, la sua velocità alla fine del primo secondo sarà $a - g$, alla fine del secondo $a - 2g$, alla fine del terzo $a - 3g$. Questo è quello che infatti l'esperienza conferma: così basta rendere g negativo nelle due espressioni precedenti per ottenere il moto di un corpo pesante lanciato di basso in alto con una velocità iniziale a , si ha dunque

$$v = a - gt, \text{ ed } e = at - gt^2,$$

g essendo sempre eguale a $4^m, 9044$ per la latitudine di Parigi.

Il corpo si eleverà fino a tanto che la velocità iniziale impressagli non sia stata totalmente distrutta dalla forza continua della gravità, ed in questo momento dovrebbe fermarsi e rimanere immobile se cessasse di agire la forza di gravità; siccome però questa persevera, così il corpo comincerà allora a discendere: se noi indichiamo per h la massima altezza alla quale esso possa arrivare, e per θ il tempo che deve impiegare per arrivarvi, avremo

$$0 = a - g\theta, \quad h = a\theta - g\theta^2,$$

donde si ricava

$$\theta = \frac{a}{g}, \quad h = \frac{a^2}{2g};$$

giunto a questa altezza h , il corpo cadrà di nuovo verso la terra riacquistando successivamente, per l'effetto della sua gravità, tutti i gradi di velocità che esso aveva perduti nel salire; poichè la sua velocità finale cadendo dall'altezza h

sarà (6), $2\sqrt{gh} = 2\sqrt{\frac{ga^2}{2g}} = \sqrt{a^2} = a$. Donde si conclude che per elevare un

corpo ad un'altezza data, è necessario imprimergli una velocità eguale a quella che esso acquisterebbe cadendo da questa altezza.

Così, prendendo i medesimi dati del problema I, se un corpo fosse lanciato di basso in alto con una velocità iniziale di $98^m, 088$ per secondo, esso si elevereb-

be ad un' altezza di 490^m44, e quando fosse ricaduto da questa altezza, la sua velocità finale sarebbe ritornata eguale a 98,088.

Passiamo adesso ai moti dei corpi i quali scorrono sopra piani inclinati (*Vedi PIANO INCLINATO*). La gravità si scompone allora in due forze, l'una perpendicolare, e l'altra parallela al piano; la prima è distrutta, ed è la seconda sola che produce il moto. Per ben comprendere la natura di questo moto, bisogna partirsì dal principio che le velocità comunicate in tempi eguali, ad un medesimo corpo, da forze diverse stanno fra loro come le intensità di queste forze. In virtù di questo principio, se la forza che agisce parallelamente al piano fosse la metà della forza assoluta della gravità, la velocità che essa imprimerebbe in un tempo qualunque sarebbe la metà della velocità che imprimerebbe la gravità nel medesimo tempo. Così il moto lungo un piano inclinato sarà uniformemente accelerato, e lo spazio percorso nel primo secondo sarebbe eguale a $\frac{1}{2}g$ nel nostro caso.

Generalmente, per un piano inclinato qualunque di cui l'altezza sia h e la lunghezza l , la forza parallela attiva stando alla forza assoluta nel rapporto di

h ad l , la velocità nel primo secondo sarà $g\frac{h}{l}$; sostituendo dunque questa quan-

tità in luogo di g nelle equazioni precedenti, si avranno le equazioni di un moto accelerato sopra un piano inclinato. Troveremo in questa maniera le tre equazioni fondamentali.

$$e = \frac{gh}{l}t^2, \quad v = \frac{2gh}{l}t, \quad v = 2\sqrt{\frac{ghe}{l}}.$$

Risultano da queste equazioni diverse particolarità importanti che noi non dobbiamo trascurare di far conoscere.

Facendo in esse $e = l$, supponendo cioè che sia stata percorsa l'intera lunghezza del piano inclinato, troviamo

$$t = \sqrt{\frac{l^2}{gh}}$$

per l'espressione del tempo impiegato dal mobile, e

$$v = 2\sqrt{gh}$$

per l'espressione della velocità finale al termine della discesa.

Questo valore di v ci fa conoscere che la velocità acquistata allorchè il corpo ha percorso tutta la lunghezza del piano inclinato, è la stessa che se esso fosse caduto verticalmente dall'altezza del piano. Se si avesse dunque un seguito di rette (*Tav. VIII. fig. 4.*) AB, AC, AD, AE, le quali partissero tutte da uno stesso punto A, e andassero a terminare ad un medesimo piano orizzontale, i mobili i quali scorressero sopra queste rette, partendo insieme dal punto A, acquisterebbero tutti velocità finali eguali arrivando al piano orizzontale.

Risulta dal valore di t , che tutte le corde AB', AB'', AB''', ec. (*Tav. VIII. fig. 3.*), le quali partono da un'estremità A di un diametro verticale AB, in un circolo qualunque, saranno descritte nel medesimo tempo da corpi pesanti i quali partissero nel medesimo istante dal punto A. Poichè, supponendo che l sia la lunghezza della corda AB', abbassando dal punto B' la perpendicolare B'C sopra il diametro, AC sarà l'altezza h del piano inclinato AB'; indicando dunque il diametro AB per d , abbiamo nel triangolo rettangolo AB'B (*Vedi Circolo*),

$$AB'^2 = AB \times AC, \text{ ossia } l^2 = dh.$$

Sostituendo questo valore di t^2 in quello di t di sopra trovato, si ottiene

$$t = \sqrt{\frac{d}{g}},$$

espressione che è indipendente dalla corda AB' , e che conviene egualmente a tutte le altre. Ma $\sqrt{\frac{d}{g}}$ esprime il tempo della caduta per il diametro AB ; dunque in un circolo tutte le corde sono percorse nello stesso tempo che percorsa verrebbe l'intera lunghezza del diametro verticale.

Moto variabile accelerato. Quando una forza acceleratrice varia nel tempo che essa agisce sopra il mobile, la velocità acquistata in ciascuna unità di tempo varia egualmente, e il moto prodotto non è più uniformemente accelerato. Nei corpi pesanti che cadono da una grande altezza, la variazione della gravità prodotta dal loro avvicinamento al centro della terra, ci offre l'esempio di un simile moto; l'attrito e la resistenza dei fluidi ci presentano ancora altri esempj di moti varii. Qualunque sia la natura del moto vario, lo spazio percorso, la velocità acquistata a ciascuno istante, e la forza acceleratrice sono tre funzioni del tempo legate fra loro per mezzo di leggi.

Rappresentiamo, come abbiamo fatto di sopra, il tempo per t , lo spazio percorso per e , la velocità acquistata per v , e la forza acceleratrice per φ . Ciò posto se si suppone che il tempo t cresca di una quantità infinitamente piccola dt (dt è ciò che si chiama la differenziale di t), lo spazio percorso crescerà di una quantità corrispondente de ; ma siccome possiamo supporre che, per percorrere questo spazio, il mobile non sia stato animato che dalla velocità v , che esso aveva al principio di dt , così avremo $de = vdt$, donde si trae

$$v = \frac{de}{dt} \dots (v),$$

prima equazione fondamentale.

Per poter misurare la forza che abbiamo indicato per φ , è necessario paragonarla con una forza acceleratrice uniforme, e conseguentemente bisogna prendere le velocità prodotte in intervalli di tempo infinitamente piccoli, onde si possa considerare l'intensità di queste forze come costante in quest'istanti. Sia dunque f una forza acceleratrice uniforme, la quale comunichi al mobile una velocità v' nell'unità di tempo, $v'dt$ sarà la velocità dovuta a questa forza nell'istante dt ; ma nel medesimo istante dt , la forza φ produce una velocità dv , poichè essendo v la velocità del mobile alla fine del tempo t , e $v+dv$ alla fine del tempo $t+dt$, dv è la velocità prodotta nel tempo dt . Avremo dunque

$$\varphi : f :: dv : v'dt,$$

donde

$$\varphi = \frac{f}{v'} \frac{dv}{dt}$$

Si semplifica quest'espressione supponendo che f sia l'unità di forza, e v' l'unità lineare; prendendo cioè per unità di forza quella la quale produce nell'unità di tempo una velocità eguale all'unità di lunghezza. Con questa considerazione il valore di φ diviene

$$\varphi = \frac{dv}{dt}.$$

Ma differenziando l'equazione (y), abbiamo $dv = \frac{d^2e}{dt}$; e sostituendo questo valore di dv in quello di φ , esso diviene

$$\varphi = \frac{d^2v}{dt^2} \dots (z),$$

seconda equazione fondamentale.

Prendendo la gravità per l'unità di forza, e il secondo per l'unità di tempo, l'unità lineare sarà eguale a $9^m,8088$, ossia al doppio della quantità che abbiamo indicato di sopra per g . Esprimendo dunque, per mezzo di queste unità, il tempo e le quantità lineari le quali entrano nelle due equazioni (y) e (z), queste equazioni ci faranno conoscere, integrandole, i rapporti delle quantità date con l'incognite dei problemi che possono venir proposti sopra il moto vario.

Ci contenteremo qui di un'applicazione importante, quella cioè di determinare il moto di un corpo che cada verticalmente nel vuoto, avendo riguardo alla variazione della gravità.

Siano r il raggio della terra, $2g$ la gravità alla sua superficie, d la distanza del mobile dal centro della terra nell'istante in cui comincia il moto.

Allorchè il corpo avrà percorso cadendo uno spazio e , la sua distanza dal centro sarà $d-e$; per conseguenza la sua gravità, ossia la forza acceleratrice che agisce sopra lui, sarà data dalla proporzione

$$\varphi : 2g :: r^2 : (d-e)^2,$$

essendo l'azione della gravità in ragione inversa del quadrato della distanza (*Vedi ATTRAZIONE*).

Si ricava da questa proporzione

$$\varphi = \frac{2gr^2}{(d-e)^2}$$

Sostituendo questo valore di φ nell'equazione (z), essa dà per l'equazione del moto cercato

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{2gr^2}{(d-e)^2}$$

Integrando questa equazione, e risolvendola successivamente per rapporto a v ed a t , si ottengono le due espressioni

$$v = 2r \sqrt{\frac{eg}{d(d-e)}}$$

$$t = \frac{1}{2r} \sqrt{\frac{d}{g}} \left[\sqrt{(de-e^2)} + \frac{d}{2} \arccos \left(\frac{d-2e}{d} \right) \right],$$

le quali abbracciano il problema sotto tutti i suoi aspetti.

Quando il mobile cade da una piccola altezza, e è piccolissima rapporto a d , e d non differisce che pochissimo da r ; allora la prima espressione si riduce a

$$v = 2\sqrt{eg}.$$

Quanto alla seconda, osservando che l'arco che ha per coseno la quantità $\frac{d-2e}{d}$ è eguale all'arco che ha per seno la quantità $2\sqrt{\frac{de-e^2}{d^2}}$, e che il seno di

$\sqrt{\frac{de - e^2}{d^2}}$, essendo piccolissimo, può essere confuso col suo arco, essa si riduce, trascurando e^2 , piccolissimo rapporto a de , a

$$t = \frac{1}{2r} \cdot \sqrt{\frac{r}{g}} \cdot 2\sqrt{re} = \sqrt{\frac{e}{g}}.$$

Questi valori di v e di t sono i medesimi di quelli dedotti qui sopra per il moto uniformemente accelerato. Si può dunque, come abbiamo già detto, considerare la gravità come una forza acceleratrice costante.

Le due equazioni fondamentali (y), e (z), si applicano egualmente al caso del moto variabile ritardato, come lo vedremo a suo luogo.

ACCELERAZIONE (Meccanica). Aumento di velocità che riceve un corpo in moto. È l'opposto di **RETARDAMENTO** che significa *diminuzione di velocità*. Un corpo che cade liberamente, in forza soltanto del suo peso, acquista ad ogn'istante della sua caduta un' *accelerazione* di velocità (*Vedi* **ACCELERATO**). Al contrario un corpo lanciato di basso in alto da una forza qualunque, soffre, in forza del proprio peso, un *ritardamento* di velocità, e la resistenza dell'aria modifica ancora la curva che esso descriverebbe se fosse stato lanciato nel vuoto (*Vedi* **PROIETTILE**).

ACCELERAZIONE DELLA CADUTA DEI CORPI (Storia). Aumento di velocità che un corpo acquista nel tempo della sua discesa cadendo liberamente, e per effetto del solo suo peso.

Questa parte importante della fisica matematica è stata lungo tempo regolata da teorie che, appoggiate unicamente all'illusione dei sensi, e consacrate da antiche dottrine filosofiche, hanno finalmente dovuto cedere alle dimostrazioni della scienza. Le proprietà reali del moto erano ancora sconosciute verso la fine del secolo decimo sesto. I più profondi matematici di quella grand'epoca, alla quale d'altronde dobbiamo i germi delle più belle scoperte dello spirito umano, limitavano le loro ricerche e i loro lavori in meccanica a semplici commentarii sul libro conservato da Aristotile a questo ramo di matematiche, e intitolato: *Questioni meccaniche*. Quest'opera è oggi apprezzata al suo giusto valore, e le idee ingegnose che contiene sono lungi dal costituire quelle verità indistruttibili, che la scienza moderna ha loro sostituito.

A un'epoca ancora recente, in cui la dottrina del filosofo di Stagira sul moto era generalmente adottata dai fisici e dai matematici, non si sospettava nemmeno che qualunque moto, essendo di natura sua rettilineo, dovesse necessariamente continuare in perpetuo nella stessa direzione qualora non vi si opponesse nessun ostacolo. Si credeva al contrario che esistessero due specie di moti, i *circolari* ed i *rettilinei*, e che i primi fossero *naturali* ed i secondi *violenti*. Così, nell'applicazione di questo sistema, si stabiliva come principio che gli astri si movevano in orbite circolari, in virtù di leggi che erano dell'essenza stessa di questi corpi, e che il moto rettilineo era il risultato di un impulso dato ai corpi da una forza motrice diametralmente opposta alla loro natura. Sotto quest'ultimo punto di vista si pensava dunque, per esempio, che una pietra lanciata nello spazio non poteva muoversi che in virtù dell'applicazione continua della forza estranea, ossia in virtù della perseveranza dell'impulso che aveva dato origine al suo moto. Siccome però il primo moto della pietra si prolunga ancora molto tempo dopo che essa è stata lanciata, e per conseguenza senza l'applicazione continuata dello stesso impulso, esperienza che tutto ci abbiamo sotto gli occhi, così si rendeva indispensabile lo spiegare questa contraddizione manifesta tra la teoria ed il fatto. Si soleva ancora rispondere con Aristotile, che aveva preve-

duto l'obiezione, che l'aria, dalla quale il corpo è circondato, continua a fargli proseguire l'impulso primitivo che esso ha ricevuto.

La certezza di queste spiegazioni vaghe ed imperfette del moto in generale, le quali si applicavano allora in gran parte alla teoria dell'accelerazione dei gravi, era ben lungi dall'esser posta in dubbio, quando l'illustre Galileo scoprì le vere leggi di questo fenomeno. A Pisa, dove studiava allora la filosofia, cominciò egli a sostenere tesi contrarie alle dottrine de' suoi maestri. Per combattere quelle che erano adottate intorno alla proprietà del vuoto, dovè primieramente stabilire in principio che non vi era che pochissima differenza nel tempo della caduta dei gravi di un peso disegualissimo, quando la materia dei corpi era di una densità poco differente, e che la loro velocità sarebbe stata esattamente la stessa nel vuoto. Galileo deduceva da questo principio la giusta conseguenza, che la velocità della caduta non era proporzionale al peso, come avrebbe dovuto esserlo in forza di un preteso assioma della scuola peripatetica.

Galileo stabiliva la dimostrazione di questo principio sopra un ragionamento di una mirabile semplicità, e che noi qui riproduciamo come il più atto a dare un'idea adeguata della questione che allora si discuteva. Si lasci cadere, diceva egli, da una parte un'oncia di piombo, e dall'altra dieci once separate della stessa materia, ma semplicemente collocate l'una sull'altra: si vedrà che da ambedue le parti la velocità sarà eguale. Così, sia che le dieci once di piombo formino una massa compatta, sia che esse formino dieci masse debolmente aderenti, non vi è ragione nessuna per dire che la loro aderenza influisca punto sulla loro accelerazione, poichè, di loro natura, ognuna di queste masse cade con una velocità eguale, ed il peso della prima nulla aggiunge a quello della seconda, il peso della seconda a quello della terza, e così in seguito. È dunque impossibile che dieci libbre o dieci once di piombo cadano più velocemente le une delle altre, e che per conseguenza dieci once cadano più velocemente di una sola.

Dobbiamo nulladimeno osservare che se è vero l'asserire che tutti i corpi cadono con una medesima velocità, ciò deve sempre intendersi prescindendo dalla resistenza del mezzo nel quale essi si muovono: poichè la resistenza che oppone l'aria alla caduta dei corpi leggeri è molto maggiore di quella che essa presenta ai corpi gravi. Ma nel vuoto, supponendo cioè la privazione completa dell'aria, tutti i corpi cadono con una eguale velocità, qualunque sia la diversità del loro peso, il piombo come la piuma. Le esperienze fatte per mezzo della macchina pneumatica non lasciano dubbio su questo rapporto; ma Galileo dovea prima di tutto provare con un fatto palpabile l'esattezza del ragionamento precedente.

Quest'esperienza fu fatta a Pisa, in presenza di un numeroso concorso di dotti e di cittadini, ed il suo risultato confermò pienamente la nuova teoria dell'ardito scolare, che liberava la scienza e la ragione dagli errori di Aristotile. Senza dubbio avanti quell'epoca si era potuto facilmente osservare che l'accelerazione nella caduta di un corpo grave, la di cui massa non prova né alterazione né ostacolo, andava aumentando a misura della distanza che esso percorreva nel cadere, poichè il suo urto è tanto più forte quanto questa distanza è più grande. Ma la legge stessa di questa accelerazione era ancora un mistero, e Galileo scoprì appunto questa legge, determinando che l'accrescimento della velocità segue il rapporto del tempo, vale a dire che dopo un tempo doppio la velocità è doppia, tripla dopo un tempo triplo, ec.

In principio Galileo fu obbligato a supporre questa legge di accelerazione; quindi ne cercò le proprietà, ed avendo provato coll'esperienza che essa conveniva perfettamente alla caduta dei corpi gravi, concluse che questa legge era quella della natura. Dimostrò dunque che nei tempi 1, 2, 3, 4, gli spazi percorsi sono 1, 3, 5, 7, e che presi tutti insieme dal principio della caduta, essi

stanno fra loro come i quadrati dei tempi. Quindi prese una lunga trave, nella quale fece scavare un canale, ed avendola inclinata in modo che la lentezza del mobile gli permettesse di paragonare il tempo collo spazio percorso, trovò sempre che in un tempo doppio lo spazio era quadruplo, in un tempo triplo nove volte maggiore, ec. Finalmente, per formarsi un'idea più precisa dell'accelerazione del moto, immaginò dei piani inclinati per mezzo di linee condotte dalle estremità del diametro di un circolo, e rappresentò la direzione perpendicolare col diametro stesso. Sebbene tutte queste linee fossero diseguali dimostrò che il mobile avrebbe percorso ognuna di esse nel tempo stesso che avrebbe impiegato a percorrere il diametro.

La legge di accelerazione, così determinata da Galileo, divenne ben presto fertile di deduzioni importanti. Tale appunto è il carattere delle grandi scoperte: esse in principio colpiscono per la loro estrema semplicità, e per la facilità colla quale sono accessibili a tutte le intelligenze, e divengono in seguito una sorgente inesauribile di progressi nella loro applicazione a tutte le parti della scienza alla quale si riferiscono. Lo stesso Galileo si servì della sua teoria per analizzare la natura della curva descritta dai corpi lanciati obliquamente, e con questo mezzo spiegò il cammino parabolico dei proiettili. Questa applicazione della recente legge dell'accelerazione era essa stessa una scoperta, che determinò una rivoluzione completa nelle teorie dell'artiglieria, e sopra tutto nell'uso delle sue macchine nell'assedio delle piazze: per tal modo le cognizioni di questa parte sì importante dell'arte militare sono divenute del dominio delle scienze matematiche. Per una conseguenza logica della sua scoperta principale, Galileo fu pure condotto ad occuparsi del moto dei pendoli. Se, sotto quest'ultimo rapporto, le sue dimostrazioni non furono egualmente decisive, nonostante è dovuta a quell'uomo sommo l'idea prima della teoria, per mezzo della quale si misura oggi il tempo con una precisione sì meravigliosa.

Non possiamo dar luogo in quest'articolo alle diverse applicazioni della legge generale di accelerazione, dovendo ognuna di esse esser descritta con tutta l'estensione che richiede la sua importanza scientifica alla parola speciale sotto la quale viene essa indicata; onde dobbiamo limitarci a terminare in brevi parole la storia della scoperta di Galileo.

La certezza e l'evidenza della nuova teoria proposta da questo gran matematico destò ammirazione e sorpresa: ma non lasciò d'incontrare vivissime opposizioni, e di sollevare contro di lui l'odio impotente di coloro che si spaventano di tutti i progressi. La legge dell'accelerazione non poteva sfuggire a questo destino delle verità nuove: essa servì di testo, per molti anni, ad una polemica viva e non scevra dallo spirito di partito. Fu soltanto nel 1638 che Galileo pubblicò la sua scoperta, la di cui dimostrazione risaliva evidentemente ad un'epoca molto anteriore. Nello stesso anno un nobile genovese, chiamato Giovan Batista Baliani, ebbe allora godeva una reputazione di fisico eccellente, pubblicò pure un'opera intitolata: *De motu naturalium fluidorum ac solidorum. Genuae, 1638 in-4°*, nella quale si trovò quasi interamente d'accordo con Galileo sopra l'accelerazione della caduta dei gravi. Nel 1646 Baliani pubblicò una nuova edizione della sua opera aumentata di cinque libri, nella quale, cangiando affatto sistema, tentò di stabilire un'altra legge di accelerazione. Un padre gesuita nominato Casré, che Gassendi ha confutato, tentò di dimostrare la falsità del sistema di Galileo, che dall'altro canto non mancò di difensori. Benedetto Castelli e il celebre Torricelli suoi discepoli svilupparono tutti e due le teorie del loro illustre maestro, la di cui memoria, ad onta dell'ingiusta opposizione d'alcuni suoi contemporanei giungerà grande e pura alla posterità, che ignorerà i nomi de' suoi oscuri nemici.

ACCELERAZIONE del moto diurno delle stelle. E la quantità di cui ogni giorno si avanzano il levare, il tramontare, ed il passaggio al meridiano delle stelle fisse. Questa quantità è di $3'55''$,9 di tempo; così una stella che fosse passata al meridiano in un dato giorno a mezza notte, il giorno dopo passerebbe a $11^{\circ}56'4''$,1. Quest'accelerazione è prodotta dal moto apparente del sole da occidente in oriente, che è di $59'8''$,2 di grado per giorno, il che produce una diversità di $3'55''$,9 di tempo. Per conseguenza l'effetto di un tal moto retrogrado è quello di ricondurre in ciascun giorno il sole al meridiano $3'55''$,9 di tempo più tardi del dì precedente. Da ciò risulta pure che la stella, il di cui passaggio al meridiano avesse avuto luogo jeri nel tempo stesso di quello del sole, sarebbe oggi $59'8''$,2 più occidentale, e giungerebbe al meridiano $3'55''$,1 prima del sole.

Quest'accelerazione non è la stessa in tutti i giorni che rapporto al *moto medio*, ossia al tempo dei pendoli, poichè il moto apparente del sole varia secondo le diverse stagioni dell'anno (*Vedi TEMPO VERO e TEMPO MEDIO*).

ACCELERAZIONE di un pianeta. Dicesi che un pianeta è accelerato nel suo moto, quando il suo moto diurno reale è maggiore del suo moto diurno medio. Ed al contrario si dice che un pianeta è ritardato nel suo moto, quando il suo moto diurno reale è minore del suo moto diurno medio. Questa ineguaglianza deriva dal cangiamento della distanza del pianeta dal sole che varia continuamente; poichè il suo moto intorno a quest'astro ha luogo in un'ellisse di cui il sole occupa uno dei fuochi. Il pianeta si muove sempre più velocemente nella sua orbita quando si avvicina al sole, e più lentamente quando se ne allontana (*Vedi TRAJETTORIA*).

ACCELERAZIONE del moto medio della luna. Halley ha scoperto il primo questa accelerazione confrontando alcuni eclissi, che esso aveva osservato, con altre osservazioni di eclissi fatte a Babilonia, e con quelle di Albatén fatte nel nono secolo. Egli non poté determinare con precisione la quantità di questa accelerazione, perchè le longitudini di Bagdad, d'Alessandria, e d'Aleppo, dove le osservazioni ebbero luogo, non si erano potute stabilire con esattezza. Ma in seguito essendo stata fissata da Chazelles la longitudine di Alessandria, e Babilonia essendo situata a $50'$ a levante di Alessandria, se dobbiamo starcene al calcolo di Tolomeo, il sig. Duntborn si appoggiò a questi dati per confrontare parecchi eclissi antichi e moderni, e confermò pienamente l'asserzione di Halley, che il moto medio della luna era più rapido nei tempi moderni che nei tempi antichi. Non contento di constatare il fatto, risolvette di determinare la quantità di questa accelerazione, e coll'aiuto dei più antichi eclissi osservati a Babilonia 721 anni avanti l'era volgare, concluse che l'accelerazione, supponendola uniforme, era di $10''$ per secolo.

Lalande fece simili ricerche e giunse ad un medesimo risultato (*Memorie dell'Accademia di Parigi per l'anno 1757*). Mayer ne aveva parlato nelle memorie dell'Accademia di Gottinga nel 1752. Nelle sue *Tavole della luna* stabilì un'equazione, che ebiam a secolare, per correggere il moto medio della luna nel secolo anteriore e posteriore al 1750. Malgrado queste ricerche, il fatto stesso sembrando inesplicabile era tuttavia contestato, ed anco interamente rigettato da molti geometri, nel numero dei quali siamo costretti a dover contare Lagrange, quando, nel 19 dicembre 1787, Laplace annunziò di aver trovato le cause di questa accelerazione. Essa infatti risulta dalla variazione dell'eccentricità della terra prodotta dall'attrazione dei pianeti; e lungi dall'andar sempre crescendo, come in principio si era supposto, essa segue in modo inverso le leggi di questa variazione, e aumenta o diminuisce secondo che l'eccentricità diminuisce o aumenta. Così ciò che sembra oggi un'accelerazione si convertirà nel progredire

dei secoli in un ritardamento, per quindi diventare di nuovo un' accelerazione. Lagrange ha confermato questa spiegazione, che da prima gli era sfuggita, sebbene potesse dedursi dalle sue formule generali di perturbazione. L'equazione secolare che risulta da questa teoria è di

$$(10'',18) i^2 + (0'',0185) i^3,$$

i essendo il numero dei secoli decorsi dopo il 1700

ACCENTO. *Vedi* APICE.

ACCESSO (*Mec.*). Curva di accesso equabile, *accessus aequabilis*. Nel 1687 il sig. Leibnitz dopo diverse dispute avute sopra la valutazione delle forze vive e delle forze morte (*Vedi* Forza in questo Dizionario) con diversi geometri di quel tempo, che si ostinavano a non volere ammettere i principj del calcolo differenziale, e specialmente col sig. Ab. Catelan, propose ai suoi avversarj la ricerca di questa curva, di cui essi non poterono trovare l'equazione.

Un corpo, abbandonato all'effetto della gravità, percorre, sia cadendo liberamente per la perpendicolare, sia scorrendo sopra un piano inclinato, spazj tanto maggiori in tempi eguali, quanto più esso s'allontana dal punto donde la sua caduta ha cominciato (*Vedi* ACCELERATO). Ma questo corpo impiega un tempo tanto maggiore a percorrere una medesima linea con una velocità determinata, quanto minore è l'angolo che essa forma coll'orizzonte. Deve dunque esistere una curva tale, che l'obliquità delle sue diverse parti compensando la velocità con la quale esse vengono percorse, il mobile s'avvicini uniformemente alla linea orizzontale, vale a dire percorra in tempi eguali spazj eguali, presi nel senso della perpendicolare.

Tale è il problema proposto da Leibnitz in questi termini.

Trovare una curva $xx'x''x'''$ (Tav. XI. fig. 1) lungo la quale un corpo cadendo per effetto della sola sua gravità, s'avvicini egualmente all'orizzonte in tempi eguali, di cui cioè le parti xx' , $x'x''$, $x''x'''$, ec., determinate dalle linee orizzontali xy , $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$, ec., egualmente distanti l'una dall'altra, siano percorse in tempi eguali.

Questo problema, reso celebre per la difficoltà che ebbero i matematici a trovare l'equazione della curva, non essendo stato risolto dai geometri a cui era stato proposto, Leibnitz pubblicò la sua soluzione nel 1689, nel celebre giornale intitolato *Acta eruditorum*, che pubblicavasi a Lipsia sotto la direzione di Ottone Mencke, senza però far travedere il metodo da esso seguito per arrivarvi. Poco dopo Giacomo Bernoulli, con l'aiuto dei nuovi calcoli dell'infinito, che esso cominciava a coltivare, trovò la stessa soluzione, e ne pubblicò l'analisi (*Act. erud.*, 1690). In seguito altri geometri celebri di quel tempo giunsero a risolvere il problema (*Vedi* *Acta erudit.* 1694), e trovarono che la curva richiesta era la seconda parabola cubica, situata in modo che il suo vertice A sia la parte superiore. Di più è da osservarsi che il corpo, il quale deve descriverla, per avvicinarsi egualmente all'orizzonte in tempi eguali, non può descriverla nel principio della sua caduta: conviene che subito cada in linea retta da una certa altezza PA, determinata dalla natura di questa parabola; e ciò non può farsi, se non con la velocità acquistata in questa caduta, onde cominciare ad avvicinarsi egualmente all'orizzonte in tempi eguali.

Fra i geometri che risolvettero il problema i signori Bernoulli distinsero le loro soluzioni per le eleganti costruzioni, che essi diedero della curva *accessus aequabilis*. E da osservarsi ancora che in parte di queste soluzioni, in luogo di prendere l'orizzonte per termine degli avvicinamenti del corpo, fu preso un punto qualunque.

Nel 1695 il sig. Varignon diede una soluzione del problema supponendo la legge

dell' accelerazione stabilita da Galileo, e per questa soluzione non si servì del calcolo differenziale (Vedi *Mem. dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell' Anno 1695*).

Nel 1699 il sig. Varignon ritornò sopra lo stesso problema, lo risolvette per mezzo del calcolo differenziale, ed assai più generalmente, e stabilì quanto appresso, cioè:

1.^o Le curve che resulterebbero nell' ipotesi in cui le direzioni dei gravi siano parallele fra loro.

2.^o Le curve che questi corpi descriverebbero nell' ipotesi che le loro direzioni concorrano al centro della terra, e

3.^o Riprendendo le direzioni parallele trovò ancora, per tutte le ipotesi immaginabili d' accelerazione nella caduta de' corpi, l' espressione generale delle curve che essi dovrebbero descrivere per avvicinarsi o allontanarsi egualmente in tempi eguali a qualunque altro punto nel piano di ciascuna di queste curve.

Nel 30 Giugno 1703 il sig. Varignon fece un' aggiunta alla memoria del 1699, con la quale generalizzò sempre più il problema, e provò ancora che le soluzioni date nel 1699 potevano essere ridotte molto più semplici (*Vedi Mem. dell' Accad. delle scienze di Parigi dell' anno 1699, e dell' anno 1703.*)

Fino a questo punto tutte le soluzioni date supponevano la caduta dei corpi nel vuoto, o almeno in un mezzo non resistente: mentre effettivamente in natura la caduta dei corpi ha luogo in un mezzo, che oppone una certa resistenza; la qual circostanza, come ognun vede, deve necessariamente influire sulla natura della curva *accessus aequabilis*.

Il sig. Maupertuis nell' anno 1730 risolvette il problema per il caso in cui il corpo si movesse in un mezzo resistente, e cominciò dall' ipotesi particolare di una resistenza proporzionale al quadrato della velocità. Determinata con questo mezzo la curva che doveva risultarne, che trovò dover essere una curva delle così dette *trascendenti del second' ordine*, comunicò la soluzione e costruzione della curva al signor Bernoulli, e questi inviò all' altro un metodo per perfezionarne la costruzione, metodo che il sig. Maupertuis, dietro la permissione avutane dallo stesso signor Bernoulli, inserì nella sua memoria.

Risoluto il problema nell' ipotesi particolare di sopra indicata, passò nella stessa memoria il sig. Maupertuis a risolverlo per qualunque ipotesi di resistenza, e a dare tutte le curve *accessus aequabilis*, che ne risultavano. (*Vedi Mem. dell' Accad. di Parigi per l' anno 1730, pag. 233 e segg.*)

L' equazione della curva, nel vuoto, si ottiene facilmente col seguente metodo.

Supponiamo che il mobile, arrivato al punto x , abbia acquistato un grado di velocità eguale a quello che esso avrebbe acquistato cadendo perpendicolarmente dall' altezza Ay ; si conduca zn parallela ad xy , e dal punto x abbassiamo xm perpendicolare sopra zn ; prendiamo Ay per asse delle x , e facciamo $Ay = x$, $xy = y$. Se si concepisce yz infinitamente piccolo, ovvero se si prende yz per la differenziale di Ay , allora mn sarà la differenziale di y ; e l' arco xn sarà la differenziale o l' elemento della curva. Avremo dunque, a motivo di $xm = yz = dx$, e di $mn = dy$,

$$xn = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Ma la velocità nel punto x è eguale a $\sqrt{Ay}$ o $\sqrt{x}$; così, indicando con dt il tempo della caduta lungo l' arco infinitamente piccolo xn , abbiamo

$$xn = dt\sqrt{x}.$$

Ora per la natura del problema $dx = dt$, dunque

$$xv = dx\sqrt{x},$$

e per conseguenza

$$dx\sqrt{x} = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Donde si ricava

$$dy = dx\sqrt{x-1},$$

e integrando,

$$y = \int dx \sqrt{x-1} = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}};$$

ed in fine

$$y^2 = \frac{4}{9}(x-1)^3,$$

ovvero, facendo $x-1=z$,

$$\frac{9}{4}y^2 = z^3.$$

Questa equazione è quella di una *parabola cubica* di cui l'ascissa è z , l'ordinata y , e il parametro $= \frac{9}{4}$ (*Vedi PARABOLA*).

Per avere il punto in cui la curva incontra l'asse Ay , se facciamo $z=0$, abbiamo $x=1$; donde segue che l'origine non è in A , ma in P , facendo $AP=1$. Così perchè il mobile discenda secondo la legge voluta dal problema, avanti di arrivare al vertice P della curva, deve avere una velocità eguale a quella che un corpo acquisterebbe cadendo liberamente dall'altezza AP . Quest'altezza essendo eguale all'*unità*, allorchè il parametro è $\frac{9}{4}$, si può dire in generale che

il corpo deve in principio cadere liberamente dal $\frac{4}{9}$ del parametro avanti d'in-

contrare la curva, affinchè in seguito possa avvicinarsi egualmente all'orizzonte in tempi eguali.

- **ACCORCIAMENTO del pendolo.** La forza di gravità che agisce sopra tutti i corpi non è la stessa a differenti distanze dal centro della terra: per conseguenza il numero e la durata delle vibrazioni di un pendolo variano secondo i diversi luoghi del globo. A Richer è dovuta la prima osservazione di una tal verità: quest'accademico, essendo stato inviato nel 1672 all'isola di Cajenna, distante dall'equatore circa cinque gradi osservò che i buoni pendoli a secondi costruiti a Parigi misuravano tempi più lunghi alla Cajenna, cosicchè fu obbligato ad accorciarli di una linea ed un quarto per far sì che battessero i secondi. Da questa esperienza, confermata in seguito da tutti gli astronomi che sono stati tanto al circolo polare quanto all'equatore, si è concluso che la terra era schiacciata ai poli, ed è, come lo ha detto un uomo celebre, una linea e un quarto che ha fatto cangiar figura alla terra.

- **ACCORDO (Musica).** In Acustica ed in Musica s'intende per *accordo* la simultaneità di più suoni i di cui intervalli sono consonanti. L'accordo è *perfetto* quando si compone della terza, della quinta, e dell'ottava del suono primo:

chiamasi inoltre *perfetto maggiore* se la terza è maggiore, e *perfetto minore* se la terza è minore. Si dice che due corpi sonori, per esempio due corde d'uno stromento, due flauti, due campane ec, sono 1^o all'ottava l'uno dell'altro, quando uno fa due vibrazioni mentre l'altro non ne fa che una; 2^o alla quinta quando l'uno produce tre vibrazioni nello stesso intervallo di tempo che l'altro ne fa due; 3^o alla terza maggiore quando le vibrazioni de' due corpi stanno fra loro nel rapporto di 4 a 5, e alla terza minore se stanno nel rapporto di 5 a 6.

Gli stromenti si accordano quando si stendono o si rilasciano le corde, quando si allungano o si accorciano i tubi finattantoché tutte le parti dello stromento sieno al tono che debbono avere. A tale effetto si determina un tono di confronto che è il do per l'organo e per il clavicembalo, e il la per il violino e per il basso. Determinato questo tono, vi si riferiscono tutti gli altri suoni dello stromento, che debbono esser determinati dall'accordo secondo gl'intervalli che sono loro assegnati. I diversi trattati di musica somministreranno al lettore ampie istruzioni su quest'articolo. Si veda ancora l'articolo Musica di questo Dizionario.

ACCRESIMENTO (*Algebra*). Si chiama *accrescimento* l'aumento che riceve una quantità variabile. Questo accrescimento può essere finito ovvero infinitamente piccolo; nel primo caso prende il nome di *DIFFERENZA*, e s'indica con la caratteristica Δ ; nel secondo caso prende il nome di *DIFFERENZIALE*, e s'indica con la caratteristica d . Così Δx rappresenta l'accrescimento finito, ossia la *differenza* della variabile x , e dx il suo accrescimento infinitamente piccolo, o la sua *differenziale*. Quando in una funzione qualunque di una variabile x , che indicheremo per φx , x riceve un accrescimento Δx , o dx , essa diviene allora $\varphi(x+\Delta x)$, o $\varphi(x+dx)$, e cresce conseguentemente in una maniera corrispondente all'aumento della variabile. Questi accrescimenti s'indicano ancora per $\Delta \varphi x$ e $d\varphi x$, e si chiamano rispettivamente la *differenza*, e la *differenziale* della funzione φx . Gli accrescimenti delle funzioni hanno leggi particolari le quali sono l'oggetto di un ramo della scienza dei numeri chiamato *CALCOLO DELLE DIFFERENZE*, e di cui le due suddivisioni principali formano il *calcolo delle differenze finite*, e il *calcolo delle differenze infinitamente piccole*, ossia il *calcolo differenziale*. Si vedano queste parole nel Dizionario.

ACHARD (FRANCESCO), nato a Ginevra nel 1708, fu membro dell'accademia di Berlino, nelle memorie della quale pubblicò alcune *riflessioni sull'infinito matematico* in confutazione delle opinioni di Fontenelle.

ACHARNAR. Vedi ACARNAR.

ACHILLE TAZIO, astronomo greco, che visse probabilmente nella prima metà del quarto secolo dell'era volgare, e scrisse un *Trattato sulla sfera* per servire d'introduzione ai *Fenomeni* di Arato. Questo trattato, nel quale si leggono alcune notizie sulla storia delle matematiche, si trova inserito in greco e in latino nell'*Uranologium*, del P. Petavio. Suida, il lessicografo, confonde questo autore con un altro dello stesso nome, che egli chiama Stazio, che visse qualche tempo dopo, e scrisse un romanzo greco intitolato: *Gli amori di Leucippe e Clitofone*.

ACLASTO (*Optica*). Nome delle figure che lasciano passare liberamente i raggi della luce senza refrangerli, sebbene abbiano tutte le proprietà richieste per produrre la refrazione. Questa parola è stata inventata da Leibnitz (Vedi *Leibntzii opera* Tom. III. pag. 203).

ACQUEDOTTO (*Idr.*). Questo vocabolo, derivante dal latino, e specialmente dalle parole *agua* acqua, e *ductus* condotto, indica un edificio o canale costruito di pietre o di mattoni, e destinato a condurre acqua a traverso una superficie ineguale una quantità d'acqua con un regolare pendio.

I Greci non conoscevano gli acquedotti. I Romani in principio si contentarono dell'acqua del Tevere, ma nell'ingrandire la loro città, pensarono di condurvi l'acqua delle sorgenti per mezzo di acquedotti, e ciò seguì nell'anno di Roma 444. Tali acquedotti si moltiplicarono in seguito, e se ne fabbricarono di maravigliosi, che costarono spese immense, e che meritano una speciale menzione, se non altro per il lato della storia.

Gli acquedotti sono di due specie, cioè apparenti e sotterranei. Gli *apparenti* si costruiscono a traverso le valli e le paludi, e sono sostenuti da una serie di archi o volte: fra questi meritano di essere nominati quelli di Arcueil, di Marli, e di Bucq vicino a Versailles. I *sotterranei* sono scavati a traverso le montagne, e condotti sotto la superficie della terra: si formano di pietre in taglio e di cementi, e si cuoprono con volte di pietre piate, che mettono l'acqua sotto l'ombra, e la difendono dal sole: tali sono quelli di Roquencourt, di Belleville, di Pré-S-Gervais.

Gli acquedotti si dividono ancora in semplici, doppij, e triplici, secondo che si compongono di uno, di due, o di tre ordini di archi o volte gli uni al di sopra degli altri: come quello del Pont-du-Gard in Linguadoca, e quello che porta l'acqua a Costantinopoli.

Generalmente gli acquedotti sono selciati; qualche volta l'acqua si fa scorrere sopra un letto di cementi fatti con arte, o sopra un letto d'argilla: ordinariamente però scorre in canali di piombo, o in trogoletti di pietra in taglio, ai quali si dà un declivio quasi insensibile, per facilitare il corso dell'acqua. Ai lati di questi canali si costruiscono due stretti sentieri, pei quali all'occorrenza si possa camminare.

Gli acquedotti, i canali, i fossi ec. conducono l'acqua in un serbatoio; ma non le inalzano: per renderle zampillanti conviene che siano rinchiusi in tñhi.

Le varie specie di acquedotti erano per certo una delle maraviglie di Roma, e ne attestavano le ricchezze e la potenza. Il gran numero che ne avevano, le immense somme che s'impiegavano per far venire l'acqua da posti lontani trenta, quaranta, sessanta e fin cento miglia sopra archi continuati, o suppliti da altri lavori, come montagne tagliate, o rocce traforate, tutto contribuiva ad eccitare la sorpresa e l'ammirazione nello stesso tempo.

In varii luoghi della Campagna di Roma si osservano ancora grandi avanzi di questi acquedotti, ed archi continuati per un lungo tratto, sopra i quali vi erano i canali che portavano l'acqua alla città: tali archi alcune volte sono bassi, e altre volte di una grande altezza secondo le ineguaglianze del terreno. Si vedono talvolta ancora due archi l'uno al di sopra dell'altro, e ciò pel timore che l'altezza troppo grande pregiudicasse alla solidità della fabbrica. Tutti questi avanzi sono per lo più fabbricati di mattoni così ben cementati, che con estrema fatica se ne potrebbe staccare qualche pezzo. Quando l'elevazione del terreno era grandissima, gli acquedotti si facevano sotterranei: questi acquedotti portavano l'acqua dagli acquedotti apparenti nei fondi e nei pendii delle montagne. Se l'acqua non poteva avere un sufficiente pendio che passando a traverso di una rupe, che s'incontrava per via, questa veniva traforata all'altezza dell'acquedotto superiore. Uno di tali acquedotti si vede ancora sopra Tivoli in un luogo detto Vicovaro: il canale che formava la continuazione dell'acquedotto è scavato nella viva rupe per più di un miglio, ed è alto circa cinque piedi, e largo quattro.

È da osservarsi che questi acquedotti, i quali il più delle volte si potevano formare in linea retta, non giungevano alla città che per mezzo di frequenti sinuosità. Il parere di alcuni è che queste obliquità si facessero per evitare le spese di fabbricare archi di una straordinaria altezza; altri poi dicono che si faceva-

no così per rompere il troppo grande impeto dell'acqua, la quale scorrendo in linea retta per un tratto immenso, avrebbe accresciuto la velocità, danneggiato i canali, e dato una bevanda torbida e malsana.

Queste opere immense si costruivano con uno studio il più accurato. Si lasciavano di quando in quando degli spiragli, affinchè se per qualche accidente il corso dell'acqua veniva arrestato, potesse essa sgorgare finattantochè il passaggio ritornasse di nuovo ad esser libero. Vi erano ancora nel canale dell'acquedotto dei pozzi ove cadeva l'acqua, si riposava e deponeva la feccia, e delle piscine ove essa si allargava, e si purificava. Chi volesse acquistare una qualche idea della magnificenza di tali costruzioni può consultare il *Volume IV. delle Antichità del P. Montfaucon Tavola 128.*

L'acquedotto dell'*Acqua Marcia*, celebre ancora, ha l'arco di sedici piedi di apertura, è composto di tre specie di pietre, cioè rosse, brune, e color di terra. Nella parte superiore si vedono due canali, il più alto dei quali portava l'acqua nuova del Teverone, e quello di sotto aveva l'acqua chiamata *Claudia*. L'intero edificio ha settanta piedi romani di altezza.

Accanto a questo acquedotto si vede nel Montfaucon il taglio di un altro con tre canali; il superiore è dell'acqua *Giulia*, quello di mezzo dell'acqua *Tepula*, e l'inferiore dell'acqua *Marcia*.

L'arco dell'acquedotto dell'acqua *Claudia* è di bellissime pietre in taglio; l'acquedotto dell'acqua *Neroniana* è di mattoni; e tanto l'uno quanto l'altro hanno settantadue piedi romani di altezza.

Merita di essere qui menzionato per una notevole singolarità il canale dell'acquedotto detto dell'*Acqua Appia*; ed è di non essere unito come gli altri, ma di andare come per gradi, in guisa che esso è più stretto al basso che in alto.

Sono ancora da rammentarsi l'acquedotto di *Druso*, e quello di *Rimini*.

Sotto l'imperatore Nerva, il console Frontino aveva la direzione degli acquedotti, ed esso parla di 9 acquedotti che avevano 13,594 tubi di un pollice di diametro, e Procopio conta 14 canali portati da que'9 acquedotti, alcuni dei quali venivano dalla distanza di 60 e più miglia. Vigero osserva, che nello spazio di ventiquattro ore Roma riceveva 500000 botti d'acqua: per apprezzare giustamente quest'enorme quantità d'acqua converrebbe conoscere la capacità delle botti.

Dei molti acquedotti costruiti nelle diverse parti dell'Impero non rammenteremo che i più importanti, e quelli che maggiormente mostrano la magnificenza romana.

Uno di questi monumenti è quello di Metz, del quale resta tuttora un gran numero di archi; questi archi attraversavano la Mosella, fiume in quel sito di notevole larghezza. Le sorgenti abbondanti di Gorza davano le acque per la Naumachia; queste acque si riunivano in un serbatoio; da questo erano condotte per canali sotterranei fatti di pietra in taglio, e tanto vasti che un uomo poteva camminarvi ritto in piedi: esse passavano la Mosella sopra quei superbi ed alti archi, che si vedono ancora a due leghe lungi da Metz, sì ben costrutti, e cementati, che eccettuata la parte di mezzo rovinata dal ghiaccio, hanno resistito e resistono alle più violenti ingiurie della stagione. Da questi archi altri acquedotti conducevano le acque ai bagni, ed alla Naumachia.

Colmenares asserisce che l'acquedotto di Segovia può stare a fronte delle più belle opere dell'antichità. Ne restano ancora centocinquantanove archi tutti di grosse pietre senza cemento. Questi archi col rimanente dell'edificio hanno centodieci piedi di altezza; gli archi sono in due ordini l'uno sopra l'altro. L'acquedotto attraversa la città, e passa sopra la maggior parte delle case che restano nella parte bassa di essa.

Le Cloache di Roma, o i suoi acquedotti sotterranei, si contavano anch' esse fra le meraviglie di quella città, e si suddividevano in molti rami, che andavano a deporre l'acqua nel fiume. Queste Cloache erano volte grandi ed alte, solidamente costruite, sotto le quali andavasi in battello; il che faceva dire a Plinio, che la città era fabbricata in aria, e che si navigava sotto le case; e questa egli chiama *la più grand'opera che sia mai stata intrapresa*. Tali volte sostenevano i pavimenti delle strade nelle quali a certe distanze si trovavano dei fori, per i quali si gettavano le immondizie della città. In tal guisa si scaricava la quantità incredibile di acque che gli acquedotti portavano in Roma.

Vi mettevano foci ancora dei ruscelli per mezzo dei quali restava la città sempre netta, e le lorde non si fermavano nelle cloache, ma erano prontamente gettate nel fiume.

Acquedotti vedevansi ancora a Catania, ed in alcune città della Francia, specialmente a Nîmes. Fra i moderni si distingue l'acquedotto Carolino, detto ancora di *Caperla*, fabbricato sul disegno del Vanvitelli.

ACRA, misura di superficie, la quale varia secondo i paesi. Questa parola è comune a molte lingue; in Arabo si dice *Acar*; in Greco *Άγρα*; in Celtico ed in Teutonico *Acker*; in Sassone *Acer*; in Latino *Ager*. Nella sua origine significava una terra lavorabile: Salmasio la fa venire da *Acra*, detta anche *Athena*, che significava, presso gli antichi, una misura di dieci piedi.

L'*Acra* in Normandia era di 160 pertiche; in altre provincie della Francia era di diversa grandezza; ma l'introduzione in quel regno del sistema metrico ha fatto sparire questa varietà di misure, che si riscontrava da una provincia ad un'altra.

L'*Acra* d'Inghilterra è eguale a dieci volte un quadrato che abbia per lato la lunghezza di 22 *yard*, misura inglese di tre piedi parimente inglesi di lunghezza; cosicchè la superficie totale dell'*acra* è espressa da $22 \times 22 \times 10$, ossia 4840 *yard* quadrati equivalenti a 43560 piedi. Il piede inglese corrisponde a metri francesi 0,30479449, e conseguentemente l'*acra* equivale a 0,404671 ettari. L'*acra* si divide pure in quattro *rood*, e ciascun *rood* in 40 *pertiche*, cosicchè ogni *pertica* contiene 30 $\frac{1}{4}$ *yard* quadrati. Ecco una tavola delle suddivisioni dell'*Acra* d'Inghilterra, in misure inglesi.

FOLETCI					
144	PIEDI				
1296	9	YARD			
39204	272 $\frac{1}{4}$	30 $\frac{1}{4}$	PERTICHE		
1568160	10890	1210	40	5 ROOD	
6272640	43560	4840	160	4	ACRA

Il piede d'Inghilterra secondo le verificazioni fatte da Maskeline celebre astronomo inglese è di undici pollici, tre linee, e 115 $\frac{1}{2}$ diecimillesimi di linea del piede parigino. Per ulteriori nozioni si veda il *Cambista* di Kelly.

ACROMATICO (*Ottica*). Questo nome, che deriva dalla greca parola *ακρωμα* colore, e da *α* privativa, è stato dato da Lalande a quei canocchiali che correg-

gono l'aberrazione di refrangibilità, cioè a quei cannocchiali nei quali la luce, decomposta in raggi di diversi colori da una lente, viene ricomposta e ridotta di nuovo al suo primitivo stato da un'altra, dimanierchè l'immagine non presenti più nel suo contorno quelle frange colorate che si vedono nei cattivi cannocchiali.

Si sa che la luce, secondo l'ipotesi newtoniana, non è un corpo semplice, ma si divide e si decompone in vari colori passando per un vetro o per qualunque altra sostanza trasparente, le di cui superficie non sieno parallele. Ciò accade appunto quando si osserva un oggetto con una lente comune. Allora infatti si hanno più immagini prodotte dalla riunione in differenti punti dei raggi di differenti colori, come si vede nella figura a della Tavola XI. AB è la sezione di una lente biconvessa, che può esser formata dalla rivoluzione della figura intorno all'asse OR. Noi supponiamo che i raggi, i quali incontrano questa lente, emanano da un punto dell'asse OR tanto distante dalla lente da poterli considerare senza errore sensibile come paralleli fra loro. La luce passando per la lente viene refratta; vale a dire i suoi raggi, che prima erano paralleli, cambiano direzione e tendono a riunirsi in un punto dell'asse. Ma siccome i sette colori principali di cui è composta la luce, cioè il violetto, l'indaco, il turchino, il verde, il giallo, l'arancio, e il rosso si refrangono diversamente, così i raggi più refrangibili, che sono i violetti, si riuniranno in un punto V più vicino alla lente, mentre i raggi rossi, che sono i meno refrangibili, andranno a riunirsi in un punto più lontano R. Gli altri raggi avranno i loro fuochi o punti di riunione nello spazio intermedio fra V ed R, nell'ordine stesso nel quale gli abbiamo enunziati, che è l'ordine appunto del loro grado di refrangibilità. Noi dobbiamo qui osservare due distinti effetti. Primieramente la *refrazione* generale dei raggi, per cui questi si piegano, e tendono a riunirsi in un punto dell'asse. Questa è ordinariamente misurata dal raggio *medio*, cioè dal colore che cade nel mezzo M fra V ed R; e di due lenti della stessa forma, ma di differenti sostanze, si dice che ha una maggior refrazione quella, che ha il mezzo M più vicino al centro C della lente. In secondo luogo la distanza VR fra i due raggi più lontani, la quale sta in un determinato rapporto con CM, ed è chiamata *potere dispersivo* del mezzo. Così se due lenti della stessa forma, ma di differenti sostanze, hanno la distanza VR eguale, non ne viene per conseguenza che il loro potere dispersivo sia il medesimo. Se la distanza CM nella prima sostanza fosse doppia di quella della seconda, VR essendo eguale in ambedue, il potere dispersivo della prima non sarebbe che la metà di quello della seconda.

Perchè l'immagine di un oggetto, ottenuta per mezzo di un cannocchiale, sia ben distinta e priva di ogni specie di colori estranei, è necessario che i diversi raggi colorati si riuniscano in solo punto, ossia, il che è lo stesso, che venga tolto o corretto il potere dispersivo delle lenti. Per lungo tempo si era creduto che fosse impossibile il costruire strumenti, per mezzo dei quali si potesse giungere a questo risultato sì importante per la precisione e regolarità delle osservazioni. In questa parte l'autorità creduta infallibile dell'illustre Newton, cui tanto debbono le moderne matematiche, fu nociva al progresso della scienza. Dietro un'esperienza, in cui certamente s'ingannò, Newton aveva stabilito il principio che la *refrazione media* della luce era in qualunque sostanza costantemente proporzionale alla *dispersione*; da ciò egli deduceva che combinando insieme più mezzi all'oggetto di correggere e diminuire la dispersione dei raggi si verrebbe a diminuire proporzionalmente anco la refrazione, cosicchè quando si fosse ottenuta una soppressione totale della dispersione si sarebbe pure distrutta la refrazione, ed i raggi emergenti sarebbero divenuti paralleli agl'incidenti: il che come ognun vede avrebbe reso affatto inutile per avvicinare o ingrandire gli og-

getti qualunque sistema di lenti di tal fatta, poichè la teoria degli strumenti d'ottica è fondata precisamente sul potere refrattivo dei mezzi diafani. Quindi nella sua Ottica egli stabilì questa proposizione. « Ogni volta che i raggi della luce attraversano due mezzi di densità differente, dimanderà la refrazione dell'uno distrugga quella dell'altro, e che per conseguenza i raggi emergenti sieno paralleli agli incidenti, la luce esce sempre bianca; e viceversa se le refrazioni dei due mezzi non si distruggono fra loro, cosicchè i raggi emergenti sieno obliqui ai raggi incidenti, la luce acquista colori » (Newton *Optice Lucis* Lib. I. Prop. 2.)

La verità di questa proposizione non era da alcuno revocata in dubbio, quando nel 1747 Eulero propose che si adoprassero per i canocchiali lenti composte di sostanze differientemente refragenti. Egli rifletteva che quando si guardano gli oggetti ad occhio nudo le loro immagini non ci compariscono alterate da colori estranei, e che ciò accade soltanto quando i raggi emanati dagli oggetti giungono all'occhio dopo essere stati refratti da una lente. Da ciò concludeva che gli occhi sono *acromatici*, vale a dire che essi riuniscono in un punto solo tutte le specie di raggi colorati. Dietro questo principio non si trattava che d'imitare la combinazione dei diversi umori dell'occhio per giungere ad un egual risultato. Ecco come egli si esprimeva nella sua memoria sulla perfezione degli obbiettivi dei canocchiali inserita nelle Memorie dell'accademia di Berlino dell'anno 1747. « È noto agli astronomi che gli obbiettivi, dei quali ordinariamente si fa uso nei canocchiali, hanno il difetto di produrre un'infinità di fuochi, secondo i diversi gradi di refrangibilità dei raggi. I raggi rossi, soffrendo nel passare per il vetro la più piccola refrazione, hanno il loro fuoco ad una distanza dal vetro maggiore di quella dei raggi violetti, la di cui refrazione è più grande. Da ciò deriva che se la luce, che passa per l'obbiettivo, è composta di più specie di raggi, i raggi refratti non si riuniscono più in un punto, come comunemente si suppone nell'Ottica; ma il fuoco sarà steso in uno spazio che sarà tanto più grande, quanto più il fuoco sarà lontano dall'obbiettivo. . . Il sig. Newton ha già sospettato che obbiettivi di due vetri, di cui lo spazio intermedio fosse ripieno di acqua, potrebbero servire a perfezionare i canocchiali, per ciò che riguarda l'aberrazione che subiscono i raggi a causa della figura sferica delle lenti: ma non pure che egli avesse l'idea che con questo mezzo fosse possibile restringere e diminuire lo spazio, per il quale si trovano dispersi i raggi diversamente colorati. Ora mi è sembrato probabilissimo che una certa combinazione di differenti corpi trasparenti potrebbe essere atta a rimediare a questo inconveniente; ed io sono persuaso che nei nostri occhi i diversi umori si trovino disposti in modo che non resulti nessuna diffusione di fuoco. Questo è a parer mio un soggetto tutto nuovo, l'osservare cioè la struttura dell'occhio; poichè se non si fosse trattato che di rappresentare le immagini degli oggetti, un solo corpo trasparente sarebbe stato sufficiente, purchè avesse avuto la figura adattata; ma per rendere questo organo perfetto bisognava impiegare differenti corpi trasparenti, dar loro la giusta figura, e unirli colle regole della più sublime Geometria, perchè la diversa refrangibilità dei raggi non turbasse le rappresentazioni. » Partendosi da queste idee Eulero cercò le dimensioni degli obbiettivi formati di vetro e di acqua in modo da potere imitare la combinazione che si fa naturalmente nell'occhio; ma tutti i lumi che poterono somministrargli le profonde cognizioni, che egli aveva nella geometria più sublime, non bastarono a supplire a ciò che allora mancava rapporto alle nostre cognizioni intorno al potere refrattivo e dispersivo delle differenti sostanze. I canocchiali costruiti a Parigi dietro le dimensioni ed i calcoli di Eulero riuscirono imperfetti.

Giovanni Dollond, celebre ottico inglese, applicò il calcolo di Eulerò: ma essendosi servito delle refrangibilità determinate dalle esperienze di Newton, non poté giungere a nessun risultato soddisfacente. Una polemica si elevò tra Eulerò e Dollond; il primo persistè a sostenere la possibilità di annullare la diffusione dei fuochi nel modo da esso indicato, l'altro terminò con persuadersi che era assolutamente impossibile di arrivare a comporre con lenti di diverse sostanze un sistema, che senza distruggere la refrazione neutralizzasse il potere dispersivo. La persuasione che Newton non potesse avere sbagliato nelle sue esperienze, o le ricerche di Clairaut, che avendo esaminato la legge proposta da Eulerò trovò che non reggeva al calcolo, contribuirono a far credere che i canonici non potessero in verun modo correggersi dell' aberrazione di refrangibilità. Frattanto nel 1755 Klingenshierna, celebre professore di matematiche nell'università di Upsal, mandò a Dollond uno scritto, nel quale si opponeva all'esperienza di Newton con argomenti sì imponenti, che costrinse Dollond a dubitare della esattezza di questa esperienza: l'ottico inglese finalmente ardiva ripeterla, e la trovò falsa. Ecco come procedè in questo esperimento. Unì due lastre di vetro per due dei loro orli, in modo però da poter far variare a piacimento l'angolo da esse formato, e quindi empi di acqua lo spazio intermedio: in quest'acqua immerse un prisma di vetro coll'angolo voltato in alto, cioè all'opposto dell'angolo formato dalle due lastre di vetro. Inclinò quindi queste lastre a diversi angoli, finchè gli oggetti guardati a traverso di questo doppio prisma comparissero sensibilmente a quella stessa altezza alla quale sarebbero comparsi alla vista semplice, il che faceva vedere che le due refrazioni si erano scambievolmente distrutte, ossia che i raggi emergenti erano paralleli ai raggi incidenti. Allora secondo il principio di Newton doveva sparire qualunque colorazione estranea, pure osservò che le immagini erano tinte dei colori dell'iride; come lo sono tutte quelle degli oggetti che si guardano a traverso di un prisma. Quindi fece muovere di nuovo le lastre di vetro, che formavano il prisma di acqua, fino a dar loro un' inclinazione tale che gli oggetti guardati a traverso del doppio prisma comparissero senza iride: ed allora vide che gli oggetti non avevano la medesima altezza che quando si guardavano ad occhio nudo; il che era segno evidente che l'aberrazione di refrangibilità si era annullata senza che venisse distrutta la refrazione.

Scoperto dunque che l'esperienza di Newton era erronea, Dollond si occupò a misurare la forza dispersiva di varie sostanze; e sapendo che vi erano due specie di vetri l'uno più proprio dell'altro alla nettezza delle immagini, congetturò che questa differenza di qualità procedesse da quella della loro forza dispersiva. Pensò che uno di questi vetri potrebbe avere la differenza della refrangibilità dal rosso al violetto molto più sensibile dell'altro, e cagionare così iridi molto più estese, quantunque la refrazione del raggio medio non fosse molto differente. Infatti dopo replicate osservazioni trovò che il potere dispersivo dei vetri, che in Inghilterra si chiamano *flintglass* o *crown glass*, stava nel rapporto di tre a due, mentre il potere refrattivo delle due sostanze è quasi lo stesso per il raggio medio; cioè che lo spettro colorato che con un prisma di *flintglass* avesse tre pollici di lunghezza ne ha due con un prisma di *crown glass* (Vedi *Transazioni filosofiche* per l'anno 1758). Egli impiegò queste due specie di vetri per formare una lente, che giunse a rendere acromatica in quanto che diminuiva considerabilmente le aberrazioni di refrangibilità ed anche di sfericità. Gli obbiettivi acromatici, che per lungo tempo sono stati composti di due lenti di *crown glass* separate da una lente di *flintglass* concava da ambedue le parti, non si fanno in oggi che di due sole lenti unite insieme, di cui l'una è di *crown glass* e l'altra di *flintglass* (Vedi OTTICA).

I limiti di questo *Dizionario* non ci permettono di entrare in ulteriori particolarità su quest' articolo, perciò ci contenteremo d' indicare gli autori che più specialmente si sono occupati della teoria dei camocchiali acromatici, e che sono i seguenti: Eulero, *Dioptrica*, Pietroburgo 1767-71, 3 vol. in-4º; *Constructio lentium objectivarum*, Pietroburgo 1762 in-4º; *Memorie dell' Accademia di Parigi* anno 1765, pag. 555; *Mem. dell' accad. di Berlino* Tom. XXII anno 1757 pag. 119, an. 1762, pag. 195, 226, e 249, an. 1766 pag. 119 e 171, an. 1767 pag. 131; e *Commentarii dell' accad. di Pietroburgo*, Tom. XVIII pag. 377; Eulero (Gio. Alberto), *Mem. dell' accad. di Berlino*, an. 1761, pag. 181, e 231; Clairaut, *Mem. dell' accad. di Parigi* an. 1756 pag. 380, an. 1757 pag. 524, an. 1762 pag. 578; d' Alembert, *Opuscoli matematici*, primieramente nel Tom. III pubblicato nel 1764, e quindi nel Tom. IV e seguenti fino al 1780; *Mem. dell' accad. di Berlino*, an. 1768 pag. 254, e 265; e *Mem. dell' accad. di Parigi*, an. 1764; Klingenstierna in un' opera che riportò il premio dell' accademia di Pietroburgo nel 1762; Jeaurat *Mem. dell' Accad. di Parigi* an. 1770 pag. 461, an. 1779 pag. 23, an. 1786 pag. 562; Kaestner, *Commentarii dell' accad. di Gottinga*, Tom. I. pag. 185, Tom. II pag. 183; De Chaulnes, *Mem. dell' accad. di Parigi*, an. 1767 pag. 423; Burja, *Mem. dell' accad. di Berlino* an. 1798, pag. 3, Lambert, *Mem. dell' accad. di Berlino*, an. 1771 pag. 338; Rochon ne' suoi *Opuscoli* pubblicati nel 1768; e nelle sue *Memorie* date in luce nel 1783 in-8º; l' Abate Bostovich, *Dissertationes od dioptricam*, Vienna 1767 in 4º, e *Opera ad opticam et astronomiam maxima ex parte nova et omnia huc usque inedita*, Bassano, 1785, 5 vol. in 4º; Il Padre Pezenas nelle sue note alla traduzione del *Trattato di Ottica* di Smith, Avignone 1767, e Duval-Leroy in quelle che egli aggiunse alla traduzione dello stesso trattato stampata a Brest nel medesimo anno; Beguelin, *Mem. dell' accad. di Berlino* ap. 1762, pag. 67, an. 1763, pag. 3, e an. 1769 pag. 3; Klugel, *Dioptrica analitica*, Lipsia 1774, e *Memorie dell' accad. di Gottinga* an. 1776 Tom. XIII, Part. 2, pag. 28; Oriani, *Mem. della società italiano* Tom. III an. 1786 pag. 664; Airy, *Transazioni filosofiche di Cambridge* Tom. II; Santini *Teoria degli stromenti ottici destinati ad estendere i confini della visione naturale*, Padova, 1828, 2 vol. in-8; e finalmente tutti i trattati speciali di Ottica, fra i quali raccomandiamo quello del Dott. Brewster, e l' altro di Coddington.

ACRONICO (*Astron.*). Questa parola, che si usa soltanto in Astronomia, deriva dal vocabolo greco ἀκρονυχος, composto di ἀκρος, *estremità*, e νύξ, *notte*, che significa: ciò che *determino le estremità*, ossia *il principio e il fine della notte*. Si dice *levare acronico* il levarsi di una stella sopra l'orizzonte nel momento in cui il sole tramonta. Si chiama egualmente *tramontare acronico* il tramontare delle stelle che avviene nel tempo stesso di quello del sole. Il *levare* e il *tramontare acronico* è l'opposto del *levare* e del *tramontare cosmico*, che ha luogo nell'istante medesimo in cui il sole si alza. Per trovare sopra un globo celeste quali stelle si alzano o tramontano *acronicamente* in una data notte, si elevi il polo del globo in modo che l'arco intercetto fra esso e l'orizzonte sia eguale alla latitudine del luogo: si giri quindi il globo finattantochè il luogo del sole si trovi sull'orizzonte dalla parte di ponente, allora tutte le stelle che si trovano sopra l'orizzonte o in vicinanza all'orizzonte hanno il *levare acronico* se sono dalla parte di levante, ed hanno il *tramonto acronico* se sono dalla parte di ponente.

• **ACRONIO** (Giovanni), medico e professore di matematiche, nacque in Aconum piccola città di Frisia verso il 1520. Compinti i primi studj si portò nel 1542 a Basilea onde perfezionarvi le sue cognizioni ed acquistarne di nuove. I suoi progressi nelle matematiche furono sì rapidi che in capo a due anni gli venne conferita la cattedra di tale scienza. Aveva composto varie opere sull' astronomia, cui divisava di stampare; ma glielo impedì la sua morte avvenuta nel 1564.

ACTA ERUDITORUM. È questo il titolo di uno dei più celebri giornali letterari e scientifici. Cominciò ad esser pubblicato a Lipsia nel Gennaio 1682 sotto la direzione di Ottonio Mencke, uno dei professori dell'università, assistito da parecchi de' suoi confratelli, e specialmente da Carpmvov. Questo giornale contribuì moltissimo ai progressi delle scienze fisiche e matematiche, pubblicando memorie interessantissime degli uomini più dotti del suo tempo come Leibnitz, i Bernoulli, ec.; ed in esso Leibnitz annunziò per la prima volta il metodo del calcolo differenziale.

Questo giornale, il primo che sia stato pubblicato in latino, fu continuato dal figlio e dal nipote di Mencke, e quindi dai loro eredi fino al 1776, nel qual anno comparve l'ultimo tomo. L'intera raccolta è di 122 o 119 volumi in-4.; si troveranno i nomi di quelli che successivamente vi hanno lavorato nella *Bibliotheca literaria* di Struvio, Tom. II, pag. 824-34, e le diverse parti di cui è composta nel *Manuale del Libraio* di Brunet, alla parola *Acta*.

ACUSTICA È questo un ramo della fisica generale che ha per oggetto il moto vibratorio dei corpi, considerato ne' suoi effetti sugli organi dell'udito, ossia nella produzione de' suoni.

Le oscillazioni che fanno le molecole di un corpo elastico per riprendere la loro posizione primitiva, quando ne sono state allontanate per l'azione istantanea di una forza qualunque, prendono il nome di *moto vibratorio*. Questo moto è reso sensibile all'occhio in una lama d'acciajo tenuta ferma ad una delle sue estremità, e di cui si allontana dalla sua posizione d'equilibrio. L'altra estremità lasciata libera: subito che questa estremità si abbandona a se stessa la lama ritorna alla sua prima situazione, la oltrepassa in forza della velocità acquistata, torna nuovamente indietro, e fa una serie di oscillazioni di una estensione progressivamente minore, fin tantochè per la perdita di forza, cagionata dalla resistenza del punto d'appoggio, e dalla comunicazione del moto all'aria circostante, ritorna finalmente in quiete.

Quando queste vibrazioni, comunicate all'aria circostante, sono tanto rapide e forti da giungere successivamente alla membrana del timpano dell'orecchio, agitare questa membrana, e trasmettersi all'aria che vi si trova rinchiusa, allora esse producono nei nervi acustici un'impressione dalla quale risulta la sensazione del suono.

Se le vibrazioni di un corpo sonoro sono apprezzabili e regolari, esse formano il *suono distinto*, o il *suono propriamente detto*; quando poi queste vibrazioni sono irregolari esse formano il *rumore*.

L'acustica è particolarmente la scienza dei suoni distinti. Essa gli considera: 1° nei loro modi di generazione secondo i diversi corpi sonori; 2° nei loro rapporti numerici; 3° nella loro propagazione; e finalmente 4° nella sensazione, ossia nell'udito.

La generazione, la propagazione, e i rapporti numerici dei suoni formano la parte matematica dell'acustica; l'udito è l'oggetto della sua parte fisiologica.

L'acustica, ristretta per lungo tempo alla sola considerazione musicale dei suoni, è stata coltivata fino dalla più remota antichità; e Pitagora non è meno celebre per la scoperta dei rapporti fra le lunghezze delle corde vibranti che rendono differenti toni, che per gli altri suoi lavori. Questa scienza nonostante fece pochi progressi fino al termine del secolo decimo settimo. A Sbvaur membro dell'Accademia delle scienze di Parigi è dovuto l'onore d'aver fatto della teoria delle corde vibranti, e della sua applicazione alla musica, uno dei rami più importanti della fisica. Dopo di lui, Taylor, nel suo *Metodo degl'incrementi*, ha trattato il problema delle corde vibranti in un modo più profondo. Daniele Bernoulli sviluppò in seguito, e generalizzò la teoria di Taylor; ma la soluzione ge-

nerale e rigorosa è dovuta a Eulero e a d'Alembert. L'illustre Lagrange si è pure occupato di tal questione, che sembra aver dato origine al calcolo delle *differenziali parziali*.

Ad onta di tutti questi lavori, l'acustica si limitava ancora ad alcune considerazioni particolari, quando l'ammirabile scoperta fatta da Chladni della vibrazione delle superficie elastiche, aprendo un campo vasto e nuovo ai matematici e ai fisici, ha permesso finalmente di abbracciare la produzione del suono in tutta la sua generalità, di estendere i confini della scienza, e di completarne l'idea. Le esperienze di Chladni sono comprese nel suo *Trattato di acustica* pubblicato a Lipsia nel 1802 in-4.^a con 12 tavole, e quindi tradotto in francese dall'autore stesso durante il suo soggiorno a Parigi nel 1809, ed ivi pubblicato nello stesso anno in-8.^o con 8 tavole.

Dopo quest'epoca il sig. Savart generalizzando e variando le esperienze di Chladni si è elevato a considerazioni nuove, le di cui conseguenze per lo studio della costituzione molecolare dei corpi fanno dell'acustica una delle scienze più utili e più interessanti. Egli si è dedicato specialmente ai moti particolari delle molecole; ha determinato il senso, le leggi e i caratteri fisici dei diversi modi di oscillazione che esse possono ricevere; la trasmissione a tutta la massa di un corpo di un moto vibratorio impresso ad alcune sue parti; la comunicazione di questo moto ai corpi contigui; le modificazioni che ricevono questi fenomeni dalla natura particolare dei diversi corpi solidi; e finalmente ha dedotto da un'immensa serie di osservazioni un'analisi dell'organo dell'udito e della voce superiore a tutto ciò che si era potuto tentare prima di lui. Aiutati da questi nuovi dati i sigg. Poisson, e Cauchy hanno determinato le equazioni del moto vibratorio considerando i corpi elastici, nei quali esso ha luogo, come semplici aggregati di molecole materiali, tenute in equilibrio da forze incognite, ma sottoposte alla condizione di decrescere rapidamente colla distanza. Le formule alle quali questi geometri sono giunti, sono state fino ad ora trovate d'accordo con tutte le osservazioni, che si sono potute confrontare con esse.

Tratteremo dei rapporti numerici dei suoni all'articolo *MONOCORDO*; della loro generazione mediante la vibrazione dei corpi sonori agli articoli: *CORDE VIBRANTI*, *CORPI SONORI*, *SUPERFICIE ELASTICHE*; e della loro propagazione agli articoli: *SONO*, *ECO*, *POSSA-VOCE*, *CORNETTO ACUSTICO*.

ACUTANGOLARE (*Geom.*) Sezione acutangolare di un cono; è la sezione di un cono fatta da un piano obliquo al suo asse (*Vedi CONO*).

I primi geometri che si occuparono delle sezioni coniche non fecero attenzione che al cono retto, come viene definito da Euclide (*Def. 18., lib. XI*); e si applicarono unicamente alle sezioni formate da un piano perpendicolare ad uno dei lati del cono. È chiaro che una tal sezione è un'ellisse se il cono è acutangolo, una parabola se è rettangolo, ed una iperbole se è ottusangolo; poichè nel primo caso il piano secante incontra il lato opposto del cono, nel secondo caso il piano è parallelo al lato opposto, e nel terzo caso incontra il cono opposto al vertice del cono tagliato. Così Archimede non parla che della sezione del cono acutangolo, di quella del cono rettangolo, e di quella del cono ottusangolo. I nomi di *ellisse*, di *parabola* e d'*iperbola* si trovano per la prima volta usati da Apollonio, che fu probabilmente il primo ad osservare il cono scaleno e le sezioni ottusangole. Vedasi Wallis *Opera* Tom. I pag. 293.

ACUTANGOLO. *Vedi ACUZIANGOLO.*

ACUTO (*Geom.*). Chiamasi angolo acuto quello che è minore di un angolo retto (*Vedi NOZIONI PRELIMINARI*, 33.).

ACUZIANGOLO (*Geom.*). Triangolo acuziangolo è quello che ha i tre angoli acuti. Si chiama ancora triangolo ossigono (*Vedi NOZIONI PRELIMINARI*, 39.)

ADAGEGE. Vedi ADIGEGE.

** ADAR. Dodicesimo mese dell'anno ebraico, come si rileva dal Libro di Ester Cap. III. vers. 7: *Il mese duodecimo chiamato Adar*. Il nome di questo mese è caldeo, e non s'incontra nei libri più antiebi della Bibbia, in cui i mesi sono ordinariamente indicati col loro numero d'ordine.

Nel calendario ebraico Adar è il sesto mese: ma nel computo ecclesiastico è sempre l'ultimo dell'anno. Un anno composto di dodici mesi lunari è più corto di un anno solare di circa undici giorni, cosicchè se esso fosse sempre della medesima lunghezza, il principio dell'anno cadrebbe successivamente in tutte le stagioni. Per evitare questo inconveniente, tutte le nazioni che hanno adottato l'anno lunare (eccettuati i Maomettani) inseriscono un mese addizionale per ricondurre costantemente il principio dell'anno alla stessa stagione. Il mese addizionale nel calendario ebreo viene dopo Adar, ed è chiamato Ve-adar. Quest'aggiunta accade sette volte in diciannove anni.

Adar non può principiare prima del 1º di febbrajo nè più tardi del 3 Marzo. Nel 1838 principiò il 26 febbrajo. Nell'anno di dodici mesi Adar ha ventinove giorni, in quelli di tredici ne ha trenta.

Nel 7º giorno di questo mese da alcuni Giudei si osserva un digiuno in commemorazione della morte di Mosè, ed un altro se ne osserva il dì 9 per lo scisma di Shammai e Hillel. Il dì 13 del mese il digiuno di Ester viene osservato dalla intera nazione. Si dice che questo digiuno sia stato istituito in memoria dell'ordine dato di distruggere in quel giorno tutti gli Ebrei nell'Impero Persiano (Ester Cap. III. vers. 13). Se il 13 cade in sabato il digiuno di Ester si trasporta al giovedì precedente: mentre tutti gli altri digiuni (eccettuato il gran Digiuno di Espiazione che non può mai esser posposto) in simili circostanze hanno luogo la domenica seguente.

La festa di Purim, che dura due giorni, si celebra il 14 e il 15 del mese, in memoria dell'avvenimento per cui furono resi vani i disegni fatti per distruggere gli Ebrei. Questa festa era celebrata nel modo e nei giorni indicati nel Capitolo IX di Ester dai vers. 15-21. I due giorni furono dedicati a questa festa, perchè la strage dei nemici degli Ebrei cessò in questi due giorni nelle differenti provincie dell'impero.

Negli anni in cui si aggiunge il mese Ve-adar, il Purim e il digiuno di Ester appartengono a quel mese; ed il 14 di Adar vien chiamato il primo o piccolo Purim. Di qui si vede che nell'anno intercalare il primo Adar è effettivamente il mese intercalato, poichè le feste si conservano al mese Ve-adar.

La festa in onore della dedica del secondo tempio viene solennizzata da alcuni Ebrei il dì 16, e da altri il dì 23 del mese. Non si ha nessuna certezza sul giorno di questa dedica; il Tempio fu terminato il 3º giorno del mese. Esdra Lib. I Cap. VI., vers. 15: *E lavorarono attorno alla casa di Dio, fino al dì tre del mese di Adar, l'anno sesto del regno del re Dario*.

** ADAR è pure il nome del settimo mese dell'anno siro-macedone che quasi coincide col nostro mese di Marzo.

ADDIZIONE. Operazione il di cui scopo è di esprimere il valore totale di più numeri per mezzo di un solo.

ADDIZIONE, in aritmetica, è la prima delle operazioni fondamentali di questa scienza. Essa è semplice o composta: semplice, quando le quantità che si vogliono unire insieme sono espresse da numeri interi; composta, quando queste quantità contengono delle frazioni.

L'addizione semplice è dunque un'operazione per cui si riuniscono, in uno solo, più numeri interi, esprimenti diverse collezioni di un medesimo oggetto.

Per unire insieme piccoli numeri, come 5 e 4, non si deve fare altro che ag-

giungere successivamente ad uno di essi le unità le quali compongono l'altro: così si direbbe, 5 più 1 fa 6, 6 più 1 fa 7, 7 più 1 fa 8, e finalmente 8 più 1 è eguale a 9. Con l'abitudine, si acquista la facilità di fare tutte in una volta simili operazioni, e ciò è necessario onde potere sommare numeri grandi, secondo la regola che siamo per esporre.

Regola. Si scrivano i numeri che si vogliono sommare gli uni sotto gli altri in modo che le cifre di un medesimo ordine si corrispondano, vale a dire che le unità siano sotto le unità, le decine sotto le decine, le centinaia sotto le centinaia, ec., ec.

Si sommino successivamente le cifre della prima colonna verticale a destra, ossia della colonna delle unità. Se il risultato è un numero maggiore di 9, e che, per conseguenza, contenga delle decine e delle unità, si scrivano le unità sole sotto la colonna delle unità, e si ritengano le decine per unirle alle cifre della colonna delle decine; si sommino quindi le cifre della colonna delle decine, e si scrivano di nuovo le unità del risultato sotto questa colonna, ritenendo le decine di questo risultato, se ve ne sono, per aggiungerle alle cifre della colonna seguente. Si continui così di colonna in colonna fino alle cifre dell'ultima colonna a sinistra, sotto la quale si scriverà la somma come si sarà trovata.

Così per sommare i numeri 79345, 6854, 364, 9876 e 32624, si scriveranno gli uni sotto gli altri come segue:

$$\begin{array}{r}
 79345 \\
 6854 \\
 364 \\
 9876 \\
 32624 \\
 \hline
 129063
 \end{array}$$

E, cominciando dalla colonna dell'unità, si dirà: 5 e 4 fanno 9, 9 e 4 fanno 13, 13 e 6 fanno 19, 19 e 4 fanno 23; si scriverà 3 sotto questa colonna, e si riterrà 2. Passando alle decine, si dirà: 2 che si sono ritenute e 4 fanno 6, e 5 fanno 11, e 6 fanno 17, e 7 fanno 24, e 2 fanno 26; si scriverà 6, e si riterrà 2. Passando alle centinaia, si dirà: 2 che si sono ritenute e 3 fanno 5, e 8 fanno 13, e 3 fanno 16, e 8 fanno 24, e 6 fanno 30; si scriverà 0, e si riterrà 3. Passando alle migliaia, si dirà: 3 che si sono ritenute e 9 fanno 12, e 6 fanno 18, e 9 fanno 27, e 2 fanno 29; si porrà 9, e si riterrà 2. Finalmente venendo alle decine di migliaia, si terminerà l'operazione dicendo: 2 che si sono ritenute e 7 fanno 9, e 3 fanno 12, e si scriverà 12.

Così 129063 è la somma dei cinque numeri proposti.

Se i numeri che si vogliono sommare fossero composti d'interi e di frazioni decimali, la regola sarebbe assolutamente la stessa; anche in questo caso le cifre andando sempre acquistando un valore di dieci in dieci volte maggiore da destra a sinistra, sarebbe soltanto necessario di scrivere in una stessa colonna verticale le cifre di un medesimo ordine, regolandosi sopra quelle delle unità, eseguire quindi l'addizione colonna per colonna, come abbiain fatto nell'esempio precedente, senza fare attenzione ai decimali, e mettere al termine dell'operazione la virgola, che deve separare le cifre decimali, immediatamente avanti la colonna delle unità.

E S E M P J

34,5064	875,575
148,35	750,35
7,8603	87,655
4567,55	315,7255
4758,2667	2029,3055

Quando le frazioni che accompagnano gl' interi sono parti determinate dell' unità, e basta il loro nome per conoscere il rapporto che hanno con quest' unità, come per esempio, le *once* rapporto alla libbra, i *soldi* rapporto alla lira, ec. l'addizione prende il nome di *complessa*. Per eseguire un' addizione complessa, è necessario pure scrivere le quantità di una medesima natura le une sotto le altre. Per esempio, se si tratta di quantità composte di *libbre*, *once* e *denari*, si scriveranno le libbre sotto le libbre, l' *once* sotto le *once*, i *denari* sotto i *denari*, facendo corrispondere in una medesima colonna verticale le unità del medesimo ordine di ciascuna specie in particolare.

E S E M P J

libbre	once	denari	lire	soldi	denari
128	10	9	366	19	11
64	7	6	376	15	6
17	11	31	874	13	—
8	9	10	74	15	10
220	2	22	1693	4	3

Si prenderà in primo luogo la somma della più piccola specie, e si vedrà se questa somma contenga una o più unità della specie più grande: in quest'ultimo caso, si riterranno tali unità, e si scriverà il di più sotto la colonna sommata. Così, nel primo esempio, la somma 46 dei *denari* essendo equivalente a 1 *oncia* e 22 *denari*, non abbiamo scritto che 22 sotto la colonna dei *denari*, ed abbiamo ritenuto l'unità per aggiungerla alle *once*. La somma delle *once* essendo 37, e conseguentemente 38 con l' *oncia* che si è ottenuta dalla somma dei *denari*, questa somma equivale a 3 libbre e 2 *once*: perchè abbiamo scritto soltanto 2 sotto la colonna delle *once*, e si è portato 3 per aggiungerlo alle libbre. Ed in questa guisa abbiamo trovato per somma 220 libbre, 2 *once*, e 22 *denari*.

Nel secondo esempio, per ogni 12 *denari*, abbiamo portato un soldo alla colonna delle unità dei soldi, e per ogni 20 soldi abbiamo portato 1 lira alla colonna delle unità delle lire.

Dopo lo stabilimento in Francia del sistema decimale, le operazioni dei numeri complessi non vi si eseguiscano più per i bisogni ordinarij, se non per un' inveterata abitudine, che va perdendosi di giorno in giorno. Ma è essenziale di ben comprendere il principio di queste operazioni, per poter calcolare le misure estere le di cui suddivisioni sono stabilite sopra differenti scale.

Addizione delle frazioni. Quando le frazioni proposte hanno lo stesso denominatore, basta l'unire insieme i numeratori, e dare alla lor somma il denominatore comune: con questo mezzo si trova facilmente che la somma

di $\frac{5}{12}$ e $\frac{3}{12}$ è $\frac{8}{12}$, e che la somma delle quattro frazioni $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{11}{15}$ è $\frac{28}{15}$.

Questa regola è evidente, poichè si tratta di sommare soltanto quantità di una

medesima specie, cioè: *dodicesimi* nel primo caso, e *quindicesimi* nel secondo; ciò che non può dare per risultato che quantità della medesima natura, giacchè il denominatore non fa che esprimere il nome delle unità della frazione.

Se i denominatori sono differenti, siccome non si possono sommare insieme che quantità di una stessa natura, ed è impossibile di riunire, per esem-

pio, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ in una somma che si possa chiamare 2, bisogna perciò ridurre le

frazioni ad un medesimo denominatore, operazione che non cangia i loro valori, e che si eseguisce, per due frazioni, moltiplicando i due termini di ciascuna di loro per il denominatore dell'altra; e per più frazioni, moltiplicando i due termini di ciascuna frazione per il prodotto dei denominatori di tutte le altre (*Vedi Frazioni*). Ciò fatto, si sommano tutti i numeratori delle frazioni così ridotte, e si dà alla loro somma il denominatore comune.

E S E M P J

I° Siano da sommarsì le frazioni $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{5}$. Si ha subito

$$\frac{1}{3} = \frac{1.5}{3.5} = \frac{5}{15}, \quad \frac{1}{5} = \frac{1.3}{5.3} = \frac{3}{15};$$

così

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{5}{15} + \frac{3}{15} = \frac{8}{15}.$$

II° Si domanda la somma delle tre frazioni $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{17}$. Si riducono in primo luogo queste frazioni al medesimo denominatore, e si ha

$$\frac{5}{8} = \frac{5.9.17}{8.9.17} = \frac{765}{1224}, \quad \frac{2}{9} = \frac{2.8.17}{9.8.17} = \frac{952}{1224}, \quad \frac{2}{17} = \frac{2.8.9}{17.8.9} = \frac{144}{1224}.$$

Sommando in seguito i numeratori 765, 952, 144, si ottiene per la somma domandata $\frac{1861}{1224}$.

ADDIZIONE, in *algebra*, è l'operazione con la quale si trova la somma di più quantità algebriche. Qui è necessario fare attenzione ai *segni* dai quali le quantità sono affette. Per esempio, se si tratta di sommare $+a$ e $+b$, si esprimerà la somma per $+a+b$; quando si avrà $+4a$ e $+5a$, si scriverà $+4a+5a$, e, riducendo, $+9a$. Ma se si trattasse di sommare $+a$ con $-b$, la somma sarebbe $+a-b$. Infatti la quantità b , preceduta dal segno $-$, è ciò che si chiama una quantità *negativa*, vale a dire una quantità che è dotata della proprietà di diminuire, e che deve necessariamente esercitare questa proprietà dovunque si agginnga (*Vedi ALGEBRA*). Così la somma di $+3a$ e di $-a$ sarà $+3a-a$, ovvero, riducendo, $+2a$; quella di $+4a$ e di $-5a$ sarà $+4a-5a$, ossia $-a$; e così di seguito. Quando le quantità che si vogliono sommare sono composte di più termini, è necessario scriverle le une sotto le altre, facendo corrispondere i termini ove si trova una stessa lettera preceduta o no da coefficienti numerici; e quindi si riduce ciascuna colonna verticale in un solo termine, mediante l'addizione dei coefficienti numerici, come abbiamo ridotto $+4a+5a$, e $+4a-5a$, avendo cioè riguardo alla diversa natura dei *segni*.

ESEMPLI

Si domanda la somma delle quantità $7a+9b-3c$, $5b-4a+8d$, e $9c-2a-10b-11d$. Scrivendo queste quantità come abbiamo prescritto, si avrà

$$\begin{array}{r} 7a+9b-3c \\ -4a+5b \quad +8d \\ -2a-10b+9c-11d \end{array}$$

Ora,

$$7-4-2=1, \quad +9+5-10=4, \quad -3+9=6, \quad +8-11=-3.$$

La somma domandata sarà dunque $a+4b+6c-3d$. Ogni quantità che non è preceduta da alcun segno si suppone *positiva*, cioè affetta dal segno $+$ che si sottintende.

Si troverà egualmente che la somma delle seguenti quantità, scritte nell'ordine indicato,

$$\begin{array}{r} -7a^4+8a^3b-5a^2b^2+6ac \\ a^4-11a^3b \quad -5ac+6ad+e \\ -5a^4 \quad +7a^2b^2 \quad +3ad+5e \\ -8a^2b-6a^2b^2+4ac \quad -3e \end{array}$$

è eguale a

$$-11a^4-11a^3b-a^2b^2+5ac+9ad+3e.$$

ADDIZIONE delle frazioni algebriche. Operazione la quale ha per oggetto di trovare la somma di più frazioni algebriche.

Se le frazioni hanno lo stesso denominatore, si sommeranno i numeratori, e si darà alla loro somma il denominatore comune. Così si ha

$$\frac{7a}{14b} + \frac{5a}{14b} + \frac{8a}{14b} = \frac{20a}{14b}$$

$$\frac{5a}{17b} - \frac{10a}{17b} + \frac{3a}{17b} = -\frac{2a}{17b}$$

$$\frac{5a^2b}{4a^3c} + \frac{2a^2b}{4a^3c} - \frac{5ac^2}{4a^3c} = \frac{7a^2b-5ac^2}{4a^3c}$$

Quando le frazioni hanno denominatori differenti, si comincia da ridurle al medesimo denominatore; operazione che si eseguisce nella stessa maniera che per le frazioni numeriche, moltiplicando i due termini di ciascuna frazione per il prodotto dei denominatori di tutte le altre, dopo di che si effettua l'addizione colla regola di sopra indicata.

E S E M P J

1° Sommare le frazioni $\frac{3a^2}{4b^2}$, $\frac{2a^2}{3b}$, $\frac{5c}{6b^3}$. Riducendole al medesimo denominatore si avrà

$$\begin{aligned}\frac{3a^2}{4b^2} &= \frac{3a^2 \times 3b \times 6b^3}{4b^2 \times 3b \times 6b^3} = \frac{54a^2b^2}{72b^5}, \\ \frac{2a^2}{3b} &= \frac{2a^2 \times 4b^2 \times 6b^3}{3b \times 4b^2 \times 6b^3} = \frac{48a^2b^4}{72b^5}, \\ \frac{5c}{6b^3} &= \frac{5c \times 4b^2 \times 3b}{6b^3 \times 4b^2 \times 3b} = \frac{60b^2c}{72b^5},\end{aligned}$$

e la somma delle tre frazioni sarà

$$\frac{54a^2b^2 + 48a^2b^4 + 60b^2c}{72b^5}$$

espressione che si riduce a

$$\frac{9a^2b + 8a^2b^3 + 10c}{12b^3},$$

osservando che tanto il numeratore quanto il denominatore si possono dividere per $6b^3$ (Vedi Frazioni).

Si evitano simili riduzioni riducendo direttamente le frazioni al loro più piccolo comun denominatore; il che si effettua moltiplicando i due termini di ciascuna frazione per i fattori differenti, che si trovano in tutti gli altri denominatori, e che non sono contenuti nel suo. Così, nel precedente esempio, i denominatori essendo $4b^2$, $3b$, e $6b^3$, ossia 2.2.b.b, 3.b, e 2.3.b.b.b, si prendono in primo luogo i fattori differenti 3, b, 2, b, b, i quali entrano nei due ultimi (si considerano come differenti i fattori ripetuti più volte come 2.2, b.b, ec.); si tolgono i fattori 2, b, b, i quali sono contenuti nel primo denominatore, e si moltiplicano i due termini della prima frazione per i fattori rimanenti 3, b, donde si

ha $\frac{9a^2b}{12b^3}$. Si prendono in seguito i fattori differenti 2, 2, b, b, 3, b, i quali entrano

nel primo ed ultimo denominatore; si tolgono da essi i fattori 3, b, contenuti nel secondo, e si moltiplicano i due termini della seconda frazione per i fattori rimanenti 2, 2, b, b, o $4b^2$; il che dà $\frac{8a^2b^2}{12b^3}$. Finalmente si prendono i fattori

differenti 2, 2, b, b, 3 dei due primi denominatori; se ne tolgono i fattori 2, 3, b, b, contenuti nel terzo, e si moltiplicano i due termini della terza frazione per il

fattore rimanente 2; il che dà $\frac{10c}{12b^3}$. Sommando adesso le tre frazioni, si ottiene

immediatamente

$$\frac{9a^2b + 8a^2b^3 + 10c}{12b^3},$$

ossia l'espressione ridotta, che di sopra avevamo trovata con altro metodo.

110 Si troverebbe con questa regola che per ridurre le tre frazioni

$$\frac{4c^3}{3a^3b}, \frac{5a^3}{2b^3c}, \frac{7a^3c}{11b^3}$$

al medesimo denominatore, basta moltiplicare i due termini della prima per $22b^3c$, quelli della seconda per $33a^3b$, e quelli della terza per $6a^3c$. Eseguendo queste operazioni, si ottengono le tre frazioni seguenti

$$\frac{88b^3c^3}{66a^3b^3c}, \frac{165a^4b}{66a^3b^3c}, \frac{42a^3c^3}{66a^3b^3c}$$

eguali alle proposte, e di cui la somma

$$\frac{88b^3c^3 + 165a^4b + 42a^4c^3}{66a^3b^3c}$$

è espressa nel modo più semplice possibile.

Annunzia delle quantità radicali. Questa operazione serve a trovare la somma di più quantità radicali o irrazionali, che non si possono cioè esprimere in numeri razionali.

Regola. Si riducano tutte le quantità date alla loro più semplice forma, e si sommino quindi i coefficienti dei radicali eguali.

E S E M P I

Si sommino le seguenti quantità radicali

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt[5]{108a^4} + \sqrt[5]{32a} = 3a\sqrt[5]{4a} + 2\sqrt[5]{4a} = (3a+2)\sqrt[5]{4a}$$

Quando le quantità son ridotte alla loro più semplice espressione, ed i radicali sono diseguali, essi non possono essere sommati insieme che per mezzo del segno + posto fra loro. Così la somma delle quantità radicali

$$\sqrt{18} + \sqrt{108} = 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$$

non può essere ridotta ad una forma più semplice dell'ultima. Lo stesso si dica per tutti gli altri casi simili.

ADELBURNER (MICHELE), matematico, nato a Norimberga nel 1702, e morto nel 1779. Nel 1735 pubblicò il suo *Commercium astronomicum* che gli ottenne di esser fatto membro dell' accademia reale delle scienze di Prussia. Chiamato, nel 1743, ad Altdorf per darvi lezioni di matematica e di fisica, fu eletto professore di logica nel 1746. I suoi scritti principali sono: I. *Commercium literarium ad astronomiae incrementum, inter hujus scientiae amatores communi concilio institutum*, Norimbergae in-8.; II. *Fenomeni celesti notabili*; ne compariva un foglio tutti i mesi (in tedesco).

ADERAIMIN, o **ALDERAIMIN** (*Astron.*). Nome greco della stella segnata nei cataloghi colla lettera α nella costellazione di Cefeo.

ADESIONE (*Fisica*). Con questo nome s'indica una specie di attrazione che ha luogo tra le superficie dei corpi, e di cui gli effetti sono estremamente curiosi. Muschenbroek c'insegna che due cilindri di vetro, ciascuno di due pollici circa di diametro, essendo riscaldati al grado dell'acqua bollente, e congiunti l'uno con l'altro con un poco di sevo, aderiscono con una forza eguale a 130

libbre. Due cilindri di piombo, nella stesse circostanze, aderiscono con una forza di 175 libbre, e due cilindri di ferro con una forza di 300 libbre. Martin riferisce, nella sua *Filosofia britannica*, che avendo preso due palle di piombo, ambedue del peso di una libbra circa, formò sopra ognuna di esse con una lama di temperino una superficie piana di un terzo di pollice quadrato; applicò quindi queste superficie l'una contro l'altra, sottomettendo le palle ad una fortissima pressione, e la loro aderenza fu tale, che un peso di 150 libbre non fu sufficiente a separare le palle. Due lastre di rame di $\frac{1}{4}$ pollici e un quarto di diametro, spalmate di sevo, e applicate l'una contro l'altra dallo stesso osservatore, aderivano, dice egli, con una forza sì grande, che esso non poté trovare due uomini capaci di distaccarle.

Questi esempj bastano per dare un'idea della natura di questa forza, l'effetto della quale è proporzionale al numero dei punti di contatto delle superficie applicate; questo numero dipendendo dalla forma delle molecole costituenti dei corpi, come pure dal grado di finezza e di pulitezza delle superficie. Si sono impiegati varj mezzi per misurare la forza di adesione fra sostanze non simili, a temperature ed in circostanze diverse; ma il migliore è quello che è stato trovato dal Dott. Brook Taylor, che, dopo replicate esperienze, è stato condotto a concludere che l'intensità dell'adesione può esser determinata dalla forza necessaria a produrre la separazione delle superficie applicate; sopra di che può vedersi la di lui memoria inserita nelle *Transazioni filosofiche* per l'anno 1721. Con questo principio trovò che un pollice quadrato di legno richiede il peso di cinquanta grani per essere distaccato dall'acqua.

Il sig. Achard (Vedi *Mem. dell'accad. di Berlino* per l'anno 1776) fece un gran numero di esperienze sulla forza di adesione fra lastre di vetro di diversi diametri e parecchi liquidi, come pure sull'adesione di venti differenti sostanze con altrettanti liquidi. Era stato supposto che l'adesione derivasse dalla pressione atmosferica, ma il sig. Achard trovò che variando una tal pressione la forza adesiva del vetro e dell'acqua non soffrì alterazione; e che l'adesione tra i fluidi e i solidi era costantemente in ragione inversa della temperatura. La diminuzione della forza di adesione, per dipendenza dell'aumento di temperatura, fu attribuita da Guyton de Morveau alla rarefazione del fluido prodotta dal calorico, e alla conseguente diminuzione dei punti di contatto nel medesimo spazio.

Siccome le superficie dei solidi, impiegati dal Dott. Taylor e da Achard, debbono esser rimaste bagnate dal liquido, così alle loro esperienze è stato obiettato, e specialmente da Dutour nel *Journal de Physique*, che esse non provano nessuna adesione fra il solido e il liquido, ma semplicemente una coesione fra le due porzioni del liquido che sono state separate. Se tale obiezione è valida, debbono considerarsi come veri e proprii casi di adesione soltanto quelli, in cui nessuna parte della di una sostanza rimane attaccata all'altra dopo la separazione dalle loro superficie. Dutour trovò che un disco di vetro di undici linee di diametro aderisce al mercurio con una forza di 194 grani.

Guyton de Morveau, adottando il principio che la forza di adesione è misurata dalla forza che si richiede per effettuare il distacco delle due superficie adese, nel 1777 pubblicò ne' suoi *Éléments de chimie* una serie di esperienze sulla forza di adesione fra undici metalli e il mercurio. Ecco il metodo da esso tenuto: fece costruire dei cilindri di diversi metalli di un pollice di diametro, e tutti della stessa altezza: avendoli attaccati ad un piccolo anello, per tenerli in equilibrio, gli sospese l'uno dopo l'altro al flagello d'una bilancia posta in equilibrio mediante un peso sufficiente, e gli applicò sul mercurio posto a due linee di distanza, facendoli scorrere lungo la superficie per evitare l'interposizione dell'aria. In seguito se-

gnò esattamente il peso necessario per vincere l'adesione, avendo di più la cura di cambiare il mercurio ad ogni esperienza.

I risultati che ottenne sono i seguenti

L'oro aderisce al mercurio con una forza di 446 grani

Argento	429
Stagno	418
Piombo	397
Bismuto	372
Platino	282
Zinco	204
Rame	142
Antimonio	126
Ferro	115
Cobalto	8

Questo metodo, che, tutte le volte che può esser posto in uso, è il più diretto e il più esatto, è stato impiegato ancora con maggior precisione e chiarezza dai fisici moderni, come può vedersi nei trattati di fisica di Biot, Haüy, Pouillet etc.

Resulta da tutte le esperienze: 1° che esiste una tendenza di adesione fra molte, e forse fra tutte le sostanze fisiche, assolutamente indipendente dalla pressione atmosferica, o da qualunque altra pressione esteriore; 2° che la forza di questa adesione fra i solidi resulta dalle loro affinità chimiche, e che quella fra i solidi e i fluidi è in ragione inversa della temperatura del termometro, e in ragione diretta del quadrato delle superficie; 3° che ogni solido aderisce ad ogni liquido con una forza particolare, e che questa forza è espressa dal peso necessario per rompere l'adesione, tutte le volte che il solido può staccarsi dal fluido senza esserne bagnato; ma che, nel caso opposto, questo peso è il risultato della combinazione di due forze differenti, cioè dell'adesione fra la superficie del liquido e quella del solido, e della coesione fra le parti costituenti del liquido.

Nel tomo LXIII del *Philosophical magazine* si trova una memoria del sig. Bevan, nella quale il soggetto dell'adesione viene considerato in un punto di vista, a cui per l'avanti si era fatta pochissima attenzione. Egli prende ad esaminare la forza di adesione dei diversi chiodi infissi nei legni di differenti specie; cioè il peso, senza nessuna spinta, necessario ad infiggere un chiodo nel legno ad una data profondità, e la forza che si richiede per estrarlo. La parola *adesione* in questo caso indica la forza, derivante o dall'attrito, o dalla coesione, o da ambedue queste cause, colla quale il legno resiste all'estrazione di un chiodo. Il sig. Bevan ha dato una tavola di tal genere di adesione per differenti specie di chiodi conficcati in abete secco di Cristiania: in questa tavola si vede che un chiodo di 73 per libbra, lungo due pollici e mezzo, internato nel legno un pollice e mezzo, richiede un peso di 327 libbre per essere estratto; la forza di percussione necessaria ad infiggere lo stesso chiodo alla profondità di un pollice e mezzo, nell'abete secco, è di quattro colpi di un pezzo di ferro del peso di circa 6 libbre, che cada liberamente dall'altezza di 12 pollici; e la semplice pressione che si richiede per produrre lo stesso effetto è quella che esercita un peso di 400 libbre. Con differenti specie di legni i risultati variano grandemente, ed il sig. Bevan conclude che un chiodo della qualità di sopra accennata, conficcato nella quercia secca alla profondità di due pollici, richiede per essere estratto il peso di più di mille libbre. Il sig. Bevan (*Annals of Philosophy*, vol II, pag 291) ha pure determinato la forza necessaria per trar fuori una vite da differenti qualità di legno; le viti da esso adoperate avevano circa due

pollici di lunghezza, il diametro misurato dagli angoli salienti dei pani era 0,22 di pollice, e quello misurato dagli angoli rientranti era di 0,15, ossia i semplici pani avevano un'altezza di 0,035 di pollice; il numero dei pani era di dodici nello spazio di un pollice. Queste viti vennero inserite in pezzi di legno fino alla profondità di un mezzo pollice, ed estratte dai seguenti legni secchi mediante la forza degli annessi pesi:

Dal faggio con una forza di 460 libbre	
Dal frassino.	790
Dalla quercia.	760
Dal mahogane.	770
Dall'olmo.	655
Dal sicomoro.	830

La forza che si richiede per estrarre simili viti dall'abete e da altri legni più dolci è circa la metà.

ADHIL (*Astron.*). Stella di sesta grandezza, la quale fa parte della costellazione di Andromeda.

ADIACENTE (*Geometria*). Che è accanto. Due angoli sono *adiacenti* quando hanno un lato comune. Nulladimeno si chiamano più particolarmente *angoli ndiacenti* quegli angoli che non solamente hanno un lato comune, ma che hanno ancora gli altri due lati disposti in modo da formare una sola linea retta, come gli angoli BAD, DAC nella figura 12 della Tavola I (Vedi Nozioni Preliminari, 30). In un triangolo o in un poligono qualunque, si chiamano *lati adiacenti* i lati che formano un medesimo angolo.

ADIGEGE, o **ADAGEGE** (*Astron.*). Nome che gli Arabi diedero alla costellazione del Cigno, e che significa *rosa odorifera*.

AEGOCEROS (*Astron.*). Nome dato da alcuni autori alla costellazione del Capricorno.

AEROLITI (*Meteorologia*). Corpi caduti sulla terra dall'atmosfera, e detti così da *αἰρ* aria e *λίθος* pietra. Noi avevamo ricordi storici fino dalla più remota antichità di corpi pietrosi caduti dal cielo, ma fino ad un'epoca a noi molto recente tali notizie venivano considerate come racconti di persone ignoranti e superstiziose: il che c'insegna con quanta circospezione dobbiamo indurci a rigettare i fatti contenuti negli antichi scrittori. Quando fu trasmessa a Parigi dalle autorità locali la notizia ufficiale di una pioggia di pietre accaduta a l'Aigle in Normandia nel 1803, fu questo un soggetto di scherzo e di riso pei begli spiriti del giorno; ed i giornali espressero la loro compassione per il buon popolo dell'Aigle, che aveva un governatore sì semplice da prestar fede a simili sciocchezze.

Il primo dotto che abbia diretto la sua attenzione agli aeroliti fu Chladni, che, in una memoria pubblicata a Lipsia nel 1794 sul masso di ferro nativo trovato da Pallas in Siberia, sostenne la credibilità delle tradizioni che quello ed altri corpi pietrosi fossero caduti dal cielo. Nel 1796 fu portata a Londra una pietra di 56 libbre che si disse esser caduta in Yorkshire nel dicembre dell'anno precedente; ma quantunque il fatto fosse attestato da molti testimoni meritevoli di fede, la possibilità del fenomeno venne messo in dubbio. Pure sir Giuseppe Banks osservò che vi era una gran somiglianza fra la pietra di Yorkshire ed un'altra da lui posseduta, e portatagli dall'Italia come caduta dalle nuvole insieme con molte altre della stessa natura, vicino a Siena, nel Luglio 1794. L'incredulità cominciò a cessare quando nel 1799 Banks ricevé un circostanziato racconto, unito ad alcuni saggi, di una pioggia di pietre accaduta presso a Penares nelle Indie orientali nel precedente dicembre, e quando i saggi inviati furono trovati quasi identici alla pietra di Yorkshire. Ma non fu che dopo la ce-

lebre memoria di Howard nelle *Transazioni filosofiche* del 1802, in cui veniva data l'analisi delle pietre di Bensres, che i dotti cominciarono a credere uel fenomeno. L'Istituto di Francia incaricò il celebre Biot di esaminare tosto tutte le circostanze relative a tale importante fenomeno, ed il risultato delle ricerche di questo fisico si trovano nel Tomo settimo delle memorie dell'Istituto. Egli si convinse dell'autenticità dei fatti di sopra narrati; ed i saggi da esso raccolti, essendo stati analizzati da Vauquelin e Thenard, diedero i medesimi risultati ottenuti da Howard. Così l'ingegnosa induzione di Chladni, nel 1794, venne confermata e posta fuori di disputa; e Cuvier nel suo rapporto del 1809 su i progressi della scienza, durante gli ultimi dieci anni, dice: « che il fenomeno delle » pietre cadute dal cielo, conosciuto nell'antichità e nell'età di mezzo, è stato » stabilito come una verità in fisica soltanto in questo periodo, per le congetture » di Chladni, per le analisi di Howard, Vauquelin, e Langier, e per le ricerche » che di Biot. »

La caduta di tali pietre è sempre accompagnata da una meteora, che in tempo di notte apparisce come un globo di fuoco, circondato da un vapore risplendente, e con una coda a guisa di cometa; e nel giorno, a causa della gran luce del sole, e dei vapori che si sviluppano, la meteora sembra piuttosto una piccola nuvola di differenti colori, e di una forma particolare, che dopo una fortissima esplosione scoppia e scaglia sulla terra il suo contenuto. Gli aeroliti nel momento della loro caduta sono ad una temperatura elevatissima: in generale sono angolosi, di forme prismatiche e piramidali, con gli angoli smussati ed alquanto ritondati. La loro superficie è rivestita di una crosta vitrea vericcia, simile ad una vernice, che raramente eccede la grossezza di un quarto di linea. Spezzati, differiscono spesso in apparenza, ma per la maggior parte sono composti di una riunione di piccoli corpi sferici di color bigio, incastri in una sostanza arenosa, e sovente sparsi di macchie gialle. Una circostanza notevole è la gran somiglianza della composizione chimica di tutte le pietre meteoriche, in qualunque parte della terra sieno cadute, trovandosi circa 50 parti di silice, 25 di ferro quasi interamente ossidato, 5,5 di manganese, 4,5 di zolfo, 2,5 di nickel in stato metallico, 1,5 di manganese ossidato, 1,5 di cromo, e qualche atomo di cobalto. Ma sebbene tutti gli elementi costituenti si trovino in differenti sostanze minerali, pure nessuna combinazione di essi, simile a quella degli aeroliti, è stata scoperta o fra le rocce stratificate di qualunque formazione, o fra le rocce non stratificate, o fra i prodotti di qualunque vulcano sì estinto che in attività. Il loro peso specifico è di 3,50, ma è variabile secondo la diversa proporzione del ferro contenuto.

La comparsa di tali corpi non è periodica, nè connessa con alcun particolare stato dell'atmosfera, o della stagione, cadendo essi in tutti i climi, in tutte le stagioni, di giorno e di notte.

Chladni ha compilato un copioso catalogo di tutti i casi di aeroliti di cui esiste memoria, cominciando dai tempi più remoti, e servendosi in gran parte delle notizie previamente raccolte dal sig. Bossi, come può vedersi nel *Giornale di fisica, di chimica* ec. di Pavia, an. 1809: di questi, ventisette sono anteriori all'era cristiana, trentacinque sono accaduti dal principio del primo secolo fino al termine del secolo decimo quarto, e ottantanove dal principio del decimo quinto secolo fino alla caduta degli aeroliti dell'Aigle. Dall'indice di Chladni, e dalla continuazione compilata da Van Hoff si vede che negli ultimi trent'anni, da che l'attenzione dei dotti è stata diretta a questo soggetto, si rammentano sessanta differenti casi.

Fra gli esempj più notabili menzionati dagli antichi autori si possono citare i seguenti. Tito Livio racconta che sotto il regno di Tullo Ostilio (circa 654 anni

av. G. C.) una pioggia di pietre cadde sul monte Albano non lungi da Roma. Plutarco, nella vita di Lisandro, descrive una pietra caduta a Egaspotamos, nell'Ellesponto, vicino alla moderna Gallipoli, circa 405 an. av. G. C., la quale è pure rammentata da Plinio il vecchio, nel libro II della sua Storia Naturale. Il Sole era adorato ad Emesa, in Siria, sotto la forma di una pietra nera caduta dal cielo, secondo la tradizione popolare: questa pietra fu portata a Roma con gran pompa da Eliogabalo, che era stato sommo sacerdote del tempio, e la descrizione che ce ne ha lasciata Erodiano, nel libro V della sua Storia, si accorda perfettamente con i caratteri delle pietre meteoriche.

Oltre gli aeroliti propriamente detti, si sono ancora trovate delle masse di ferro malleabile, sovente di grandi dimensioni, le quali per la loro situazione e per la loro composizione non lasciano dubbio nessuno sulla loro origine meteorica. Un'immensa massa di ferro, diversa affatto da qualunque specie di minerale conosciuto, veduta da Pallas in Siberia, e che forma il soggetto della memoria di Chladni di sopra citata, fu trovata affatto isolata ad una grand'altezza sopra un monte, senza che potesse esservi il sospetto di una produzione artificiale. La tradizione voleva che fosse caduta dal cielo, e come tale era tenuta in venerazione dai Tartari; ma nel 1749 fu portata alla vicina città di Krasnojarsk per ordine dell'ispettore delle miniere di ferro. La massa, che pesava circa 1400 libbre, era di forma irregolare, non compatta ma cellulare come una spugna, le di cui cellette contenevano piccoli corpi granulari, conosciuti in seguito per quel ferro oligisto che spesso trovasi nel basalto. Un'altra gran massa di ferro meteorico fu trovata nell'America meridionale, nella giurisdizione di Santiago del Estero, circa 500 miglia a nord-ovest da Buenos-Ayres, e si trova descritta nelle *Transazioni filosofiche* dell'anno 1788, in una memoria di Don Rubin de Celis inviato dal governatore della provincia per esaminarla. Giace questa massa mezzo affondata nel terreno in una vasta pianura, ed ha tutti i caratteri del ferro meteorico, come lo provano le analisi di Turner, di Proust, di Howard ec.: il suo peso totale, rilevato dalle sue dimensioni e dal suo peso specifico, è di circa 26000 libbre. Un'altra massa fu scoperta nel Brasile, circa 50 leghe da Bahia, il cui peso fu stimato di 14000 libbre. Altri esempj di simili masse, che sono di origine evidentemente meteorica, potrebbero addursi; ma il solo che si abbia di ferro meteorico veduto cadere è quello che ebbe luogo ad Agram, in Croazia, nel 1751. Il 26 di Maggio, verso le ore 6 di sera, con un cielo tutto sereno, fu veduto un globo di fuoco, che passò con un romore sordo da ponente a levante, accompagnato da un gran fumo, e che dopo una grande esplosione scagliò sulla terra due grosse masse di ferro.

L'origine di questi fenomeni è avvolta nella più grande oscurità, e le varie teorie, che sopra di essi sono state formate, vanno soggette a molte ed imponenti obiezioni. Alcuni pensano che tali corpi cadano sulla terra dopo essere stati scagliati ad una grande altezza da qualche vulcano terrestre: altri credono che siano concrezioni formatesi nelle alte regioni dell'atmosfera: altri con Laplace gli vogliono corpi lanciati da qualche vulcano lunare a tale altezza, che, vinta l'attrazione della luna, se ne sia impadronita l'attrazione terrestre. Ma l'ipotesi più verosimile è quella proposta da Chladni, il quale suppone che siano corpi natanti nello spazio, o frammenti di corpi celesti di simil natura, distaccati dalla massa principale per l'urto di altro corpo, e che, incontrati nel loro corso dalla terra, ne siano attratti, e siano obbligati a traversarne l'atmosfera con tal rapidità da comprimere straordinariamente l'aria, incendiarsi, e produrre quelle meteore luminose che sempre accompagnano la caduta degli aeroliti. Infatti è stato veduto in America (*Transazioni filosofiche*, Vol. VI) percorrere rapidamente lo spazio un corpo immenso valutato 120 milioni di quintali: la sua velocità era di

circa 9 leghe per secondo, ed è passato ad una distanza da noi di circa 9 leghe: soltanto alcuni fantumi sono stati scagliati sulla terra, ma, se l'avesse urtata, terribili ne sarebbero stati gli effetti. Il celebre Davy ha pure adottato questa opinione in una sua memoria inserita nelle *Trattazioni filosofiche* dell'anno 1817. Chi desiderasse più estese notizie su questo interessante soggetto potrà consultare le seguenti opere: Chladni, *Sull'origine delle masse di ferro trovate da Pallas, e di altre masse simili* ec. Lipsia 1794 in 4°; questa memoria è stata tradotta in francese da Coquebert-Montbret, e inserita nel tomo V del *Journal des mines*. Chladni, *Sulle meteore ignee, e sulle masse solide che cadono con esse*, Vienna 1819 in-8, con 10 tavole in litografia spiegate da G. de Schreiberners. Lo stesso autore ha continuato le sue ricerche, e le ha pubblicate negli *Annali di fisica* di Gilbert. Dopo la sua morte il medesimo soggetto è stato trattato dal suo amico Van Hoff nella continuazione degli *Annali* di Gilbert fatta da Poggen-dorf: Izarn, *Lithologie atmosphérique*, 1803 in-8: Bigot de Morogues, *Mémoire historique et physique sur les chûtes des pierres*, Orleans, 1812 in-8: La *Bibliothèque universelle de Genève*, Luglio 1829: ed in fine i molti autori citati da Gerbi nel suo *Trattato di fisica* vol. IV. pag. 354, e segg., Pisa 1823 in-8. Laplace, Poisson, e Cossali hanno calcolato la velocità iniziale che dovrebbero avere gli aeroliti, supponendoli scagliati da un vulcano lunare, per potere arrivare a tale altezza da essere attratti dalla terra: i risultati ottenuti da Cossali si vedono nella sua memoria intitolata: *Sull'opinione delle piogge de' sassi dai vulcani lunari*, ed inserita nelle *Memorie della Società Italiana* Tom. XIII.

AEROMETRIA. Nome da alcuni autori dato alla scienza che tratta delle proprietà dell'aria. Vedi ARIA.

AEROSTAZIONE, AERONAUTICA (Storia). Queste parole, di cui la prima, nel suo senso primitivo è letterale, si applica alla scienza dei pesi sospesi in aria, servono oggi alternativamente a indicare l'arte di sostenersi o di navigare nell'aria, per mezzo di un apparecchio che vien chiamato *aerostato* o *pallone*, a motivo della sua forma sferica. Si dà il nome di *aeronauta* all'osservatore che dirige l'aerostato. Queste diverse parole comprendono così la teoria e la pratica di questa scienza, che comunemente indicheremo col nome di *aeronautica*.

La scoperta dell'aeronautica è così recente, e la sua storia è d'altronde sì generalmente conosciuta, che sembra impossibile il potervi annettere alcuna considerazione nuova. Ma la popolarità stessa di questa scoperta, l'importanza che potrebbe avere la realizzazione completa delle speranze che essa aveva fatto concepire, non solamente per la scienza, ma ancora per l'intero ordine sociale, ci determinano ad accordarle una menzione sufficientemente estesa in questo Dizionario.

L'uomo che è salito sulle più alte sommità della terra, ed ha percorso le immense solitudini dell'oceano, ha dovuto pensare in ogni tempo a penetrare pure nelle vaste regioni dell'aria, dove si formano il fulmine e gli oragani, dove sembra che il suo pensiero sia spesso attirato da un gran mistero di cui gli sia promessa la rivelazione. Non è questo vago sentimento di curiosità che gli ha fatto associare un'idea religiosa a quella facoltà tanto da lui invidiata di muoversi e di agire nell'aria? Esseri divini, o di cui la natura era superiore a quella dell'uomo godevano soli, in tutte le mitologie antiche, del potere di scorrere rapidamente le zone sconosciute e senza limiti, nelle quali leggi eterne regolano i moti degli astri.

Pare nulladimeno che l'antichità, mentre non accordava che ad intelligenze superiori la facoltà di muoversi negli spazi atmosferici, non abbandonasse affatto l'idea di poter dare all'uomo questa prerogativa maravigliosa: il pensiero di elevarsi nell'aria mediante un apparecchio aerostatico, come sarebbero per esempio

delle ali di una dimensione insufficientemente grande per sostenere il peso di un uomo; si trova in alcuni scritti antichi. Tralasciando di parlare delle avventure favolose di Ahari e di Dedalo, e di altre simili, Strabone rammenta i Capnobati o Capnioi, popolo della Scizia, che (come stranamente dalla greca parola καπνός fumo è stato interpretato il loro nome) si sollevavano in aria per mezzo del fumo. I popoli della Carolina, per ciò che ci narra il gesuita Cantova, hanno una favola intorno ad una deità che sale al cielo sul fumo di un gran fuoco. Possiamo pure rammentare la colomba d'Archita; l'oracolo di Jerapoli, che Luciano asserisce di aver veduto alzarsi in aria; la favola, nella mitologia brettona, di Bladud o Baldud padre di Lear, che somiglia a quella di Dedalo; ed altre molte, che tutte servono a far vedere, che l'idea della possibilità di sollevare in aria un uomo o una macchina era molto estesa presso gli antichi. Ruggero Bacone (*De mirabili potestate artis et naturae*, Parigi, 1542) dice che certamente vi è una macchina che vola, della quale conosce il nome dell'inventore, ma che nè egli nè altri da lui conosciuto ha mai veduta. Van Helmont ed altri provano la possibilità di volare con ragionamenti così eloquenti, da persuadere chiunque gli ascolti. Giovanni Wilkins, nel libro intitolato il *Dedalo*, che è il secondo della sua *Magia matematica*, stampata a Londra nel 1648 in-8°, e quindi nel 1680, propone un carro che navighi in aria per mezzo di vele simili a quelle di un mulino a vento: una stessa cosa è stata ancora attribuita ai Chinesi. Rammenteremo pure Schott, Giambattista Porta, Cardano, Fabri, e Borelli, che sostengono la possibilità di volare. Il gesuita Francesco Lana nella sua opera intitolata: *Prodromo dell'arte maestra*, Brescia, 1670, nella stamperia del Rizzardi, in-folio con rami, opera divenuta in oggi rarissima, diede forse la prima idea di un pallone propriamente detto. Propone egli d'innalzare una navicella per mezzo di quattro globi metallici, forti abbastanza da resistere alla pressione dell'aria esterna, allorché vengano vuotati dell'aria interna, e nel tempo stesso così sottili da esser più leggeri di un egual volume di aria. Ne fu parlato in quel tempo con molto calore nel *Collegium experimentale sive curiosum* di Sturm, Norimberga, 1676-85, 2 vol in-4; e Leibnitz fece su questo argomento varj calcoli che possono vedersi nella sua *Hypothesis physica nova*; ma dubita però della buona riuscita della macchina. Il *Journal des Savans* an. 1676 pag. 426 parla di una macchina per volare immaginata da un tal Besnier. Il padre Giuseppe Galien, domenicano, immaginò pure un mezzo per navigare in aria, in una memoria intitolata: *L'art de naviguer dans les airs*, Avignone 1755 in-12.

Come un avvertimento poi a non credere ciecamente ai racconti, che ci vengono fatti dagli scrittori del secolo decimo settimo e dei secoli precedenti sulle macchine volanti, non crediamo inutile di riportare il seguente esempio. Sesto di Ratisbona, Kircher, Porta, Schott, Gassendi, Lana, Ramus, Wilkins, tutti concordemente asseriscono che Regiomontano costruì un'aquila che volò da Norimberga ad incontrare l'Imperatore (Carlo V, dicono alcuni dei rammentati scrittori), e che dopo averlo incontrato tornò indietro alla città volando sul suo capo per tutto il cammino. Se vi è alcuno che sia disposto a credere a questo racconto, non deve disgiungerlo dalla circostanza di fatto, che Regiomontano morì venticinque anni prima che Carlo V nascesse; la qual cosa non fu avvertita dai citati autori. Dopo questo esempio, taceremo della colomba di Kircher, del carro di Stevino, del carro volante di Desforges annunziato nelle gazzette del 1772, del vascello volante immaginato da Blanchard nel 1782, del quale fu incisa la figura, ma di cui non si fece mai uso, e di tante altre macchine pretese volanti, e ci contenteremo di concludere, che sebbene l'arte di volare fosse stata diligentemente studiata o almeno discussa per molti secoli, pure gli uomini non possedevano nessun mezzo per risolvere questo gran problema avanti la scoperta di cui Giuseppe Montgolf-

fier, nato a Darvezieux, presso ad Annonay, il 6 Agosto 1740, fece ad Avignone il primo esperimento nel mese di Dicembre 1782, esperimento che esso rinnovò ad Annonay il 5 Giugno 1783, e che così ci viene descritto da Stefano Montgolfier.

« La macchina aerostatica, la cui esperienza fu fatta avanti ai Signori degli « Stati particolari del Vivarese, il giovedì 5 del mese di Giugno 1783, era fabbricata « di tela foderata di carta, cucita sopra una reticella di spago fissata alle tele. « Essa era a un dipresso di forma sferica, e la sua circonferenza era di cento- « dieci piedi: un telaio di legno di 16 piedi quadrati tenevala fissata nella parte « inferiore. La sua capacità era di 22000 piedi cubi in circa; essa dunque scacciava, « supponendo il peso mediò dell'aria un ottocentesimo di quello dell'acqua, una « massa d'aria di 1980 libbre. Il peso del gas era circa la metà di quello dell'aria, « poichè pesava 990 libbre, e la macchina col telaio pesava 500 libbre; restavano « dunque 490 libbre per romper l'equilibrio, il che fu trovato conforme al- « l'esperienza. I differenti pezzi della macchina erano uniti da semplici botto- « niere fermate con bottoni; due uomini bastarono per montarla e per empirla « di gas, ma ve ne vollero otto per rattenerla quando fu gonfiata. Lasciata li- « bera ad un dato segnale, si sollevò con un moto accelerato in principio, ma « meno rapido sul fine dell'ascensione, fino all'altezza di circa 1000 tese. Un vento « appena sensibile sulla superficie della terra la trasportò a 1200 tese di distanza « dal punto di partenza. Rimase in aria dieci minuti: la perdita del gas uscito « per le bottoniere, e per i fori degli agbi, ed altre imperfezioni della macchi- « na non le permisero di restarvi di più. Il vento, nel momento dell'esperienza, « era al mezzodì, e pioveva; la macchina calò sì dolcemente che non ruppe né « i rami né i pali della vigna sulla quale andò a posare »

Gl'Inglese hanuo voluto rapire alla Francia l'idea prima di questa scoperta, della quale così raccontano l'origine. Qualche tempo dopo che Cavendish ebbe studiato e fatto conoscere le proprietà del gas idrogene, il dottor Black assicurò che se un apparecchio tenne e leggero, come una vescica, fosse ripieno di questo gas, formerebbe una massa meno pesante di un equal volume di aria atmosferica, e potrebbe per conseguenza elevarsi e sostenersi in aria. L'onorevole dottore sviluppò questa idea ne' suoi corsi pubblici nel 1767 e 1768, ed annunziò ancora un prossimo esperimento del processo da lui indicato; ma le numerose sue occupazioni gl'impedirono di dare esecuzione a questo suo progetto. La possibilità di costruire un apparecchio, che ripieno di gas idrogene si elevasse nell'atmosfera, venne in mente ancora al sig. Cavallo. Ad esso bisognerebbe accordare il merito delle prime esperienze in questo proposito, fatte da lui nel principio dell'anno 1782, esperienze intorno alle quali fu letto un rapporto alla Società reale di Londra il 20 Giugno dello stesso anno. Il sig. Cavallo si servì inutilmente di molte vesciche; la più leggera di tutte quelle che egli provò, sebbene preparata colla massima accuratezza, si trovò ancor troppo pesante. In seguito si servì di carta della Cina; ma l'aria infiammabile scappava pei pori di questa materia, come l'acqua passa a traverso al nido staccio. Dopo essergli tornati vani tutti questi diversi tentativi, sebbene avesse sempre intonato i suoi apparecchi di gomma, di vernice, e di colori a olio, fu obbligato ad eseguire le sue esperienze con bolle di sapone, che egli empiva di aria infiammabile per mezzo di una vescica piena di questo gas.

Ammettendo come certi tutti questi fatti che noi non abbiamo ragione alcuna per revocare in dubbio, si vede almeno che l'aeronautica era per così dire in germe in Inghilterra, nel tempo che Montgolfier eseguiva in Francia un'esperienza concludente. Noi dobbiamo pure fare osservare di passaggio, che la scoperta di Cavendish non pare che abbia ispirato a Montgolfier l'idea della sua, poichè essa riposava interamente sul potere che egli attribuiva alla rarefazione

dell'aria: e non fu che bruciando della carta sotto il globo di taffetà, a tal fine preparato, che Montgolfier ottenne l'ascensione. E l'intendente della provincia del Vivarese trasmise la nuova della scoperta all'Accademia delle scienze annunziando soltanto questo processo (a). Lalande rendendo conto di questo avvenimento, aggiunge: « Noi diciamo tutti, ciò deve essere appunto così; in qual maniera non vi si è pensato prima? ». Si vede che a quell'epoca non si pensava punto alle proprietà dell'aria infiammabile, e alla sua applicazione all'aeronautica, poichè il semplice processo di Montgolfier parve a quella dotta società, che contava fra i suoi membri dei matematici e dei fisici insigni, il solo mediante il quale potesse risolversi il problema della navigazione nell'aria. (b)

La nuova di un avvenimento così straordinario si sparse rapidamente in Francia, e vi fu accolta con un entusiasmo difficile a descriversi. Fin da quel momento non si dubitò che non fosse facile di dare agli aerostati una direzione utile, regolando il loro cammino nell'aria, e che per conseguenza la navigazione aerea non fosse per divenire in breve tanto comune quanto quella dell'oceano. L'uomo credè di

(a) Dobbiamo qui per la verità osservare che Montgolfier non bruciò la carta sotto il pallone per rarefare l'aria in quello rinchiusa, ma per aumentarne l'elettricismo: poichè, credendo egli che l'elevazione delle nuvole fosse cagionata dalla presenza del fluido elettrico, la sua intenzione era quella d'imitare il fenomeno naturale delle nuvole, elettrizzando l'aria atmosferica. Questo si rileva dal *Discorso sull'aerostato all'Accademia di Lione* dello stesso inventore Giuseppe Montgolfier, impresso nel 1783 in-8. Di più osserveremo che non si pensò subito dai dotti che la rarefazione dell'aria fosse la vera ragione dell'ascensione delle mongolfiera: infatti anco dopo le replicate esperienze di Montgolfier e di Pilâtre de Rozier il sig. Faujas de Saint-Fond, nella sua *Descrizione delle esperienze aerostatiche* ec. Parigi 1783 in-8, parla dell'aria rarefatta come di un gas particolare, *sui generis*, di un peso specifico la metà minore di quello dell'aria, e di cui egli dice di non potere esporre con esattezza tutta la proprietà, per non esserne ancora stata fatta l'analisi chimica. Lo stesso si legge nell'articolo *Ballon* del *Dizionario di Fisica* che fa parte dell'*Enciclopedia Metodica*. Del principio della rarefazione dell'aria si fu espressamente parola nella lettera, che il Canonico Carlo Castelli spedì al sig. Faujas, dandoli la relazione del primo viaggio aereo fatto in Italia, il 25 febbrajo 1783, da Paolo Andreani e dai fratelli Agostino e Carlo Giuseppe Gerli, in una villa distante da Milano otto miglia, la qual lettera si trova inserita nel secondo tomo che fu aggiunto alla seconda edizione del 1784 dell'opera di Faujas. *I Traduttori*.

(b) In questo punto gli Autori francesi cadono in altro errore. Oltre quello che si è detto nella nota precedente, come può aversi che i membri dell'Accademia delle scienze non supponessero che si fosse altro mezzo per elevarsi in aria fuori che quello dalla rarefazione, quando prima di conoscere il processo tenuto da Montgolfier fu eseguita in Parigi l'ascensione di un pallone ripieno di gas idrogeno? Allorchè giunse a Parigi la nuova dell'esperienza di Annonay fu detto soltanto che Giuseppe Montgolfier aveva lanciato in aria un gran globo riempendolo di di un gas la metà più leggero dell'aria; ma non si seppe di qual gas si fosse fatto uso, avendone l'inventore fatto un mistero: a solo dalla descrizione dall'apparecchio, dal peso specifico, dalla prontezza con cui si era ottenuto il gas, e da altre circostanze, si argomentò con certezza che non poteva essere il gas idrogeno. Fu però risoluto di ripetere l'esperienza riempendo di quest'ultimo gas un pallone fatto di taffetà inverniciato con una soluzione di gomma elastica. L'esperienza fu eseguita sul Campo di Marte il 27 Agosto 1783 alla presenza di un'immensa popolazione, e dello stesso Stefano Montgolfier, che allora era già arrivato a Parigi, ma che non aveva per anche palestrato di qual gas si era servito e sarebbe stato per servirsi nelle sue esperienze. Ciò non toglie nulla però alla gloria dei fratelli Montgolfier, perchè in fatto di scoperte l'onore è tutto di quello che il primo eseguì e non di chi semplicemente progettò. Gli esperimenti di Cavillo, sebbene conclusivissimi, non pregiudicano adunque ad essi come non pregiudicano loro le invenzioni chimiche dal P. Lana, del P. Galien ec. Soltanto ci sia permesso di osservare che nello stato delle cognizioni scientifiche nel 1783 non poteva tardare a scoprirsi l'aeronautica, anco senza l'esperienza di Annonay. Infatti bastò a Parigi di essere accertati della sola possibilità dell'ascensione aerea, per tentarla ed eseguirla con successo. Cavallo fu sul punto di scoprirla, ma si lasciò prevenire da altri. Così Cesalpino lasciò rapirsi da Harvey la scoperta della circolazione del sangue; così il Grimaldi si lasciò rapire da Newton la scoperta della refrangibilità della luce ec. ec. *I Traduttori*.

aver fatto un' immensa conquista, e l' Accademia delle scienze invitò Montgolfier a venire a Parigi a ripetervi i suoi esperimenti, a sue spese e sotto gli occhi de' suoi membri. Fu Stefano Montgolfier fratello dell' inventore degli aerostati, e che sembra avere avuto una gran parte nei suoi studj su questo soggetto, che si rese al desiderj dell' Accademia. Le esperienze che subito furono eseguite sopra una scala molto più grande di quella che aveva avuto luogo ad Annonay, sembrano essere state fatte nel senso di queste speranze.

Montgolfier infatti si occupò a far costruire, nel giardino del sig. Réveillon, in via Montreuil nel sobborgo S. Antonio, una macchina di 70 piedi di altezza e di 40 di diametro. Essa era di grossa tela foderata sì di dentro che di fuori di una carta consistente. Il suo peso era di 1000 libbre, e la sua capacità di circa 50000 piedi cubi. Un simil volume di aria valutavasi circa 4500 libbre, ed il vapore di cui doveva esser ripiena la macchina, essendo una volta più leggero dell'aria comune, non pesava più di 2250 libbre; eravi dunque un eccesso di leggerezza di 1250 libbre, ed il pallone poteva alzare un tal peso. Il 12 Settembre 1783 fu il giorno destinato all'esperienza da farai in presenza dei Commissarii dell'Accademia delle Scienze: e sebbene il tempo fosse pessimo fu risoluto di empir il pallone. Cinquanta libbre di paglia asciutta, che si andò accendendo a covoni, su cui in più volte furono gettate dodici libbre di lana fatta in pezzetti, produssero in dieci minuti un vapore sì espansivo e dotato di una tal forza, che la macchina ad onta del suo peso, sebbene depressa e piegata sopra sé stessa, gradatamente e come per ondulatione drizzossi: il suo volume fece maravigliare gli spettatori, ed allorchè fu sviluppata per intero raddoppiaronsi la sorpresa e l'ammirazione. La macchina lasciò terra dopo esserle stato appeso un carico di cinquecento libbre. Se in quel momento si fossero tagliate le corde che la rattenevano si sarebbe sollevata ad un' altezza grandissima: sopraggiunse la pioggia; soffiò con impeto il vento, e siccome l'aerostato era destinato per esperienze che si volevano fare a Versailles in presenza del Re, non si volle lasciar partire. Gli sforzi che si fecero per farlo calare, uniti ad un vento furioso, lo lacerarono e lo ridussero in uno stato affatto inservibile: ma intanto era già costatato il potere dell'aerostato sui pesi estranei alla sua massa.

Diverse esperienze di questo genere, sebbene spesso contrariate dallo stato dell' atmosfera, permisero di credere agli straordinarj vantaggi della scoperta. Le memorie di quel tempo scritte da dotti accreditatissimi ci rappresentano il grande entusiasmo che essa ispirò, e l' esagerazione delle speranze che se ne concepirono. Nel 19 Settembre 1783 fu fatta a Versailles, alla presenza del Re e della famiglia reale, una nuova esperienza con un pallone di 57 piedi d' altezza, e di 41 di diametro: il suo volume era di 37500 piedi cubi circa, ed occupava così il posto di 319a libbre d' aria. Una gabbia, contenente un montone, un gallo ed un'anatra, venne appesa alla macchina, la quale sebbene rimanesse molto danneggiata da un violento colpo di vento, nonostante si elevò in aria, con i suoi passeggeri destinati ad aprire i primi all' uomo un cammino nelle regioni atmosferiche, all' altezza di 1440 piedi; vi si sostenne per circa otto minuti, e cadde a una distanza di 10300 piedi dal punto in cui aveva avuto luogo la sua ascensione. Gli animali non ne risentirono verun danno.

La forza delle macchine aerostatiche essendo così constatata, e la gradazione colla quale si operava la loro discesa allontanando qualunque idea di pericolo per l' osservatore che con esse si elevasse nell' aria, Pilâtre de Rozier si offrì il primo (a) a fare la prova di questa navigazione. Il suo nome merita di esser

(a) Tutti gli autori dicono concordemente che Pilâtre de Rozier fu il primo a tentare la navigazione aerea, e soggiungono che nel suo viaggio ebbe per compagno il marchese d' Arlandes.

trasmeso alla posterità, perchè faceva d'uopo di coraggio e di grandezza di animo per esporsi in una fragil barchetta nell'immensità degli spazj aerei, ed andar così, nnovo Cristoforo Colombo, a prender possesso, in nome dell'umanità, di quella regione tempestosa, in cui forse dovevano scoprirsi grandi misteri, che erano rimasti nascosti alle generazioni passate. Dopo parecchi saggi, che Pilâtre in principio fece solo e quindi con un compagno di viaggio, Giroud de Villette, saggi che ebbero per oggetto di assicurarsi dei mezzi di dirigere l'aerostato, e di farlo discendere a piacere, un'esperienza decisiva fu tentata il 21 novembre 1783. Siccome essa occupa un posto importante nella storia dell'aeronautica, così crediamo di doverne render conto con una certa estensione.

La macchina costruita nel sobborgo S. Antonio, presso Réveillon, il di cui nome divenne tristemente celebre alcuni anni dopo, era di forma ovale, ed aveva circa 46 piedi di diametro, e 70 di altezza: e la sua capacità era di 60000 piedi cubici. La sua parte superiore era circondata di gigli, ed ornata dei segni dello Zodiaco in color d'oro: nel mezzo si vedevano le armi del Re frammiste a soli; ed il basso era guarnito di mascheroni, di ghirlande, e di aquile colle ali spiegate, che parevano portare a volo questa superba macchina, il cui fondo era azzurro. Una galleria, o terrazza circolare, costruita di ginocchi, e coperta di tela e di altri ornamenti, era attaccata con un gran numero di corde al basso della macchina: aveva essa circa tre piedi di larghezza, e tanto a dritta quanto a sinistra eravi una balaustrata o parapetto di tre piedi e mezzo di altezza. Questa galleria non interrompeva l'apertura di 15 piedi circa di diametro, che era al basso della macchina, ma le serviva al contrario di continuazione; e in mezzo a quest'apertura era collocato un fornello di filo di ferro sospeso con catene, per mezzo del quale le persone che erano nella galleria con provvisioni di paglia, potevano comodamente mantenere o diminuire il fuoco secondo che piacesse loro di salire o di scendere. Il peso di quest'apparecchio, compresi quello de' due arditi osservatori che erano per farne uso, era di circa 1600 libbra.

Il compagno di Pilâtre fu il marchese d'Arlandes. L'aerostato, partito dai giardini annessi al Castello de la Muette, dove allora trovavasi la corte del Delfino, si elevò rapidamente a un'altezza prodigiosa, e venticinque o trenta minuti dopo scese a terra alla distanza di cinque leghe da Parigi. Il marchese d'Arlandes ci ha lasciato un racconto interessantissimo di questo viaggio aereo, che si trova inserito nella *Descrizione delle macchine aerostatiche* di Faujas de St. Fond. Pare che gli aeronauti incontrassero varie correnti d'aria che influirono sensibilmente sul cammino della macchina. La direzione dei diversi urti che questa provò parve effettuarsi d'alto in basso. Il pallone fu in pericolo imminente di rimaner preda delle fiamme. Non fu senza provare il più vivo terrore che d'Arlandes scoprì nella parte inferiore dell'apparecchio varj fori cagionati dal fuoco: ma avendo bagnato con una spugna la parti del pallone più prossime al fuoco, arrestò facilmente i progressi dell'incendio, ed ogni apparenza di pericolo svanì.

Con quest'ultimo viaggio di Pilâtre e del marchese d'Arlandes termina la storia della scoperta di Montgolfier, cioè quella delle macchine aerostatiche che s'innalzano coll'azione del fuoco, e che dall'inventore hanno preso il nome particolare di *mongolfiere*. Per meglio comprendere l'uso dell'aria infiammabile

Se con questo modo d'esprimersi, s'intenda di accordare una parte principale al primo, ed una secondaria al secondo, crediamo necessario di rettificare i fatti in questo proposito. Imperocchè la persona destinata ad eseguire il primo viaggio aereo, che ebbe luogo il 21 Novembre 1783, fu il marchese d'Arlandes; e soltanto nel giorno precedente all'ascensione si risolvette egli, dietro il consiglio di Montgolfier, a prendere un compagno nella persona di Pilâtre. Si veda la relazione dello stesso d'Arlandes nel secondo tomo dell'opera di sopra citata di Faujas. *I Traduttori.*

che fu sostituita al fuoco dal celebre fisico Charles e dal meccanico Robert, crediamo di dovere entrare adesso in alcune particolarità sulla teoria dell'aeronautica.

I principj di questa scienza sono interamente fondati sulle leggi della gravità, della pressione, e dell'elasticità dell'aria, e su quelle del peso specifico di questo fluido e dei corpi destinati a navigare nello spazio che esso occupa. Da tutte queste leggi insieme combinate è stabilito in un modo certo ed assoluto che ogni corpo, che è specificamente, cioè ad eguaglianza di volume, più leggero dell'aria atmosferica, deve elevarsi e sostenersi in aria, presso a poco come il legno o il sughero si elevano e si sostengono nell'acqua. Siccome però esiste una progressione decrescente nella densità dell'atmosfera, che sta in ragione della diminuzione della pressione dell'aria superiore, il corpo che s'innalza non può continuare la sua ascensione al di là di quel punto, in cui l'aria circostante eguaglia il suo peso specifico; giunto a quest'altezza deve galleggiare o essere spinto nella direzione delle correnti d'aria colle quali venga in contatto. Un aerostato o pallone è un corpo di questo genere, di cui tutta la massa deve essere di un peso specifico minore di quello dell'aria atmosferica nella quale deve elevarsi.

Si sa che il calorico applicato all'aria la rarefa, la dilata, e ne diminuisce per conseguenza il peso specifico. Questa diminuzione del peso si effettua in proporzione del grado d'intensità del calorico. Per ogni grado del termometro di Fahrenheit il calorico pare che dilati l'aria di circa $1/400$: così 400 gradi di calorico, o più esattamente 435, raddoppieranno precisamente il volume di una massa d'aria. Se dunque l'aria rinchiusa in un apparecchio qualunque venga modificata dal calorico, e per conseguenza si trovi dilatata fino al punto che il suo peso sia minore di una massa eguale di aria, quest'apparecchio deve elevarsi nell'atmosfera fintantochè l'aria in esso contenuta divenga più fredda e si condensi, oppure fintantochè l'aria circostante divenendo meno densa, queste due specie di aria giungano ad avere un medesimo peso specifico. In questa circostanza l'apparecchio deve tornare a scendere gradatamente, se il suo peso specifico non venga di nuovo diminuito colla rinnovazione del calorico. Ma se in luogo di ricorrere a questo mezzo, che non può essere adoprato se non con grandi pericoli, l'apparecchio fosse pieno di un fluido elastico più leggero dell'aria atmosferica, esso continuerebbe ad elevarsi fino ad un'altezza, in cui gli strati d'aria circostanti avessero lo stesso grado di peso specifico.

Quest'ultimo problema fu risolto mediante l'uso del gas idrogeno. Come si è detto di sopra il fisico Charles, e il meccanico Robert si esposero i primi ai rischi di questa esperienza. L'apparecchio, che fecero costruire per mezzo di una sottoscrizione che fu immediatamente ripiena, differiva per molti rapporti dalle mongolfiere. Era desso di forma sferica, di un diametro di ventisei piedi, e fatto di taffetà verniciato di gomma elastica (*caoutchouc*) sciolta in olio di trementina. Una rete fu tesa sull'emisfero superiore del pallone e fissata al cerchio che ne segnava la metà; era essa terminata da corde alle quali si sospese una navicella, in cui dovevano collocarsi gli aeronauti, e da cui per mezzo di una corda, l'estremità della quale era nelle loro mani, potevano far manovrare una valvola costruita alla sommità dell'apparecchio. Questa disposizione aveva per oggetto di permettere ai viaggiatori, se non di dirigere il pallone, almeno di renderlo a piacere più pesante, col fare uscire una certa quantità di gas (*Tav. XIII, fig. 1*).

Quest'esperienza ebbe luogo il primo Dicembre 1783 nel giardino delle Tuileries. Charles e Robert salirono nella navicella a quattro ore meno un quarto, e s'alzarono rapidamente nell'aria, in mezzo agli applausi ed alle grida di gioia di una moltitudine immensa, accorsa da tutte le parti nella capitale della Francia, per godere di questo spettacolo sì strano e sì nuovo. Gli aeronauti percorsero in

pochi minuti uno spazio di nove leghe; dopo di che Robert essendo sceso, Charles risalì solo, e si elevò fino all'altezza di 1500 tese. Vide di nuovo nascere il sole, e come egli disse: « Io era il solo oggetto illuminato, essendo tutto il resto della natura immerso nell'oscurità ». Un piccolo pallone, lanciato da Montgolfier pochi momenti avanti l'ascensione, percorse un cammino totalmente differente, il che fece nascere per la prima volta il sospetto, che a diverse altezze esistessero diverse direzioni nelle correnti aeree.

A Lione, il 19 Gennaio 1784, venne eseguito il terzo viaggio aereo da sette persone, fra le quali Giuseppe Montgolfier e Pilâtre di Rozier, in una mongolfiera di 102 piedi di diametro e di 126 d'altezza, la più grande che sia stata mai costruita. Sei sole erano le persone destinate a fare il viaggio, ed anche queste si conobbe esser troppe, ma nessuna rimostranza poté indurre alcuno a lasciare il suo posto. Nel momento in cui furono tagliate le funi saltò dentro la galleria una settima persona, che il rapido elevarsi della macchina impedì di fare uscire: uno squarcio prodotto nel pallone dal troppo carico lo fece discendere con una velocità straordinaria, ma nessuno rimase offeso.

Il quarto viaggio fu eseguito in Italia, il 25 febbrajo 1784, in una villa del Cav. Paolo Andreani distante otto miglia da Milano, in una mongolfiera di forma sferica di un diametro di sessantasei piedi circa. Gli aeronauti in numero di tre, cioè il Cav. Paolo Andreani suddetto, ed i fratelli Agostino e Carlo Giuseppe Gerli meccanici milanesi, si elevarono all'altezza di 1200 piedi, ed il viaggio durò circa venti minuti. Il Can. Carlo Castelli ci ha lasciata una dettagliata descrizione di quest'ascensione.

Nel 2 Marzo 1784 fu fatto a Parigi il quinto viaggio aereo da Blanchard, in un pallone a gas idrogeno. Quest'aeronauta aggiunse alla navicella un timone e delle vele, che però non gli furono di nessuna utilità per dirigere l'aerostato.

In Inghilterra lo spettacolo di un pallone volante fu ammirato la prima volta a Londra, il 25 Novembre 1783, per opera del Conte Zambecari, che mandò in aria un aerostato di dieci piedi di diametro, ripieno di gas idrogeno. E il primo ad eseguire il volo aereo nello stesso paese fu l'italiano Vincenzio Lunardi, che, nel 15 Settembre 1784, partì da Londra in un pallone a gas idrogeno, e andò a discendere a Standon vicino a Ware.

Nel 7 Gennaio 1785 fu la prima volta attraversato il canale della Manica, in un pallone volante, dai sigg. Blanchard e Dott. Jeffries. Essi si alzarono dal castello di Dover, sulla costa orientale d'Inghilterra, e andarono a scendere nella foresta di Guinnea, dopo essere stati obbligati a gettar via tutto il loro carico per impedire che il pallone cadesse in mare. I viaggiatori furono accolti con feste straordinarie, e nel luogo dove erano discesi fu alzata una colonna in memoria del fatto. Questo viaggio è stato in seguito eseguito da altri, ma non può negarsi ammirazione ai primi che lo tentarono, e felicemente vi riuscirono.

Molte esperienze dopo quest'epoca sono state tentate all'oggetto di perfezionare la scoperta degli aerostati. Alcune hanno avuto risultati funesti. Pilâtre de Rozier, il primo che si era cimentato ad un'ascensione aerea, volle combinare il gas idrogeno coll'aria rarefatta dal fuoco. Fece uso di due palloni posti l'uno sotto dell'altro, di cui il superiore era ripieno di gas idrogeno, e l'inferiore di aria atmosferica riscaldata. Era questo, disse giudiziosamente un celebre fisico moderno, un mettere un fornello sotto un magazzino di polvere. Il 15 Giugno 1785 Pilâtre de Rozier e Romain fecero a Boulogne la prova di questa nuova combinazione: essi si innalzarono coll'intenzione di passare la Manica; ma non erano appena scorsi venti minuti dopo la loro partenza, quando la macchina prese fuoco, e i due viaggiatori perirono vittime del loro amore per i progressi della scienza. Anco l'italiano Zambecari è morto in un'esperienza aerostatica.

Tre viaggi sono stati intrapresi con un fine totalmente scientifico. Il primo, nel 1804, fu fatto dal sigg. Biot e Gay-Lussac, che si elevarono ad un'altezza di 13000 piedi; il secondo, nello stesso anno, da Gay-Lussac solo, che si elevò all'altezza di 23000 piedi, la più grande a cui l'uomo sia mai arrivato; ed il terzo, nel 1806, dai signori Carlo Brioschi, astronomo reale a Napoli, morto nel 1833, e Paolo Andreani, il primo aeronauta italiano, i quali cercando di andare più in alto di Gay-Lussac incontrarono un'atmosfera così rarefatta, da far crepare il pallone, i di cui avanzi servirono però a rompere alquanto la rapidità della caduta, e a salvare loro la vita. Nulladimeno nessuna esperienza ha fatto conoscere alcuna utile applicazione dei palloni volanti, i quali fino ad oggi non sono serviti che ad eccitare la pubblica curiosità, e ad aumentare gli allettamenti delle feste popolari. I francesi crederono di potere applicare l'aeronautica all'arte della guerra; ma il saggio che ne fecero alla battaglia di Fleurus non è stato in seguito rinnovato, il che prova che esso fu presso a poco infruttuoso.

Non dobbiamo peraltro passare sotto silenzio che Garnerin, dopo averne dato un saggio a Parigi il 3 Messidoro dell'anno VII (21 Giugno 1799), e nuovamente a Pietroburgo nel 1800, fece a Londra nel 21 Settembre 1802 l'ardita esperienza di salire in un pallone, e di discenderne coll'ajuto di un *paracadute*, apparecchio che era stato immaginato da Blanchard (a). Il paracadute non è che un grande ombrello di tela, di circa trenta piedi di diametro, ma senza stecche e senza manico, disposto in modo da potere essere aperto dall' aeronauta, che si pone, quando vuol fare uso dell'apparecchio, in una cesta di giunchi che vi è attaccata. Quando il paracadute si trova separato dal pallone, si apre necessariamente a motivo della resistenza dell'aria, e permette all'aeronauta di scendere gradatamente a terra. Quest'esperienza riuscì completamente a Garnerin. Quando questo celebre aeronauta tagliò la corda per distaccarsi dal pallone, e discendere col paracadute, cadde subito con una gran rapidità, ma dopo alcuni istanti, quando l'apparecchio si aprì, cominciò a discendere lentamente e gradatamente. Giungendo a terra Garnerin soffrì parecchie scosse: aveva i lineamenti alterati quando venne sintonato ad uscire dalla cesta, ma riprese immediatamente i suoi sensi (Tav. XIII, fig. 2 e 3).

La oggi non si fa più nessuna esperienza aeronautica senza servirsi del gas idrogeno. Questo mezzo è molto costoso, e rende per conseguenza difficili i progressi di cui quest'arte è forse suscettibile.

Esistono varii mezzi per preparare il gas idrogeno che serve ad empiri i palloni: tutti però sono più o meno costosi. Quello che si ottiene mediante la riduzione in cenere del carbone fossile necessita una perdita di tempo che deve evitarsi in tal genere di esperienze, ed esige d'altronde l'uso di un apparecchio troppo imbarazzante. Generalmente si adopra il gas ottenuto mediante la scomposizione dell'acqua per mezzo dell'acido solforico, e della limatura di ferro: a tal processo è appunto disposto l'apparecchio rappresentato dalla figura della Tavola XIV.

B, B, sono due serbatoj circondati da botti che contengono l'acqua e la limatura di ferro; queste botti hanno nella loro parte superiore dei tubi di stagno che s'immergono fino al fondo dei serbatoj. A, A, sono due apparecchi che ricoprono i due serbatoj B, B, e che danno passaggio al gas per mezzo di due altri tubi di stagno, ai quali si adattano dei tubi flessibili che vanno a termi-

(a) Al sig. Lenormand è dovuta la prima invenzione del paracadute, sebbene per molto tempo sia stata essa attribuita al sig. Blanchard. Si veda il Tomo XXXVI degli *Annali di Chimica*, e l'articolo *Paracadute del Dizionario delle Origini, Invenzioni, e Scoperte*, stampato a Milano nel 1830, 4 vol. io-8.

nare nell'interno del pallone. Quando si versa l'acido solforico nelle botti, il che si fa per mezzo dei fori situati nella loro parte superiore, che si chiudono esattamente dopo questa operazione, l'acqua si decompone, e il gas che si sviluppa dalle diverse botti va a riunirsi nei serbatoi B, B, dai quali è condotto nell'interno del pallone per mezzo dei tubi flessibili dei quali abbiamo parlato.

Crediamo di avere esposto in questo breve epilogo della storia dell'aeronautica tutto ciò che più direttamente interessa la scienza, ma non abbiamo potuto abbandonarci a considerazioni speculative sopra questa scoperta. Essa non ha fatto che pochi progressi dopo l'esperienza di Charles, e il problema della navigazione nell'aria non è stato ancora sciolto che per metà. Restano adesso da scoprirsi i mezzi per dirigere l'aerostato: nessuna delle esperienze intraprese a tale oggetto ha avuto fino a questo giorno un esito soddisfacente. Ma non è questa però una ragione per disperare del successo, e da un momento ad un altro una nuova combinazione della scienza può arricchire l'umanità della soluzione completa di questo importante problema.

Chi fosse curioso di conoscere la storia e la teoria dell'Aeronautica potrà consultare le seguenti opere: Cavallo, *Storia e pratica dell'aerostazione*, Londra, 1785 in-8; Faujas de Saint-Fond, *Description des expériences de la machine aérostatique de M.M. Montgolfier*, Parigi, 1783, 1 vol in-8, ed ivi ristampata nel 1784 coll'aggiunta di un secondo volume: il primo volume di quest'opera è stato tradotto in italiano, e stampato a Venezia nel 1784 in-8; una lettera del principe Napoleone Luigi Buonaparte al Prof. G. Guzzari inserita nell'*Antologia* di Firenze, Aprile 1828; Bourgeois, *Recherches sur l'art de voler*, Parigi, 1784 in-8; l'articolo *Ballon* del *Dizionario di fisica* che fa parte dell'*Enciclopedia metodica*, Parigi, 1786; l'articolo *Aérostation* del *Dizionario di matematiche* del dott. Hutton, Londra 1796, 2 vol. in-4; Gerli (i fratelli), *Maniera di migliorare e dirigere i palloni aerei*, Roma 1790; Montgolfier (Giuseppe), *Discours sur l'aérostas à l'Académie de Lyon*, 1783 in-8; lo stesso, *Mémoire sur la machine aérostatique*, 1784 in-8; lo stesso, *Les voyageurs aériens* 1784 in-8; Henrion (Francesco), *Breve memoria sopra la possibilità della direzione delle macchine aeronautiche*, Firenze (Cambiagi) 1787 in-8 pic.; lo stesso, *Fondamenti teorico-pratici dell'arte aeronautica*, Firenze 1789 in-8; Cossali, *sull'equilibrio esterno ed interno delle macchine aerostatiche*, Verona 1784; ed in fine *I saggi sull'Aerostatica*, e *sull'Aeronautica* del tenente colonnello cav. Marco Antonio Costa di Palermo. Quest'opera, che ci è nota solo per una lettera del Prof. Gio. Battista Amici, inserita nella gazzetta di Firenze del 24 Maggio 1838 N° 62, è divisa in tre parti, delle quali la prima, contenente la parte storica dell'aeronautica, forma un primo volume che è già stato stampato recentemente a Napoli.

AEROSTATICA (Da *αἴρ* aria, e da *στα* sto). Scienza dell'equilibrio dell'aria. Le leggi principali dell'idrostatica si applicano all'aria considerata come un fluido pesante (*Vedi* IDROSTATICA). Si possono dunque stabilire i seguenti principj.

1° Ogni pressione si propaga egualmente in tutti i sensi.

2° La pressione è eguale in tutti i punti di ciascun piano orizzontale; ma a motivo della gran leggerezza dell'aria questa pressione diminuisce molto più lentamente che nei liquidi, a misura che si va in alto, e segue un'altra legge di decrescimento.

3° Ogni corpo che si trova nell'aria perde tanta parte del suo peso quanto è il peso di un egual volume di aria.

4° Un corpo più leggero d'un egual volume di aria atmosferica si eleva nell'atmosfera fino all'altezza in cui si trovi in equilibrio coll'aria circostante, poichè la densità dell'aria diminuisce in ragione della sua altezza al di sopra della superficie della terra. La teoria degli aerostati o palloni è fondata su questo principio. Si veda l'articolo AEROSTAZIONE.

5° L'aria essendo non solamente un fluido pesante, ma ancora un fluido elastico, e l'elasticità dei fluidi tendendo costantemente ad ingrandirne il volume, è necessario, perchè l'equilibrio possa aver luogo, che il peso sia eguale alla forza di elasticità: perciò come il peso aumenta o diminuisce colla densità, così l'elasticità dell'aria aumenta e diminuisce nello stesso rapporto. *Vedi ARIA.*

AFELIO (*Astron.*) (Da *αφο* lontano, e da *ἥλιος* Sole). Punto dell'orbita di un pianeta in cui la sua distanza dal sole è la più grande. È una delle estremità dell'asse maggiore dell'ellisse che i pianeti descrivono intorno a quest'astro: l'altra estremità di quest'asse maggiore si chiama *perielio*.

Negli antichi sistemi di astronomia, nei quali la terra si supposeva immobile nel centro dell'universo, l'*afelio* diviene l'*apogeo*. *Vedi APOGEO.*

Rappresenti S (*Tav. XI, fig. 3*) il sole, SAB l'orbita della terra, ossia il piano dell'eclittica, ed SA una parallela alla linea lungo la quale l'equatore terrestre taglia l'eclittica, dalla qual linea si misurano tutte le longitudini eliocentriche (cioè misurate intorno al sole) nella direzione del moto della terra indicato dalla freccia. Sia CED una parte dell'orbita di un pianeta, ed SE la linea più lunga che possa esser condotta da S: sarà E l'*afelio* del pianeta. Se si conduca ora un piano SEG perpendicolare all'eclittica, l'angolo ASG sarà la longitudine eliocentrica dell'*afelio* E. Questa parola non si usa parlando dei satelliti sebbene anch'essi abbiano i loro *afelj*.

Gli *afelj* dei pianeti non sono fissi, poichè le orbite ellittiche che vengono descritte da essi hanno tutte, fuori che quella di Venere, un piccolo moto annuo, che si eseguisce in *consequentia*, ossia secondo l'ordine dei segni. Una tale ineguaglianza si esprime dicendo che gli *afelj* di tutti i pianeti, eccetto Venere, crescono lentamente in longitudine, mentre quello di Venere diminuisce. È l'attrazione scambievole, che i pianeti esercitano gli uni sugli altri, che produce il moto continuo più o meno sensibile degli *afelj*. L'esposizione delle leggi di questo moto non è l'oggetto di quest'articolo (*Vedi PERTURBAZIONE*). Soltanto diremo che questo soggetto è stato trattato nel Libro XXII dell'*Astronomia* di Lalande; nelle diverse memorie di Eulero sulle ineguaglianze di Saturno e di Giove; nell'Opera di Clairaut intitolata: *Théorie de la Lune deduite du seul principe de l'attraction* in-4, premiata nel 1752 dall' accademia di Pietroburgo; e nelle *Recherches sur différens points importants du système du monde* di d'Alembert, Parigi 1754-56, 3 vol. in-4. Adesso dobbiamo spiegare come possa determinarsi la posizione dell'*afelio* per mezzo delle osservazioni astronomiche.

Sia EBACE (*Tav. XI, fig. 4*) l'orbita ellittica di un pianeta, ed S il fuoco di quest'orbita occupato dal Sole. Di più sia ASP l'asse maggiore, o, come più spesso si dice, la *linea degli apsidi*. A sarà il punto dell'*afelio*, e P il punto del *perielio*. Ora l'asse divide l'ellisse in due parti eguali, che sono percorse in tempi eguali e con gli stessi gradi di velocità, avendosi la massima velocità al *perielio* e la minima all'*afelio*. Ma se si conduce per il fuoco S un'altra retta DE, essa dividerà l'ellisse in due parti che non saranno, nè eguali, nè percorse in tempi eguali: poichè la parte DACE sarà evidentemente descritta in un tempo più lungo di quello che sarà necessario per descrivere l'altra parte DBPE. Così, scegliendo due osservazioni di un pianeta, in cui le longitudini ridotte eliocentriche si trovino diametralmente opposte fra loro, se l'epoca di queste osservazioni sono tra loro distanti del tempo di una mezza rivoluzione del pianeta, allora queste osservazioni saranno state fatte nella linea stessa degli apsidi: se al contrario l'intervallo di queste epoche differisce da quello della mezza rivoluzione, le posizioni osservate si avvicineranno tanto più all'*afelio* e al *perielio* quanto più piccola sarà la differenza. Questo metodo che è il più semplice, e che è dovuto a Keplero (*Astronomia nova* pag. 208), riesce benissimo per trovare l'*apogeo*

del sole: sopra di che si vedano le memorie dell'accademia di Parigi an. 1757 pag. 141.

Per i pianeti le di cui opposizioni sono frequenti il metodo precedente è di facile applicazione; ma per quelli, nei quali tali opposizioni non hanno luogo che a lunghi intervalli di tempo, siamo obbligati a ricorrere ad un'altra considerazione per trovare l'afelio. Si prendono due osservazioni fatte l'una in vicinanza dell'afelio A, e l'altra in vicinanza del punto C, situato alla distanza media del pianeta dal sole: così si ha il moto vero, ossia l'angolo ASF; mentre dalla durata intera della rivoluzione, si conosce il moto medio per un intervallo di tempo qualunque. La differenza tra il moto vero osservato, e il moto medio calcolato deve trovarsi d'accordo coll'equazione dell'orbita, se l'osservazione fatta verso l'afelio A corrisponde esattamente a questo punto; ma, se vi è una differenza, si troverà un'errore nell'equazione calcolata verso il punto A, dove essa cangia rapidamente, mentre non ve ne sarà quasi alcuno verso il punto F, dove, trattandosi di una distanza media, l'equazione varia pochissimo: così il moto totale da A in F, ottenuto per mezzo del calcolo, non sarà conforme al moto risultante dall'osservazione, che quando avremo fatto uso del luogo vero dell'afelio A. Bisognerà dunque cangiare d'ipotesi fintantochè il calcolo non sia conforme all'osservazione, e allora si avrà la vera situazione dell'afelio.

Lalande ha impiegato, per determinare l'afelio di Mercurio, il seguente metodo. Sia T (Tav. XI, fig. 4) la posizione della terra, ed F quella del pianeta in vicinanza delle distanze medie; la terra vedrà il pianeta nella direzione del raggio visuale TF, che tocca l'orbita in F, e che segna la massima digressione STF. Per poco che si cangi la direzione della linea degli apsi, il raggio SF cangia di posizione muovendosi verso il punto G, dimanierachè l'angolo di elongazione diviene STG, ed allora il calcolo non si accorda più coll'osservazione supposta fatta nella linea TF. Bisogna dunque fare differenti ipotesi fino a che si giunga alla vera. Su questo metodo, che fa conoscere l'afelio mediante l'angolo d'elongazione, può consultarsi per maggiori particolarità la memoria di Lalande nelle Memorie dell'Accademia di Parigi an. 1766 pag. 498, come pure la di lui *Astronomia*.

Sono stati immaginati ancora altri metodi per trovare gli afelij dei pianeti: Delambre ne ha adoprato uno nuovo, del quale nel suo *Trattato d'astronomia* fa un'applicazione al pianeta di Marte. Questo metodo era stato scoperto da Bouvard (*l'edi DELAMBRE, Astronomia Cap. XXI, Tom. II*).

Il moto apparente degli afelij è più grande del vero, perchè la linea SA (Tav. XI, fig. 3) si muove lentamente indietro contro l'ordine dei segni ogni anno di 50",1 (*l'edi PRECESSIONE*). Il moto annuo apparente degli afelij è la precessione annua degli equinozi aumentata del moto annuo reale, eccettuato il caso di Venere, in cui il moto apparente è la precessione degli equinozi diminuita del moto reale. Il moto apparente dell'afelio di Venere è però come quello di tutti gli altri pianeti, cioè nella direzione del moto della terra, poichè sebbene l'afelio di Venere abbia un moto retrogrado, la linea SA si muove pure indietro con una maggior rapidità. La tavola seguente dà, per l'epoche che vi si vedono accennate, le longitudinali eliocentriche degli afelij dei corpi che compongono il sistema solare, insieme con l'annuo apparente aumento di longitudine, composto come si è detto dell'aumento vero e della precessione. Quello dei nuovi pianeti e delle comete non può ancora considerarsi determinato con tanta accuratezza e precisione, con quanta lo è quello degli antichi pianeti.

ANTICHI PIANETI. (1 Gennaio 1801)		
PIANETI	LONGITUDINE ELIOCENTRICA DELL' APELIO	MOTO ANNUO APPARENTE DELL' APELIO
Mercurio	254° 21' 47"	55",9
Venere	308 43 53	47 ,4
Terra	279 30 5	61 ,8
Marte	152 23 57	65 ,9
Giove	191 8 35	57 ,1
Saturno	269 9 30	69 ,1
Urano	347 31 16	52 ,5
NUOVI PIANETI (1 Gennaio 1820)		
Vesta	69° 33' 24"	94",2
Giunone	233 33 46	indeterminato
Cerere	327 7 32	121 ,3
Pallade	301 7 4	indeterminato
COMETE		
DATA	NOME DELLO SCOPRITORE	LONG. DELL' APELIO
1835	Halley	123°
1832	Eneke	337
1832	Biela	288

AFELLAN. (*Astron.*). Nome della bella stella dei Gemelli indicata nei cataloghi colla lettera α . Viene pure chiamata *Castore*.

AFFERMATIVO (*Alg.*). Una quantità *affermativa* è la stessa cosa che una quantità *positiva*, cioè una quantità affetta dal segno $+$.

AFFETTO (*Alg.*). Questa parola si usa per esprimere che una quantità è modificata dal concorso di un'altra quantità, o da un segno particolare. Per esempio, nell'espressione $3x$, la x è *affetta* dal coefficiente 3; nell'espressione $-x$, questa stessa quantità è *affetta* dal segno $-$; finalmente nell'espressione $\sqrt{x}$, la quantità x è *affetta* dal segno radicale $\sqrt{}$.

In algebra si dice che un'equazione è *affetta*, quando l'incognita è elevata, in due o più termini, a gradi diversi, cosicchè l'equazione stessa non possa ridursi ad avere due termini soli, uno dei quali contenga l'incognita ad un grado qualunque, e l'altro le sole quantità cognite. Tale è, per esempio, l'equazione $x^3 + px^2 + qx = a$, nella quale si hanno tre differenti potenze di x , cioè x^3 , x^2 , e x .

AFFEZIONE (*Geom.*). Antica espressione che significa la stessa cosa che *proprietà*.

Così si diceva una volta: questa curva ha la tale *affezione*: per dire, ha la tale proprietà.

AFFLITTO (GIAN MARIA), domenicano versatissimo nelle scienze matematiche, delle quali fece dotte applicazioni all'arte di fortificare le piazze. Chiamato in Spagna da Don Giovanni d'Austria vi pubblicò un trattato delle *fortificazioni* in 2 vol. in-4°. Morì a Napoli nel 1673.

AGELET (GIUSEPPA LEPAUTE D'), membro dell'accademia delle scienze di Parigi, nacque a Thone-la-Long, vicino a Montmédy, il 25 di Novembre 1751. Studiò astronomia sotto Lalande. Nel 1773 partì in qualità di astronomo con la spedizione alle terre australi, comandata da Kerguelin. Allorchè si presentò all'accademia nel 1780, esibì dei giornali con più di 1600 osservazioni sui pianeti, e con altre in maggior numero sulle stelle. Nel 1783 scrisse delle memorie sull'*afelio* di Venere, e sulla lunghezza dell'anno. Nel 1785 partì di nuovo, come astronomo, colla disgraziata spedizione di La Peyrouse intorno al mondo, e con essa perì sulle coste di Vanikoro, gruppo di due isole nell'arcipelago di Santa-Cruz nel grand'oceano equinoziale. Il luogo del naufragio non è stato scoperto che nel 1828 dal sig. Dumont d'Urville, nel suo viaggio intorno al mondo, eseguito espressamente a tale oggetto per ordine del governo sulla corvetta l'*Astrolabio*, negli anni 1826, 1827, 1828, 1829.

AGENTE (*Mec.*). Forza o potenza che produce un moto o tende a produrlo.

AGEZIO (TADDEO), astronomo e medico dell'Imperatore Massimiliano, nato in Ageb, in Boemia, nel secolo XVI. Abbiamo di lui una descrizione della cometa del 1578.

AGNESI (MARIA GAETANA), nacque a Milano il dì 16 marzo 1718, e divenne uno dei più rari esempi della precocità dell'intelligenza, nel tempo stesso che essa si distinse per cognizioni superiori, acquistate per mezzo di studj astratti, che la debolezza naturale e le abitudini sociali sembrano interdire al suo sesso. In età di nove anni, Maria spiegava di già con una chiarezza ed una facilità sorprendente i passi più oscuri degli autori latini. Ma la giovinetta sdegnò ben presto tali studj elementari: essa volle imparare il greco, l'ebraico, il francese, il tedesco e lo spagnuolo: essa riuscì con una prontezza che ha del prodigioso in questo progetto, dal quale i suoi parenti e i suoi maestri tentarono invano di distoglierla. Fin qui le maravigliose disposizioni, di cui Maria Agnesi era dotata, avrebbero potuto paragonarsi con quelle che l'Italia aveva precedentemente ammirato in Pico della Mirandola; ma essa non tardò ad applicare alle più sublimi concezioni dell'intelligenza queste cognizioni, che spesso appartengono alle sole facoltà della memoria, e possono così non essere che il risultato di una felice organizzazione. La giovine Maria si diede allo studio della filosofia con quella confidenza e fermezza, che inspira l'amore della scienza e del vero: essa vi portò le ispirazioni di un ingegno superiore, e sostenne, all'età di diciannove anni, 191 tesi pubbliche su i punti più controversi della metafisica e della psicologia. Tali tesi vennero rinite e stampate in quell'epoca sotto questo titolo: *Propositiones philosophicae* (Milano, 1738).

Tanti studj non avevano esaurito, in questa giovinetta, nè il suo ardore per la scienza, nè quella maravigliosa facilità di acquistarla. Il padre di Maria occupava con grido una cattedra di matematiche nell'università di Milano: essa le studiò con successo, nè fu arrestata dalle gravi difficoltà che presentano le parti trascendentali di tale scienza. A questi ultimi studj Maria Agnesi deve soprattutto la fama che rende celebre ancora il suo nome; ed è per tal titolo che questa donna illustre deve occupare un posto in questo Dizionario.

La reputazione di Maria divenne europea; i suoi concittadini esternarono la loro ammirazione decretandole quegli onori popolari, che l'Italia ha saputo

render sì cari ai grandi talenti. I suoi diversi biografi la rappresentano come una persona semplice e buona, quasi timida, e che pareva non comprendere la viva impressione che la sua presenza eccitava nelle riunioni pubbliche e private di Milano. Nel 1750 suo padre essendo caduto malato, Maria sollecitò ed ottenne dal papa Benedetto XIV la permissione di occupare la sua cattedra. Le sue *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*, pubblicate poco tempo avanti, nel 1748, 2 vol. in-4º, non sono nemmeno oggi al di sotto dei progressi della scienza. Il primo volume contiene gli elementi di Algebra coll' applicazione dell'Algebra alla Geometria; il secondo comprende un eccellente trattato del Calcolo differenziale e integrale.

Pochi anni dopo, Maria Agnesi, giovine ancora, terminò la sua vita scientifica. In preda ad una segreta malinconia, di cui la causa è rimasta ignota, rinunziò essa a quelle occupazioni, che sì notabile avevano reso la sua infanzia, e a quelli studj che avean reso celebre la sua gioventù, e tutta si consacrò alla cura degli ammalati e dei poveri. Così tutto doveva essere straordinario in questa donna, che la calunnia, sì funesta ai talenti, non ha osato di attaccare. Non è questo il luogo di abbandonarci alle riflessioni che possono venir suggerite dalla determinazione quasi incomprensibile di Maria Agnesi, in mezzo allo splendore della gloria e della fama; ma è impossibile di non osservare quanto la scienza ha perduto in questa specie di esilio volontario, al quale si condannò, e che essa conservò fino al termine de' suoi giorni, con quella stessa perseveranza e forte volontà che in lei avean palesato i suoi primi lavori. Maria Gaetana Agnesi morì a Milano il 9 Gennaio 1799 in età di 81 anno.

Il secondo volume delle sue *Instituzioni analitiche* venne tradotto in francese da l'Anthelmy, sotto la revisione di Bossut che vi aggiunse parecchie note, e fu pubblicato col seguente titolo: *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul integral*, Lione, 1775, in-8. L'opera di Maria Agnesi venne quindi tradotta per l'intero in inglese dal Rev. J. Colson, e pubblicata a Londra a spese del Barone Maseres nel 1801, in 2 vol. in-4.

Il Padre Frisi ha scritto l'elogio storico dell' Agnesi, che venne tradotto in francese da Boulard.

- ** AGOSTO. Il mese di Agosto fu in origine chiamato *Sextilis*, venendo in ordine il sesto nel calendario albano, nel latino, e in quello di Romolo, nei quali l'anno era diviso in dieci mesi soltanto, e cominciava dal mese di Marzo. Un tal nome gli fu conservato anco quando divenne il settimo, per aver Numa Pompilio creato due nuovi mesi; Gennaio, e Febbrajo; il primo dei quali fu collocato al principio, e l'altro al termine dell'anno. E così questo medesimo nome continuò pure ad esser chiamato quando venne ad occupare l'ottavo posto, per essere stato trasportato dallo stesso Numa, o secondo altri da Tullo Ostilio, o come altri vogliono dai Decemviri, il mese di Febbrajo nel secondo luogo. Nel calendario albano, *Sextile* era di ventotto giorni; in quello di Romolo di trenta; Numa lo ridusse a ventinove; Giulio Cesare lo ristabilì di trenta; e Cesare Augusto, da cui il mese ebbe il nome di *Augusto*, cangiato da noi in *Agosto*, estese il numero dei giorni a trentuno, lunghezza che in seguito ha inalterabilmente conservata, e che tuttavia conserva nel calendario moderno.

In origine fu proposto di dare al mese di Settembre il nome di Augusto, essendo l'Imperatore nato in quel mese; ma egli preferì *Sestile*, non solamente perchè veniva dopo il mese Quintile, che recentemente dal suo predecessore aveva preso il nome di Luglio (*Julius*), ma per le stesse ragioni che motivarono il decreto del Senato, conservatoci da Macrobio nel libro primo de' Saturnali pag. 261 (Ediz. di Due-Ponti, 1786, 2. vol. in-8) cioè: «Perchè nel mese *Sestile* Cesare Augusto » ha principiato il suo primo consolato, ha avuto tre volte gli onori del trionfo,

« ha capitano con avventurosi auspici le legioni del Gianicolo, ha ridotto l'Egitto all'obbedienza del Popolo Romano, ed ha spento la guerra civile, » piace al Senato e piacerà che questo mese, più di quanti altri mai felice per l'impero, sia per l'avvenire chiamato *Augusto*. »

Questo mese, e quello di Luglio, che trasse il nome da Giulio Cesare, sono i soli che abbiano conservati i nomi impostigli dagl'Imperatori romani; soltanto per poco tempo il mese d'Aprile si chiamò *Neroneus*, il mese di Maggio, *Claudius*, ec. Per altre notizie si vedano gli autori, che hanno trattato del Calendario romano, raccolti dal Grevio nel Tom. VIII del suo *Thesaurus antiquitatum romanarum*, Utrecht 1694, 12 vol. in folio; il *Lexicon antiquitatum* di Pitiscus, Lewarden 1713, 2^a vol. in fol.; Brady, *Clavis calendaria*; ec.

Il Sole in questo mese scorre o mostra di scorrere la maggior parte del segno dello Zodiaco chiamato il Leone, e verso il 23 del mese entra nel segno della Vergine: ma a parlar propriamente è la terra che scorre in realtà il segno dell'Aquario opposto a quello del Leone, e passa quindi nel segno dei Pesci opposto a quello della Vergine. I mesi di Luglio e d'Agosto ordinariamente sono i più caldi dell'anno, sebbene il Sole cominci ad allontanarsi dal nostro zenit ai 21 Giugno; perchè la terra, già riscaldata nei mesi precedenti, perde giornalmente minor calorico di quello che ogni giorno riceve dal Sole. Per una ragione inversa i mesi di Gennaio e di febbrajo sono i più freddi dell'anno, sebbene il Sole cominci ad avvicinarsi al nostro zenit fino dal 22 Dicembre.

AGRIMENSURA. Arte di misurare le terre, ossia applicazione della geometria alla misura delle terre. In francese quest'arte si dice *arpentage* dalla parola *arpent* data a diverse misure agrarie usate in Francia.

Tutti gli scrittori si accordano a porre in Egitto l'origine dell'agrimensura; ma la raccontano in diverse maniere. Secondo alcuni (*Proclus in Eucl.*) gli straripamenti periodici del Nilo, confondendo i limiti delle proprietà, resero necessario lo stabilimento di determinate regole per assegnare a ciascuno ciò che gli apparteneva prima dell'inondazione; e questa necessità fece nascere le prime nozioni della geometria. Secondo altri (*Herodotus, lib. I*), le di cui congetture sembrano più fondate, sotto il regno di Sesostrì, l'Egitto venne tagliato da un numero considerabile di canali, e le terre vennero divise e distribuite per eguali porzioni ai sudditi. Questa divisione fu fatta dietro le istruzioni di Thot ministro di Sesostrì, che gettò così in questa occasione i fondamenti della geometria. Comunque sia di queste opinioni, pare certo che il bisogno di determinare la figura e l'estensione dei terreni abbia dato origine a quel ramo importante delle matematiche, sì ristretto nel suo principio, e sì vasto ai nostri giorni, che noi indichiamo col nome di *geometria*, sebbene questo nome, che significa letteralmente in greco *misura della terra*, sia ben lontano dal caratterizzarne la natura ed il fine.

L'agrimensura, prendendo questa parola nel suo più ampio significato, si divide in tre parti: la prima si compone delle operazioni che debbono eseguirsi sul terreno; la seconda, delle operazioni che hanno per oggetto di rappresentare sulla carta la figura e le proporzioni del terreno misurato; la terza, dei calcoli necessarii per giungere a conoscere la superficie o l'area del terreno.

La prima parte dicesi propriamente *agrimensura*; la seconda, *levar le mappe*, o *levar di pianta*; e la terza, *riquadatura*.

1. Gli stromenti dei quali si serve l'agrimensore per operare sul terreno sono: la squadra, il grafometro, la bussola, la tavoletta, e la livella. È inoltre necessaria una catena e dei cavicchi o masti per misurare le lunghezze, e delle biffe o bastoni per prendere una dirittura, o per condurre una linea retta sul terreno.

2. Le biffe sono bastoni diritti, appuntati, ferrati dalla parte inferiore, e spezzati in alto per potervi inserire un pezzetto di carta; la loro lunghezza è

arbitraria. La maggior parte degli agrimenfiori però non fanno uso delle biffe così preparate, ma, tutte le volte che ne hanno bisogno, ne tagliano nelle macchie o nei boschi vicini all'operazione che essi hanno da fare. Si conduce sul terreno una linea retta, o, come suol dirsi, si prende una dirittura per mezzo delle biffe nel seguente modo.

Si debba condurre sul terreno una linea retta che passi per i due punti A e B, e si debba prolungarla verso il punto E (Tav. VI, fig. 1). A tale oggetto si planteranno, perpendicolarmente all'orizzonte, due biffe A e B, le quali determineranno la direzione della linea retta da condursi. Ad una distanza BC, presso a poco eguale ad AB, si planterà una terza biffa C, la quale dovrà esser collocata in modo che il raggio visuale che passa per C e per B passi ancora, per A. Si farà una stessa operazione in D, prendendo la distanza CD presso a poco eguale a BC o AB; vale a dire si planterà una quarta biffa in D, avendo cura che il raggio visuale DC passi pure per i punti B ed A; il che si vede quando, mirando da D in C, le biffe B ed A rimangono interamente nascoste dietro la biffa C. Si continuerà nella stessa maniera a piantare delle nuove biffe quante se ne vorrà.

Se si dovesse condurre una linea retta sul pendio di una collina; si planterà una biffa C (Tav. XII, fig. 1) al piede della collina, e quindi se ne collocherà un'altra D sulla costa, in modo che il raggio visuale DC vada ad incontrare il piede di una delle biffe piantate nella pianura: fatto ciò, si continuerà a collocare altre biffe sulla salita nel modo precedentemente indicato finchè si giunga alla sommità della collina, ed allora si verificherà l'operazione prendendo due biffe E ed F, le quali dovranno trovarsi nella stessa direzione di alcune delle biffe della pianura, come A o B. Allora se si vorrà prolungare la linea al di là della sommità della collina, si planterà una biffa sulla sommità F nella direzione ABCDE, e quindi, sempre nella stessa direzione, si collocherà una seconda biffa G, colla quale senza difficoltà si potrà proseguire la linea sulla sommità, piantando le biffe H, I, ec. nella direzione FG. Se invece di salire si dovesse scendere, la cosa il metodo sarebbe lo stesso.

Se si trattasse (Tav. XI, fig. 7) di attraversare una valle AE, conducendo una linea ABCDE, dopo essere scesi in C e risaliti in D, disporremo le due biffe D ed E nella stessa direzione di A e B, e si proseguirà l'operazione.

3. La catena dell'agrimensore è una catena di ferro di una lunghezza determinata, che in Francia comunemente è di dieci metri. È divisa di metro in metro da anelli di rame, ed ogni metro è pure diviso in mezzi ed in quarti da altri anelli più piccoli. Alle sue estremità termina con un anello più grande, che dicesi *maniglia*, nel quale si può passare la mano per tenderla. Le *maniglie* fanno parte della lunghezza della catena. Alcuni agrimenfiori adoprano due pertiche di legno ben secco, divise con molta accuratezza secondo la misura del paese. Altri si servono di un nastro verniciato; ma questo mezzo è da rigettarsi, potendo la sua lunghezza variare, tanto per lo stato dell'atmosfera, quanto per la varia forza colla quale vien teso.

4. I *capocchi* o *mastj* sono verghe di ferro, lunghe un mezzo metro, e di una grossezza sufficiente da poterle fare entrare nella terra senza che si pieghino.

5. Per misurare una linea retta colla catena ed i mastj, sono necessarie due persone; la prima, che è l'aiuto, va innanzi portando nella mano sinistra i mastj in numero di dieci, e tenendo nella destra la maniglia della catena; la seconda, che è l'agrimensore, sta dietro tenendo in mano l'altra maniglia. Dopo che l'agrimensore ha fissato nel punto di partenza, o colla mano, o con un bastone, l'estremità della catena, l'aiuto va avanti camminando esattamente lungo la linea segnata dalle biffe precedentemente collocate: quando si sente tirare dall'agrimensore, che tien ferma in terra la maniglia, l'aiuto stende la catena passando un

mastio nella maniglia che ha in mano, e conficcando quindi il mastio in terra a tal profondità da non potere esser facilmente scomposto. Ciò fatto, egli riprende in mano la maniglia e continua il cammino finchè l'agrimensore, che ha esso pure ripreso l'altra maniglia, sia giunto al primo mastio, e lo fermi di nuovo per stendere la catena e piantare un altro mastio. Essi proseguono ad operare così finchè l'aiuto ha masti, e quando gli ha terminati, l'agrimensore, che deve averli ad uno ad uno raccolti tutti, glieli rende segnando sopra un pezzo di carta, e ponendo invece dell'ultimo mastio il bastone o la mano, come era stato fatto in principio. L'operazione si continua nella stessa maniera fino al punto a cui si deve arrivare. Quando la distanza da questo punto all'ultimo mastio è minore di dieci metri, si cerca di misurarla con esattezza; ed il numero di metri che si trova si aggiunge al numero dei masti, ognuno dei quali vale dieci metri.

Questa operazione, sebbene semplicissima, richiede non ostante una grande attenzione; poichè se la catena non è sufficientemente tesa ad ogni stazione, o se l'aiuto devia dalla linea retta segnata dalle biffe, la misura non è più esatta.

Volendo nella misurazione fare uso di due pertiche, si tende un cordone nella direzione della linea da misurarsi, indicata da un numero sufficiente di biffe, e si collocano le due pertiche l'una all'estremità dell'altra lungo il cordone, quindi si alza la prima pertica per metterla in continuazione della seconda, e così si prosegue fino al termine dell'operazione, osservando bene di evitare, nel successivo collocamento delle pertiche, qualunque urto che potesse levar dal suo posto quella che serve d'appoggio.

Adesso esporremo le principali operazioni di agrimensura, che non richiedono altro che la catena e le biffe.

6. PROBLEMA I. *Misurare una distanza inaccessibile AB (Tav. V, fig. 4.).*

Per misurare la linea AB, che è inaccessibile a causa di un fiume che l'attraversa, si prolunghi a piacere questa linea verso C, e dal punto C si conduca una retta CF, che faccia con AC un angolo, che per quanto si può differisca il meno possibile da un angolo retto. Ciò fatto, si prenda una lunghezza qualunque DF eguale a CD; e dal punto D, che allora sarà il mezzo di CF, si conduca una retta BD prolungandola verso G, e prendendo $DG = BD$. Per i punti F e G si conduca una retta indefinita, e per il punto D, nella direzione AD, si conduca pure una retta prolungandola al di sotto di CF fino all'incontro del prolungamento di FG in E, dove si planterà una biffa. Finalmente si misuri EG, e questa linea sarà eguale alla distanza cercata AB.

Infatti AC ed FE essendo parallele per costruzione, gli angoli CAD e DEF, come alterni-interni fra le parallele, sono eguali. Così i triangoli BDA e EDG, che hanno i lati eguali BD e DG, e gli angoli eguali BAD e DEG, BDA e EDG, sono eguali in tutto (Vedi TRIANGOLO), dunque $AB = GE$.

7. PROBLEMA II. *Condurre sul terreno una retta perpendicolare ad un'altra linea retta data.*

Siano AB (Tav. XI, fig. 5.) la linea data, e D il punto sul quale deve cadere la perpendicolare. Si conduca DE in modo che l'angolo EDB sia acuto; si prenda $DE = DB$; e, per i punti E e B, si conduca una linea indefinita; si misuri con esattezza BE, e si faccia CB eguale a

$$\frac{BD^2}{EB}$$

Il punto C apparterrà alla perpendicolare, la di cui direzione sarà così determinata dai due punti C e D.

Infatti, il triangolo CDB essendo rettangolo in D, se si suppone condotta la

perpendicolare DF sull'ipotenusa CB, si avrà per le proprietà dei triangoli rettangoli (Vedi TRIANGOLO):

$$\overline{DB}^2 = CB \times BF$$

Ma, per costruzione, $BF = \frac{1}{2}EB$; dunque si ha pure

$$\overline{DB}^2 = \frac{1}{2}CB \times EB;$$

e quindi

$$CB = \frac{2\overline{DB}^2}{EB}$$

Per esempio, se si avesse $DB = 100$ metri, e dalla misura si fosse trovato $EB = 98$ metri, si rilevarebbe dal calcolo

$$CB = \frac{2(100)^2}{98} = \frac{20000}{98} = 204^m,08$$

si prenderebbe dunque sulla linea BG una lunghezza di $204^m,08$, e in tal modo resterebbe determinato il punto G.

Se si trattasse invece di abbassare una perpendicolare sopra AB (Tav. XI, fig. G.) da un dato punto C, si condurrebbero CA e CB in modo che i due angoli CAB e CBA fossero acuti, e si determinerebbe il piede della perpendicolare calcolando DB per mezzo della espressione

$$DB = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{AC}^2}{2AB},$$

la quale ci viene data immediatamente dalle proprietà dei triangoli rettangoli.

Infatti, nei due triangoli rettangoli formati dalla perpendicolare CD si hanno le due eguaglianze

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2, \text{ e } \overline{CB}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2.$$

Sostituendo nella prima il valore di $\overline{CD}^2$ tratto dalla seconda si ha

$$\overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{DB}^2;$$

ma $AD = AB - DB$, e per conseguenza $\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{DB}^2 - 2AB \times DB$, dunque sostituendo questo valore di $\overline{AD}^2$ in quello trovato di $\overline{AC}^2$ si ottiene, dopo le riduzioni

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 - 2AB \times DB,$$

donde si ha finalmente

$$DB = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{CB}^2 - \overline{AC}^2}{2AB}.$$

Per esempio, se si avesse $AB=50$ metri, $CB=62$ metri, e $AC=46$ metri si troverebbe col calcolo

$$DB = \frac{50^2 + 62^2 - 46^2}{2 \cdot 50} = \frac{2500 + 3844 - 2116}{100} = 42^m, 28.$$

8. PROBLEMA III. Da un punto dato A sul terreno condurre una parallela ad un'altra linea data BC (Tav. XII, fig. 2.)

Si faccia un triangolo BDC di cui un lato DC passi per il punto dato A, si misurino BD, DC, e AD, e si calcoli DE per mezzo della formula

$$DE = \frac{BD \times AD}{DC}.$$

Il punto E sarà uno dei punti della parallela richiesta, la quale dovendo per condizione passare per il punto A resterà così pienamente determinata. Il valore di DE è una conseguenza della proporzionalità dei lati nei triangoli simili EDA e BDC (Vedi TRIANGOLO).

Per esempio, se si fosse ottenuto dalla misura $BD=48$ metri, $AD=25$ metri, e $DC=60$ metri, si avrebbe dal calcolo

$$DE = \frac{48 \times 25}{60} = \frac{1200}{60} = 20 \text{ metri.}$$

Si può ancora trovare questa parallela facendo semplicemente $BH=HC$. Allora si porrà una biffa nel punto G dove s'incontrano le due linee BA e DH, ed un'altra nel punto E dove s'incontra la linea DB col prolungamento della CG. La linea EA sarà la parallela cercata. Infatti, supponiamo che AE non sia parallela a BC, e sia invece AI la parallela cercata. Si prolunghi AI fino all'incontro in L colla linea CE prolungata, e, per il punto G, si tiri la MN parallela a BC. Ciò fatto, i triangoli simili BMG e BIA, CNG e CAL daranno le due proporzioni

$$BM : BI :: MG : IA,$$

$$CN : CA :: NG : AL.$$

Ora le tre parallele IA, MN, BC, dovendo dividere in parti proporzionali le linee DB, DC, danno la proporzione

$$BM : BI :: CN : CA,$$

dalla quale e dalle due precedenti si deduce

$$MG : IA :: NG : AL.$$

Ma gli antecedenti di questa proporzione, essendo proporzionali a BH e HC, sono eguali, dunque debbono pure essere eguali i conseguenti IA, e AL; il che è manifestamente assurdo. Non potendosi dunque condurre per il punto A una parallela a BC diversa da AE, sarà questa la vera parallela, come appunto voleva dimostrarsi. Questa stessa proposizione si può dimostrare col principio delle trasversali, come si vede in Vincent, *Cours de Géométrie*, Parigi, 1832, in-8 seconda edizione pag. 203; ed analiticamente come in Poissant, *Recueil de diverses propositions de géométrie*, Parigi, 1824, in-8. pag. 122.

g. L'uso della squadra rende la soluzione dei problemi precedenti molto più semplice, ma noi abbiamo voluto dare un'idea delle risorse che gli agrimenso-
Digitized by Google

possono trarre dalla geometria, della quale, in generale, essi hanno una cognizione molto superficiale. Alla parola SQUADRA si veda l'uso di tale strumento.

La descrizione e gli usi della tavoletta, e del grafometro saranno pure spiegati alle parole TAVOLETTA, e GRAFOMETRO. Si vedano pure gli articoli LIEVET LE MAPPE, MISURA, LIVELLAZIONE, SUPERFICIA, VOLUME, e POLIGONO.

Per chi desiderasse di acquistare una cognizione più profonda della teoria e della pratica dell'agrimensura, noi consigliamo lo studio dei seguenti autori. PUISANT *Traité de géodésie*, Parigi 1819, 2 vol. in-4, con un Supplimento stampato nel 1827; lo stesso, *Traité de topographie, d'arpentage, et de nivellement*, Parigi 1820, 1 vol. in-4; Benoît, *Cours complet de topographie et de géodésie*, Parigi 1822, 2 vol. in-8; Pommiers, *Manuel de l'Ingenieur du cadastre*, Parigi, 1808, un vol. in-4; Francoeur, *Traité de géodésie*, Bruxelles 1837, 1 vol. in-8; Lefevre, *Nouveau traité géométrique de l'arpentage*, Parigi 1826, 2 vol. in-8. quarta edizione; Alberti, *Istruzioni pratiche per l'ingegnere civile, ossia Perito agrimensore e Perito d'acque*, Venezia 1804 in-4; Benedettoni (D. Giorgio), *Pratica d'agrimensura, stereometria, e gnomonica*, Lucca, 1778, in-8.

AGRIPPA, astronomo, che viveva verso la fine del primo secolo dell'era cristiana, è celebre per un'osservazione astronomica ch'egli fece sulla luna. Osservò egli in Bitinia, il quarto anno della 217^a olimpiade (l'anno 92 dell'era volgare), che la luna era in congiunzione colle Plejadi. (Vedi l'*Almagesto* di Tolomeo, Lib. VII, Cap. 3, pag. 170 dell'edizione greca di Basilea, 1538, in foglio).

AGRIPPA (CASSIUS), celebre architetto di Milano, viveva nel secolo XVI; aveva fatto uno studio particolare delle matematiche, della fisica ed anco della filosofia. Sotto il pontificato di Gregorio XIII si volle trasportare a Roma sulla piazza di S. Pietro un obelisco; Agrippa fu uno di quelli che più si occuparono di tale operazione, allora difficilissima. Il risultato delle sue ricerche si trova nella sua opera intitolata: *Trattato di trasportar la guglia in su la piazza di S. Pietro*, Roma, 1583, in-4. Vi ha pure di Agrippa: I. *Trattato di scienza d'arme, con un dialogo di filosofia*, Roma, 1553; Venezia 1568, 1604, in-4; II. *Dialogo sopra la generatione de' venti*, ec. Roma, 1584 in-4; III. *Nuove inventioni sopra il modo di navigare*, Roma, 1595 in-4. Tutte le opere di Agrippa sono rare.

AGUILLON (FRANCESCO D'), gesuita di Bruxelles, che primo introdusse lo studio delle matematiche tra' suoi confratelli de' Paesi Bassi, professò filosofia a Douai, teologia ad Anversa, ove fu rettore e morì nel 1617 in età di 50 anni. È autore di un *Trattato di Ottica*, in sei libri, stampato ad Anversa, 1613, in foglio. In quest'opera occorre la prima volta la denominazione di *Proiezione stereografica*: tal proiezione era conosciuta fino dai tempi d'Ipparco, ma non aveva ricevuto alcun nome. Aguillon lavorava sulla Catottrica e sulla Diottrica quando morì.

AJUK (*Astron.*). Nome della stella comunemente chiamata la Capra, nella costellazione del Coccchiere.

ALA (*Mec.*). Così chiamansi le vele dei mulini a vento. Le ali dei mulini sono grandi intelaiature di legno fatte a forma di scala, sulle quali si stende una tela per ricevere l'impulso del vento. Le più grandi hanno 12 a 13 metri di lunghezza; e due metri di larghezza. Si dà ancora il nome di *ale* ai denti di un rocchetto. Vedi DENT.

ALAEOR (*Astron.*). Nome arabo della stella Sirio.

ALAJOT (*Astron.*). Nome arabo della bella stella della Capra.

ALAMAC, o ALAMAK, o AMAK (*Astron.*). Nome dato dagli Arabi ad una stella di seconda grandezza, che si vede nel piede australe di Andromeda. Nei cataloghi viene indicata colla lettera γ.

ALATOD' (*Astron.*). Nome arabo della bella stella della Capra.

ALBATENIO, o ALBATEGNIO, o ALBATEGNI. Nome latinizzato di *MOMAHMED-BEN-DJABIR-BEN-SERAF, ASOU-ARALLAH*, uno dei più celebri matematici arabi, nato nella città di *Batan*, in Mesopotamia, donde gli è derivato il soprannome di *AL-BATTAN* o *EL-BATTANI*, sotto il quale è generalmente conosciuto in Europa. S'ignora l'epoca precisa della nascita di questo grand'uomo; ma è certo che fioriva circa 50 anni dopo il califfo *Almamoun*, cioè verso l'anno 880 dell'era cristiana. Non era musulmano, e al contrario professava il sabeiismo o culto delle stelle. Come la maggior parte dei matematici arabi, applicò la scienza all'astronomia, allo studio della quale si accinse colla doppia potenza del sentimento religioso e delle cognizioni umane. Albatenio, malgrado la sua religione in orrore ai musulmani, era governatore di Siria per i califfi. Cominciò le sue osservazioni astronomiche verso l'anno 264 dell'egira, corrispondente all'anno 877 di G. C., e le continuò talora in Antiochia, talora nella città di *Racca* (*Raqqah*) in Mesopotamia, donde è stato indicato da alcuni antichi autori col nome di *Ma-hometus Aractensis*. Ecco l'idea generale che possiamo farci dei lavori di Albatenio, sì notabili per l'epoca in cui furono eseguiti.

Quest'illustre astronomo adottò presso a poco il sistema e le ipotesi di Tolomeo; ma le rettificò in molti punti, e fece inoltre molte scoperte che gli hanno meritato un posto distinto fra gli uomini i di cui lavori hanno arricchito la scienza astronomica.

Albatenio si approssimò più di tutti gli antichi alla verità; per ciò che riguarda il moto delle stelle. Tolomeo faceva loro percorrere soltanto un grado in 100 anni; l'astronomo arabo fa loro percorrere questo spazio in 70 anni; e, secondo i moderni, v'impiegano 72 anni. In secondo luogo, Albatenio misurò la grandezza dell'eccentricità dell'orbita solare, e certamente non si poteva arrivare ad una misura più esatta. La determinò di 3465 parti, facendo il raggio di 100,000; e un tal calcolo si accorda con quello di parecchi astronomi moderni.

La determinazione della lunghezza dell'anno solare, di cui si occupò Albatenio, non pare a prima giunta un'operazione egualmente felice. Confrontando le sue osservazioni con quelle di Tolomeo, la fece di 365 giorni 5 ore 46' 24"; computo in cui si trova un errore di circa $2\frac{1}{2}$. Il celebre Halley giustifica Albatenio attribuendo l'errore di quest'astronomo alla troppa confidenza avuta nelle osservazioni di Tolomeo, alcune delle quali discordano tanto dai moti del sole oggi conosciuti, che sembrano piuttosto fittizie che reali. Quella di cui Albatenio si servi nella sua determinazione è appunto di questo numero. Dà essa l'indicazione di un equinozio, che Tolomeo dice di aver osservato l'anno terzo d'Antonino, e che doveva cadere il 20 del mese *Atbir*, e non il 21, come egli asserisce. Il dotto astronomo inglese rileva ancora che se Albatenio avesse confrontato le sue osservazioni con quelle di Ipparco riportate da Tolomeo, si sarebbe assai più approssimato alla verità. Nonostante è questa determinazione viziosa, che ha persuaso alcuni astronomi del secolo decimosesto a credere che l'anno solare tropico era andato diminuendo fino al suo tempo, e che da quell'epoca fino a noi aveva cominciato nuovamente a crescere; congettura azzardata che non si trova punto d'accordo colle osservazioni moderne. Misurò pure abbastanza bene l'obliquità dell'eclittica, e di lui si rammentano ancora le osservazioni di quattro eclissi. Ma una delle scoperte più belle che vadano unite al nome è ai lavori di Albatenio è quella relativa alla determinazione del moto dell'apogeo del sole. Prima di quest'astronomo, si era riguardato l'apogeo del sole come fisso nello stesso punto dello zodiaco, immobile e immaginario, che si suppone al di là delle stelle. Tale era sembrato anche a Tolomeo. Ma Albatenio, coll'aiuto di osservazioni più distanti fra loro, scoprì questo moto, e lo distinse da quello delle fisse.

Fecce vedere che era alquanto più rapido, come sembrano confermarlo le osservazioni più recenti. Albatenio rilevò l'insufficienza e i difetti della teoria di Tolomeo sulla luna e sugli altri pianeti; e, se non gli corresse interamente, rettificò almeno le sue ipotesi in molte particolarità. La sua scoperta del moto dell'apogeo del sole lo portò a sospettare che essa fosse applicabile al moto degli altri pianeti; le sue congetture sono state pure verificate sotto questo rapporto.

Finalmente Albatenio calcolò nuove tavole astronomiche, e le sostituì a quelle di Tolomeo, che cominciavano ad allontanarsi sensibilmente dai risultati delle osservazioni celesti. Queste tavole, molto più perfette delle prime, goderon di una gran celebrità in oriente, e furono lungo tempo in uso. Laplace ha asserito, nella sua *Storia dell'Astronomia*, che a torto si erano attribuiti al lavoro di Albatenio i cambiamenti vantaggiosi che sono stati apportati agli elementi delle tavole di Tolomeo. Egli fonda la sua opinione sopra un frammento di Ebn-Younes o Jbn-Yonis tradotto da Caussin, dal quale resulterebbe che tali cambiamenti sono dovuti agli autori della *Tavola verificata*. Per quanto grande sia il nostro rispetto per la decisione di Laplace, non siamo punto convinti, in questa circostanza, della giustizia della sua obiezione. Oltre che il merito della traduzione di Caussin avrebbe bisogno di esser ben determinato, non è inutile il fare osservare che l'astronomo Ebn-Younes viveva, verso l'anno 1000 sotto il califfato di El-Hakem, in Egitto, e che l'ultime osservazioni di Albatenio sono dell'anno 918. Non comprendiamo bene la confidenza che vorrebbe accordarsi al frammento di Ebn-Younes, la di cui asserzione, in qualunque stato della causa, non ci sembra sufficiente per attennare la gloria di Albatenio, che secondo il nostro sentimento rimane sempre intatta.

L'opera di Albatenio, nella quale sono registrate le sue scoperte, e a cui datte il titolo di *Tavola Sabea* (*Zyde-Saby*), è stata tradotta in latino con questo titolo: *De scientia Stellarum*; ma un biografo d'Albatenio (Delambre) fa con ragione osservare che il traduttore non sapeva né l'arabo, né il latino. Questa traduzione infatti è piena di errori gravissimi, e non può dare che un'idea imperfettissima degli importanti lavori d'Albatenio. La prima edizione comparve a Norimberga, nel 1537, in folio. La seconda, egualmente inesatta, ad onta delle promesse dell'editore, è stata pubblicata a Bologna nel 1645 in-4°. L'originale arabo si trova, dicesi, tra i manoscritti del Vaticano, e non è mai stato pubblicato. In questo libro, che altro non è che un discorio preliminare alle tavole astronomiche, che dal traduttore latino non sono state pubblicate, si trova una trigonometria affatto differente da quella dei Greci, e fondata sulla *profezione ortografica*. In luogo delle corde, Albatenio impiega i seni, ai quali conserva il nome di corde, e che esprime in parti sessagesimali del raggio. In questo libro pure trovasi la prima nozione delle tangenti; vi si vede che gli Arabi si servivano di queste linee nella loro gnomonica; che essi ne avevano delle tavole che davano loro l'altezza del sole mediante la lunghezza dell'ombra, e viceversa. Non trasse però partito da questa idea per la trigonometria. Regiomontano a cui viene attribuita l'introduzione delle tangenti, può averne presa l'idea dall'opera di Albatenio eni commentò.

Albatenio, che Lalande ha collocato fra i venti più celebri astronomi che siano vissuti, morì, secondo Aboul-Farag, l'anno 929 dell'era cristiana (dall'egira 317). Nella biografia di Ibn-Khalacan leggesi l'elenco delle sue opere.

ALBEGALA (*Astron.*). Uno dei nomi della Lira, costellazione boreale.

ALBERO (*Mec.*). Asse di una macchina che gira. Gli alberi delle grandi macchine come i mulini, esigono pezzi di legno che spesso non possono procacciarsi che con grandi spese. In questi casi è meglio fabbricarli di metallo fuso, in

forma di tubi i quali s'incestrano gli uni negli altri. L'uso del ferro dà sempre una maggior leggerezza e solidità alle macchine.

ALBERTI (ARISTOTILE), architetto, ed ingegnere, noto altresì sotto al nome di **RISOLFO FIORAVANTI**, nato a Bologna, fu uno dei più grandi meccanici del XV secolo, e si dà una fatica a credere le maraviglie che gli si attribuiscono. Egli fu che nel 1455, in unione con Gaspare Nadi, trasportò il campanile di S. Maria di Bologna, intero, siccome stava, colle sue campane, ad una distanza di 35 piedi, e, cosa non meno sorprendente, raddrizzò il campanile di Cento che pendeva cinque piedi e mezzo. Quest'uomo tanto straordinario andò in Ungheria, costruì parecchi ponti sul Danubio, e fece altri lavori che tutti dimostrano l'ardire del suo ingegno; sì che il sovrano di quel paese lo ricompensò in modo particolare e che ha scarsi esempj: dopo di averlo creato cavaliere, gli permise di battere moneta in suo proprio nome. Aggiungesi che la fama di Aristotile penetrò sino in Russia, dove fu chiamato e dove eresse molte chiese. Per maggiori particolarità sulla persona di questo gran meccanico si consultino gli autori citati da Libri nella sua *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, Parigi 1838, vol. II, pag. 217.

ALBERTI (GIUSEPPE ANTONIO) nacque in Bologna nell'anno 1705, e coltivò con ardore e successo le scienze matematiche, l'agrimensura, l'architettura e l'idraulica. Abbiamo di lui diverse opere su queste scienze, fra le quali le più reputate, e che vennero ristampate anche in questi ultimi tempi sono: I. *Istruzioni pratiche per l'ingegnere civile, ossia Perito agrimensore e Perito d'acque*, Venezia, 1747, in-4, e con aggiunte importanti; Venezia, 1761, in-4; II. *Trattato della misura delle fabbriche*, Venezia, 1757 in-8; III. *Nuova Dioptramonimetra, da usarsi sopra la tavoletta pretoriana per misurare qualsivoglia distanza*, Venezia, 1768, in-4. Mentre tali opere abbondano di nozioni scientifiche, ed utili assai pel pratico esercizio dell'arte, si desidererebbero però scritte con maggior ordine, proprietà, e gusto. Visse quasi sempre l'Alberti in patria, ma terminò i suoi giorni nell'Agosto 1768 in Perugia, dove era stato chiamato per alcune operazioni idrauliche.

ALBERTO MAGNO, da diversi antichi autori nominato **ALBERTUS THEOTONICUS**, **FRATER ALBERTUS DE COLONIA**, **ALBERTUS RATISBONENSIS**, e finalmente **ALBERTUS MAGNUS**, della famiglia dei conti di Bollstaedt, nacque a Lawingen, in Svevia, nel 1193, secondo alcuni de' suoi biografi, e nel 1205, secondo altri. La vita di quest'uomo straordinario è stata il soggetto dei più disparati giudizj, nel modo stesso che le sue cognizioni, sì profonde e sì estese per l'epoca in cui visse, hanno servito di testo ai racconti più assurdi, la di cui volgarità e patente falsità non ha impedito che trovassero eco fuori della turba ignorante e grossolana dalla quale avevano avuto origine. L'autore della biografia di Alberto Magno, nella *Enciclopedia*, ha adottato, parlando di quest'uomo celebre, un tuono di derisione e di scherzo del peggior gusto, ehe senza dubbio gli ha ispirato l'abito religioso di cui questo grande uomo era rivestito.

Alberto deve il soprannome di *Magno* o il *Grande*, che gli è stato dato dal suo secolo, alle sue cognizioni, che i soli suoi contemporanei hanno dovuto credere soprannaturali, e non già alla corruzione della parola *grof* o *groat*, che si è creduta essere un soprannome distintivo della sua famiglia. È provato che nessun ramo della casa di Bollstaedt è stato con tal nome indicato.

Comunque sia, Alberto Magno fece i suoi studj all'università di Padova, dove l'influenza del celebre Giordano, uno de' suoi maestri, lo decise a entrare nell'ordine di S. Domenico. Si recò a Parigi nel tempo in cui le teorie di Aristotile (*Vedi ARISTOTILE*) erano proscritte dalla Sorbona e dalla Chiesa; ma la sua celebrità ed il favor di cui godeva presso la S. Sede contribuirono forse a far cangiare

tal decisione, sicchè gli venne permesso di spiegare pubblicamente i libri di quel filosofo. Alberto non si occupava soltanto di filosofia, e di ciò che allora chiamavasi dialettica; si dava ancora con ardore allo studio delle scienze positive. Verso l'anno 1256, reso ormai celebre per l'alta fama che gli fruttavano le sue fatiche, fu promosso dai capi del suo ordine alla dignità di provinciale dei Domenicani in Germania. Allora si ritirò a Colonia, città che in quel tempo offriva più di ogni altra risorse all'uomo studioso, e al dotto che sentivasi portato per l'insegnamento. Così conservò egli sempre per Colonia una predilezione marcata in tutto il corso della lunga e laboriosa sua vita; nè i favori del papa Alessandro IV, che lo chiamò a Roma, e gli diede l'ufizio di maestro del sacro palazzo; nè la sua nomina, nel 1260, al vescovado di Ratisbona, che egli abdicò dopo tre anni, poterono allontanarlo lungo tempo.

Fu nella città di Colonia che Alberto in seno de' suoi studj solitarij risolvette alcuni problemi difficili delle scienze matematiche. Costrusse, se dobbiamo credere alla semplice ammirazione de' suoi amici e all'odio de' suoi nemici, un sistema dotato della facoltà di muoversi e di parlare. Questò capo d'opera dell'arte, che cinque secoli dopo fu rinnovato da Vaucanson, gli attirò le più ridicole accuse; e San Tommaso d'Aquino, suo discepolo, fece in pezzi a colpi di bastone quest'opera maravigliosa, nella quale credè di riconoscere l'ispirazione del demonio. Vaucanson fu più felice.

Alberto Magno, vescovo di Ratisbona, ha composto un numero grande di scritti. La maggior parte delle sue opere, o almeno di quelle che gli furono attribuite, vennero raccolte da un domenicano, Pietro Jammy, che le pubblicò l'anno 1651, a Lione, in 21. vol. in-folio: non ne esiste in verun luogo un catalogo compiuto; il più esteso si trova negli *Scriptores Ordinis Praedicatorum* di Quetif ed Echard, che occupa 12 pag. in-folio, p. 171 e segg. del Tom. I. Il catalogo degli scritti contenuti nell'edizione di Pietro Jammy vedesi in *Fabricii Bibl. lat. med. et inf. aetatis*, alla parola ALBERTUS. Alberto Magno morì a Colonia nel 16 Ottobre 1280, in età di 87 anni.

I biografi che, nella loro ignoranza, hanno creduto di poter divertirsi col nome di quest'uomo celebre avrebbero dovuto aggiungere che le ridicole rapodie intitolate: *Segreti maravigliosi del grande e del piccolo Alberto*, non erano di lui, e non erano in modo alcuno estratte dalle sue opere.

ALBEZE. Vedi BEZE.

ALBIREO (*Astron.*). Nome che è stato dato ad una stella del Cigno indicata nei cataloghi colla lettera β .

ALROHAZEN. Vedi ALHAZEN.

ALCIONE (*Astron.*). È questo il nome della più brillante tra le Plejadi, indicata colla lettera γ nei Cataloghi.

ALCUINO, monaco anglo-ssione, discepolo del venerabile Beda, e maestro di Carlomagno, nacque verso l'anno 735, nell'Yorkshire. La biografia di quest'uomo celebre appartiene più alla storia letteraria del medio evo, che a quella delle scienze matematiche, di cui nonostante favorì gli avanzamenti, e nelle quali possedeva cognizioni estesissime per il suo secolo. Froben, principe-abate di Santa Emeranda, ha pubblicato a Ratisbona, nel 1777, in 2. vol. in-folio, una bella edizione delle opere di Alcuino, nelle quali si trovano i seguenti scritti matematici: I. *De cursu et saltu lunae, et de bissexto*; II. *De reperienda luna paschali per 19 annos*; III. *Propositiones arithmeticae ad acuendos juvenes*. Quest'ultima opera è una raccolta di problemi aritmetici del genere di quelli dell'Antologia greca; e potrebbe considerarsi come il germe del libro tanto noto delle *Récréations mathématiques* d'Ozanam. È probabile che Bachet de Mazarinac, autore dell'opera intitolata: *Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres*, Lione,

1613 in-8, avesse letto il libro d'Alcuino, già stampato nel 1543 sotto il nome di Beda.

Alcuino servì con nobile zelo i progetti di civilizzazione di Carlomagno. Ha congiunto il suo nome a quel regno che brilla come una meteora nella notte dell'VIII secolo. Ma i suoi lavori matematici, e l'ardore col quale favorì lo studio dell'astronomia non sembra che abbiano molto influito sul progressi di questa scienza in Francia. La posterità però si è mostrata riconoscente ai suoi sforzi collocandolo in un posto distinto fra gli uomini che hanno maggiormente illustrato lo studio delle scienze.

ALDAFERA. Vedi ALDHAFERA.

ALDEBARAN (*Astron.*). Nome che gli autori arabi hanno dato e danno ancora alla bellissima stella di prima grandezza, che si trova segnata nei cataloghi α del Toro, e che è una delle cinque stelle conosciute sotto il nome di *Jadi*. Il suo nome significa *grande stella, stella principale*. Gli Arabi la chiamano ancora *Abenezra*, *Atin*, ed *Ain al Thaur* ossia *occhio del Toro*, perchè rimane precisamente nell'occhio della costellazione del Toro; ma il nome suo più comune è quello di *Aldebaran*. I Greci la chiamavano *Αρκαδική*, e *Ὠρόχιδος*; ed i Latini *Palileium* o *Parilicium*, e *Subrufa*. Si crede pure che questa bella stella sia il Tasciter degli Indiani; genio che presiede all'equinozio della primavera (Vedi la *Storia dell'astronomia* di Bailly). La sua luce è alquanto rossiccia. È molto vicina alle Pleiadi sulla linea condotta per la spalla occidentale di Orione. Può facilmente distinguersi nel cielo da questi contrassegni: se si conduca una linea per le tre stelle più risplendenti che formano il budriere di Orione, questa, prolungata verso la testa, passa vicino a Aldebaran e alle Jadi, e, prolungata verso il piede, passa vicino alla stella Sirio che è tanto distante dal budriere quanto lo è Aldebaran. Altri modi di riconoscere questa stella verranno indicati all'articolo *Costellazione*. Essa è spesso eclissata dalla luna, e quest'eclisse è utilissimo per trovare le longitudini dei luoghi (Vedi *OCCULTAZIONE*). Va soggetta a piccole ineguaglianze le quali fanno sospettare che abbia un qualche moto suo proprio: non si è però potuto determinare nulla di certo sopra di ciò. La sua ascensione retta il 1^o Gennaio 1800 era $66^{\circ} 6' 50''$; la declinazione boreale $16^{\circ} 5' 52''$; il suo moto annuo cagionato dalla precessione degli equinozi è di $51''$, 393 in ascensione retta, e di $7''$, 963 in declinazione.

ALDERAIMIN. Vedi ADERAIMIN.

ALDHAFERA (*Astron.*). Stella di terza grandezza nella costellazione del Leone.

ALEMBERT (GIOVANNI LE ROND D'), letterato e matematico celebre, nato a Parigi il 16 novembre 1717. In ogni tempo si sono ricercate con premura le particolarità le meno importanti della vita dei grandi uomini. Tutte le circostanze che hanno rapporto, anco da lungi, coi loro successi e colle loro opere, sembrano far parte della loro gloria. Questa specie di culto, che la posterità consacra al genio, è il risultato di un sentimento nel tempo stesso entusiasta e curioso, che va aumentandosi a misura che il tempo passa sulla loro fama senza attenuarla. Noi proviamo una certa compiacenza ad assiderci presso la cuna di quelli che hanno sopravvissuto al loro tempo, come per sorprendervi i loro primi pensieri, e scoprire fino nei giochi della loro infanzia il germe del talento che illustrò la loro carriera. Sotto questo punto di vista, la biografia di d'Alembert potrebbe presentare dei tratti notabili, ai quali però non possiamo accordare che un posto poco importante in queste pagine, più particolarmente destinate alla scienza: nonostante non trascureremo di notar quelli che fanno più onore al suo carattere.

Nella notte del 16 Novembre 1717, un bambino nato di fresco, debole e di cattiva apparenza, fu trovato sotto il portico della chiesa di S. Giovanni le Rond,

e portato, secondo l'uso, al commissario del quartiere. Sia che quest'uomo fosse stato prevenuto dai genitori del fanciullo, sia che egli avesse pietà di quella innocente e delicata creatura, esercitò verso di essa un atto di umanità che i doveri della sua carica non gli imponevano. Affidò il bambino alla moglie di un vetrajo, che gli prodigalizzò le cure più tenere. Gli si diede il nome di Giovanni le Rond, che esso doveva un giorno render celebre con quello di d'Alembert. Pochi giorni dopo questo avvenimento, poté congetturarsi che il piccolo Giovanni le Rond era stato in tal guisa abbandonato da ricchi genitori, per nascondere l'errore, di cui era esso il frutto infelice; poichè a di lui favore venne da persona incognita costituita e assicurata una pensione di milledugento lire. Col tempo si è saputo che egli era figlio di madama di Tencin, donna celebre pel suo spirito e per la sua bellezza, e di Destouches, commissario provinciale d'artiglieria, al nome del quale aggiungevasi la parola *Canon*, per non confonderlo col poeta drammatico dello stesso nome. D'Alembert annunziò di buon'ora le più felici disposizioni, e, contro il solito dei fanciulli dotati di prodigiosa precocità, corrispose coll'avanzar degli anni alle speranze che di lui eransi concepite. Quando la sua fama nascente lo fece accogliere nel mondo con onorevole distinzione, madama di Tencin, alla società della quale era ammesso, gli fece, dicesi, conoscere il segreto della sua nascita. Il giovine d'Alembert ricevè tal confessione con una dignità fredda, e dichiarò che non avrebbe giammai riconosciuto per sua vera madre, che la povera donna di cui aveva succhiato il latte, e che aveva preso una cura sì tenera della sua debole infanzia.

D'Alembert fu posto in pensione all'età di quattro anni, e ne aveva appena dieci, quando il suo maestro dichiarò come non sapeva più che insegnargli. Ma la debolezza della sua costituzione esigeva ancora cure assidue: perciò entrò solamente due anni dopo nel collegio Mazarino, dove terminò i suoi studj in un modo brillantissimo. La memoria di quel primo maestro, di cui era stato il discepolo prediletto, fu sempre cara a d'Alembert. Malgrado la mediocrità della sua fortuna, fu abbastanza felice in seguito per ajutarlo ad allevare i suoi figli, e per offrirli frequenti soccorsi. Uscendo dal collegio, volle pure tornare presso la sua buona nutrice: egli ha passato quasi trent'anni della sua vita presso quella donna, alla quale diede sempre il dolce nome di madre.

Questi tratti, ed un gran numero di altri che siamo costretti a passar sotto silenzio, dipingono nobilmente il carattere di d'Alembert, carattere che non smentì mai in tutto il corso della sua vita. Fu uomo di dolci costumi e di un conversare amabile e franco, malgrado una certa malizia nel suo carattere e la sua tendenza all'epigramma. Se le sue opere rivelano in lui un'intelligenza superiore e forte, le sue azioni private rivelano pure un'anima elevata ed un cuore sensibile e generoso. Dopo questo elogio meritato di d'Alembert, ci sarà senza dubbio permesso di dire che noi non dovremo occuparci delle sue opere letterarie, e meno ancora dei suoi pretesi lavori filosofici. Trascinato da uno spirito vivo ed inquieto nel movimento che ha dominato il suo secolo, questo illustre scrittore ha disgraziatamente adottato a preconizzato con molto talento i grossolani errori dei riformatori del suo tempo, fra i quali occupa almeno un posto distinto. In altro tempo, e, è doloroso il dirlo, in altro paese fuori che la Francia, dove la novità è l'arditezza delle idee esercitano un impero più facile e più potente della verità, è permesso di credere che d'Alembert avrebbe adempito ad una missione più degna del suo genio e più utile all'umanità (a).

(a) È vero che d'Alembert non fu immune dalle opinioni irreligiose dei sedicenti filosofi francesi del suo tempo, come Voltaire, Diderot, ec., coi quali era in intima relazione; ma egli non le esternò giammai in nessuna delle sue opere, nè contribuì alla loro propagazione. Ecco ciò che

Le felici disposizioni che d'Alembert aveva manifestato sino dall'infanzia si svilupparono rapidamente nel collegio, dove ben presto realizzò le speranze che di lui aveva concepito il suo primo maestro. Non è inutile di osservare che questo fanciullo, estroso e malinconico, sembrò promettere in principio un eloquente difensore al cristianesimo, di cui non ostante doveva in seguito contribuire a minare la fede. I suoi professori direbbero le sue prime idee verso la teologia, e, meravigliati dei suoi lavori, crederono per un momento che il collegio Mezarion fosse per veder rinascere Pascal, l'illustre solitario di Porto-Reale. Infatti, nel suo primo anno di filosofia, d'Alembert scrisse un commentario sull'epistola di S. Paolo ai Romani: così, disse Condorcet, cominciò egli come Newton aveva finito.

Non ostante fu nel tempo della sua vita di studente che d'Alembert prese il gusto per le matematiche, allo studio laborioso e penoso delle quali si dedicò con ardore, nè tardò molto a collocarsi in un posto elevato fra gli uomini, le di cui utili fatiche hanno fatto fare dei progressi a queste scienze sublimi. Dopo avere studiato successivamente il diritto e la medicina, senza ebe riuscirli potesse di prendervi gusto, cessò di contrariare la sua inclinazione, e tutto ei dedicò allo studio suo prediletto. Negli anni 1739 e 1740 presentò all'Accademia delle scienze di Parigi due memorie; l'una sul movimento de' corpi solidi a traverso un fluido, l'altra sul calcolo integrale. Questi primi saggi lo elevarono subito fra i più dotti matematici, e l'Accademia gli ricompensò aprendo, fino dal 1741, le sue porte al loro autore.

Nel 1743, d'Alembert pubblicò il suo *Trattato di Dinamica*. Il metodo di cui fece uso in quell'opera riduce tutte le leggi del moto dei corpi a quella del loro equilibrio, e così riconduce la dinamica alla statica. Richiamando in tal modo, dice Lagrange, ad un metodo uniforme il porre in equazione i problemi di questo genere, che si facevano dipendere da principj incoerenti, e più indovinati ebe dimostrati, pose fine a quella specie di sfide ebe i geometri s'indirizzavano allora su questa materia.

Il *Trattato dei fluidi*, che forma un seguito necessario al *Trattato di Dinamica*, comparve nel 1744. D'Alembert fu ancora obbligato di ristingerli in quello scritto alle ipotesi, colle quali Giovanni e Daniele Bernoulli erano riusciti a rendere il moto dei fluidi suscettibile del calcolo; ma, appoggiando le sue soluzioni sul principio che egli aveva felicemente applicato alla ricerca del moto dei corpi solidi, rettificò alcuni errori sfuggiti ai suoi predecessori, e pose almeno fuori di ogni disputa ciò che avevano essi trovato d'esatto.

A tale opera successe l'altra della *Teoria dei venti*, che riportò nel 1746 il premio proposto dall'accademia di Berlino, e nella quale si trova il germe della

diceva il Vescovo di Limoges, durante la vita di d'Alembert: « non lo conosco personalmente; ma ho sempre sentito dire che i suoi costumi sono semplici, e la sua condotta senza macchia. Io quanto alle sue opere, io le leggo e le rileggo, nè vi trovo che genio, profondità, cognizioni estesissime, ed un buon sistema di morale. Se le sue opinioni non sono così rette come i suoi scritti, egli merite pietà, ma nessuno ha diritto d'interrogare la sua coscienza. » La Harpe non si esprime diversamente parlando di lui; e se, dopo la sua morte, non fosse stata pubblicata la sua corrispondenza col Voltaire e con altri, nessuno certamente avrebbe potuto asserire, se non per semplici congetture, che d'Alembert nutrisse sentimenti erronei sulla religione. Le forti e dure espressioni delle quali si servono gli autori francesi parlando delle opere letterarie e filosofiche dell'Autore del *Discorso preliminare* dell'*Enciclopedia*, non sono state da essi dettate per zelo di religione o di sana filosofia, ma per aver trovato in quelle opere, che occupano un posto distinto nella letteratura francese, opinioni e sentimenti che sono in aperta contraddizione coi tantrusi principj del Kantismo da essi professato. Chi desiderasse notizie più estese sulla opera e sulla vita di d'Alembert potrà vedere il primo tomo delle *Opere filosofiche, storiche, e letterarie* di d'Alembert, riunite a publicate da Bastien, Parigi 1805, 18 vol. in 8. I Traduttori.

rigorosa applicazione dell'analisi al moto dei fluidi. La detta società, che aveva coronato d'Alembert, lo adottò per acclamazione nel numero de' suoi membri. Fra le memorie che le indirizzò tre hanno contribuito particolarmente ai progressi della scienza: quelle del 1746 e del 1749 sull'analisi pura; e quella del 1748 sulle corde vibranti. Quest'ultima fermò l'attenzione dei geometri sul calcolo integrale delle differenziali parziali, di cui Eulero non si era occupato che di passaggio, e senza farne applicazione nessuna.

D'Alembert prendeva egualmente parte alle ricerche che hanno completato le scoperte di Newton sul moto dei corpi celesti, e terminato di permutare in teoria ciò che dapprima non si era chiamato che un sistema. Mentre Eulero e Clairaut vi studiavano, egli presentò nel 1747 all'Accademia delle Scienze di Parigi una soluzione del *problema dei tre corpi*; problema il di cui scopo è di determinare le alterazioni che le reciproche attrazioni dei pianeti cagionano nel moto ellittico che essi eseguirebbero intorno al sole, se non obbedissero che al loro peso verso quest'astro. D'Alembert continuò tali studj con assiduità per parecchi anni; ed il risultato ne fu l'opera che porta per titolo: *Ricerche sopra differenti punti importanti del sistema del mondo*; il primo volume comparve nel 1754, e il terzo nel 1756.

Nel 1749 comparvero le *Ricerche sulla precessione degli equinozi*. Si trova in quest'opera importante la prima applicazione dell'analisi alla determinazione generale del moto di rotazione di un corpo di figura qualunque. Tali ricerche fanno epoca nella dinamica che nell'astronomia fisica.

D'Alembert consacrò molti anni della sua vita a' lavori puramente letterarii; è autore del discorso d'introduzione dell'Enciclopedia, e di un gran numero di articoli riguardanti le scienze matematiche inseriti in quell'opera. Ei morì di male di pietra, senza essersi fatto fare il taglio; in età di sessantasei anni, il dì 29 d'Ottobre 1783.

Non possiamo qui astenerci da alcuna riflessione sulla sorte delle opere matematiche di d'Alembert. Esse trovansi oggi ridotte quasi alla condizione di quelle dei matematici antichi: molto si citano, poco si leggono. Niuno ardirebbe di collocare sopra di lui un geometra de' suoi contemporanei, quando considerare si vogliano le difficoltà che vinse, l'intrinseco valore dei metodi che inventò, e quanto fosse sottile ed acuto nelle sue vedute; ma tale acutezza, la quale sembra che formi il carattere distintivo del suo talento, lo gettava sovente nelle vie torte, e gl'impediva, non vi ha dubbio, di ricercare il merito di una luminosa e facile esposizione. È forse per questa ragione, e non per una trascuratezza che male si accoppierebbe col vero amor di gloria, che in generale egli fu poco sollecito delle particolarità nelle sue opere matematiche, toltone però il suo *Trattato di dinamica*, del quale pubblicò una seconda edizione. In quest'opera stessa la forma delle dimostrazioni e dei calcoli si allontana molto dal metodo, semplice e secondo, che Eulero tenne in tutti i suoi scritti; da ciò deriva che le scoperte di d'Alembert hanno preso, negli scritti d'Eulero e de' suoi successori, una nuova forma che distoglie di più in più dalla lettura de' trattati in cui esse comparvero per la prima volta. La riduzione dei metodi a semplicità, di mano in mano che si fanno generali, invecchia assai presto le opere di geometria e di calcolo, e la lettura degli originali diviene un lavoro di erudizione. Sotto questo aspetto, ed a merito eguale, i grandi scrittori hanno un vantaggio sui primi dotti; non si fa che citare i nomi di questi, e si leggono quelli. Gli uomini dunque che desiderano di prolungare gli avventurosi successi dei loro scritti nelle scienze, non si limitino ad arricchirle di scoperte, ma nelle parti della nitida locuzione e nell'eleganza dei metodi non sianò trascurati, se a parlar mirano eglino stessi a lungo coi posteri!

Le opere matematiche di d'Alembert non sono state mai raccolte in collezione, e sono le seguenti. I. *Traité de dynamique*, Parigi, nn vol. in-4, di cui la prima edizione è del 1743, e la seconda del 1758; ve ne ha una ristampa, Parigi, 1796; II. *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides*, Parigi, un vol. in-4, di cui la prima edizione è del 1744, e la seconda del 1770; III. *Réflexions sur la cause générale des vents*, Parigi, 1747, in-4; IV. *Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre*, Parigi 1749, in-4; V. *Essai d'une nouvelle théorie sur la résistance des fluides*, Parigi, 1752, in-4; VI. *Recherches sur différents points importants du système du monde*, Parigi, 3 vol. in-4, 1754, 1756. Debbono unirsi a quest'opera le *Nouvelles tables de la lune*, e la *Nova tabularum lunarium emendatio*; VII. *Opusculs mathématiques*, Parigi, 8 vol. in-4, 1761-64-67-68-73-80. Come seguito agli scritti precedenti si pongono gli *Éléments de musique théorique et pratique suivant les principes de M. Rameau délaïrés, développés et simplifiés*, 1 vol. in-8. Quest'opera ha avuto quattro edizioni; la quarta è stata impressa a Lione nel 1779.

ALESSANDRIA (Scuola d'). La storia di questa antica e celebre istituzione è senza dubbio collegata con quella delle lettere; ma le scienze matematiche debbono a' suoi illustri discepoli scoperte sì importanti, e opere sì memorabili, che essa sembra essere stata esclusivamente dedicata a queste alte cognizioni. Sotto un altro punto di vista, la storia di questa nobile scuola appartarrebbe ancora all'insegnamento superiore di quelle scienze, quando ancora non avesse essa avuto che la sola gloria di conservarne nel suo seno il prezioso deposito, nei periodi più funesti ai progressi dell'umanità.

La città d'Alessandria, situata fra il Lago Mareotico ed il Mediterraneo, all'estremità dell'angolo occidentale dell'Egitto, fu fondata da Alessandro il Grande verso il primo anno della CXII olimpiade, intorno all'anno del mondo 3670, e 334 anni avanti Gesù Cristo. Alessandro, quel guerriero civilizzatore, che non ebbe fanciullezza e non giunse all'età matura, quell'uomo prodigioso, la di cui vasta mente abbracciava il mondo, che egli percorse da conquistatore, voleva che la città della quale aveva disegnato il recinto servisse, per così dire, di legame tra l'Oriente e l'Occidente. Questa nobile idea, che ricongiungeva così con un avvenire sconosciuto tutto il passato della terra dei Faranni, non si estinse colla vita e colla potenza di colui che l'avea concepita, ma partecipò anzi di quel carattere di durata, che difende contro il tempo le ispirazioni del genio. Alessandria infatti ha compinto sotto molti rapporti il destino che le aveva assegnato il suo glorioso fondatore.

Dopo la morte d'Alessandro, il vasto impero formato delle sue conquiste rimase preda delle guerre civili più spaventevoli. Ognuno de'suoi capitani cinse una corona. Quella di Egitto toccò a Tolomeo Sotero, che, rispettando almeno le idee del suo predecessore, trasportò ad Alessandria la sede del governo. In breve questa città oscurò colla sua bellezza e col numero de'suoi monumenti quelle città antiche, donde traevano origine le orgogliose tradizioni dell'Egitto. La dolcezza del governo di Tolomeo attirò nelle sue mura i dotti e i filosofi della Grecia: vennero loro dietro gli artisti; e la brillante civillizzazione d'Atene, di cui la gloria e la libertà avevano allora allora terminato di esistere, trasportata così sotto il bel cielo dell'Egitto, vi gettò in pochi anni feconde radici. In quell'epoca dobbiamo fissare lo stabilimento della scuola d'Alessandria. Ma Tolomeo Filadelfo, figlio e successore di Sotero, accordò a tale istituzione nascente segni sì liminosi della sua protezione, che generalmente è stata a lui attribuita la gloria della sua fondazione. Egli diede ricetto ai dotti ed ai filosofi, ai quali era aperta la scuola, in un magnifico edificio contiguo al suo palazzo (Strabone, *Geogr. lib. XIII.*). Supplì generosamente

a tutto l'occorrente per dare esecuzione alle esperienze e alle ricerche necessarie al perfezionamento delle scienze, e cominciò a raccogliere a grandi spese quella immensa e celebre biblioteca, nella quale furono successivamente depositati tutti i libri dell'Egitto, e tutti quelli che produssero in seguito i progressi delle umane cognizioni. La perdita di questa collezione unica è ancora, dopo più di mille anni, l'oggetto del rammarico il più doloroso.

Nel primo ordine dei maestri che, nella branca delle scienze matematiche, accorsero fino dalla sua origine ad illustrare la scuola d'Alessandria, dobbiamo collocare il grande Euclide, che oggi non si può più confondere con Euclide di Megara, il filosofo, e il discepolo di Socrate, morto un secolo avanti l'epoca del geometra. Euclide riannò in un sol corpo tutte le verità scoperte prima di lui. In quest'opera fece uso di un metodo così semplice e nel tempo stesso così profondo, pose tra le sue proposizioni una concatenazione sì precisa e sì rigorosa, che dopo di lui tutti gli sforzi dei geometri non sono riusciti a trovare in che correggere le sue dimostrazioni, l'evidenza e la forza delle quali non si è mai potuta attaccare. Dopo più di duemila anni, gli elementi di Euclide non hanno cessato di formare la base essenziale della scienza, e nessun braccio è stato forte abbastanza per rompere la catena formata dall'antico geometra. Noi esamineremo più estesamente gli importanti lavori d'Euclide nell'articolo biografico che gli destiniamo. Lo stesso ancora faremo delle dottrine e delle scoperte degli uomini illustri che ci occorrerà di rammentare nel corso di quest'articolo, consacrato particolarmente all'insieme delle cognizioni matematiche che la scuola d'Alessandria ha sparse nel mondo.

Mentre Euclide gettava così le basi indistruttibili dell'aritmetica e della geometria, l'astronomia usciva, in Alessandria, da quello stato d'infanzia in cui era tuttavia immersa, ed in cui l'avevano lasciata i filosofi greci venuti dopo Talete. Aristillo e Timocaride, di cui disgraziatamente non conosciamo le opere, se non per l'analisi che ne ha fatta Tolomeo nel suo Almagesto, cessavano di abbandonarsi a vane congetture, e cominciavano a sentire la necessità delle osservazioni, le quali hanno servito a stabilire il primo sistema d'astronomia, fondato sopra un attento esame dei fenomeni celesti, e proprio a rappresentarli con qualche verità. Pare che Aristillo e Timocaride siano stati i primi astronomi, che abbiano determinato in un modo approssimativo la posizione delle stelle fisse rapporto allo zodiaco, notando le loro longitudini e le loro latitudini. Un altro astronomo, Dionisio, acquistava fama nel tempo stesso nella scuola d'Alessandria immaginando un'era particolare, in cui i nomi dei mesi si fanno derivare da quelli dei segni dello zodiaco. Nella stessa epoca, la scuola vedeva fiorire Aristarco di Samo, i di cui lavori astronomici acquistarono una grande celebrità, perchè ebbero per oggetto il sistema dell'universo: egli adottò l'opinione che la scuola pitagorica aveva già emessa sul moto della terra, e fece ogni sforzo per far prevalere quest'ipotesi in Alessandria. Aristarco di Samo ha composto sulle matematiche vari scritti, di cui sfortunatamente non è giunta fino a noi che una piccola parte; ma la testimonianza dei suoi contemporanei ha deposto in favore del suo ingegno, ed ha consolidato la sua gloria. Creò un nuovo metodo per misurare la distanza dal sole alla terra per mezzo della dicotomia della luna; metodo che fece una profonda sensazione nella scuola d'Alessandria, poichè tal proposizione, che estendeva considerabilmente i confini dell'universo, era contraria a tutte le cognizioni scientifiche, e sopra tutto alla cosmogonia di quel tempo.

Eratostene, che successe da vicino a questi uomini celebri, occupò ad Alessandria un posto distinto tra i dotti maestri di quella scuola pel suoi lavori sulla geometria e sull'astronomia, rami delle scienze matematiche ai quali si dedicò più specialmente. Diede una soluzione del problema della duplicazione del cubo, non

servatoci da Eutocio nei suoi commentarii sopra Archimede. Gli si deve ancora un metodo ingegnoso per trovare i numeri primi. Fu nei consigli di Eratostene che Tolomeo Evergete fece erigere, sotto il portico della scuola d'Alessandria, grandi strumenti per l'osservazione degli astri; la scienza gli deve pure la costruzione delle armille, famose nella storia dell'astronomia greca, che ha eseguito unicamente col loro mezzo le sue principali osservazioni. Il tentativo di Eratostene per misurare la grandezza della terra, mediante l'osservazione del passaggio del sole sopra il pozzo di Siene, il fondo del quale veniva illuminato a mezzodì, nel giorno stesso del solstizio d'estate, fece epoca nella scienza, quantunque la valutazione della grandezza del grado terrestre ottenuta con tal mezzo non offra che un'approssimazione poco concludente. Lo stesso si dica dell'osservazione che fece questo dotto dell'obliquità dell'eclittica.

Fra i matematici che si formarono alla scuola d'Alessandria sotto i successori di Euclide, Apollonio di Perga è uno di quelli il di cui genio ha mandato più splendore, e i di cui lavori hanno maggiormente contribuito ai progressi della scienza. Apollonio ha scritto con mirabil fecondità in tutte le parti delle matematiche; ma il suo trattato delle sezioni coniche sarebbe stato solo sufficiente per immortalare il suo nome. Questo capolavoro, di cui gli Arabi avevano incominciato una traduzione sotto il regno di Almamoun, è restato per molto tempo sconosciuto all'Europa. I quattro primi libri di tale opera preziosa erano i soli che si possedessero, quando, verso la metà del XVII secolo, vennero per fortuna ritrovati anco gli ultimi. Del resto la storia di queste vicissitudini bibliografiche sarà più convenientemente inserita nell'articolo biografico che destiniamo ad Apollonio.

Non deve quì il lettore aspettarsi un'esatta nomenclatura dei matematici che onorarono la scuola d'Alessandria; noi abbiamo soltanto dovuto scegliere, nell'ordine cronologico, gli uomini superiori, le di cui opere fanno epoca nella storia di quella istituzione, e segnano un progresso nella scienza. Lo spirito umano non giunge che per mezzo di lente e successive gradazioni alla scoperta delle grandi verità; e possiamo farci un'idea del cammino percorso dalle scienze matematiche, misurando le fasi dei loro progressi nell'intervallo dei due secoli che separano gli Elementi di Euclide dal Trattato delle sezioni coniche d'Apollonio. Non deve inoltre dimenticare il lettore, che noi abbiamo passato sotto silenzio la storia dei progressi della scienza fuori della scuola d'Alessandria, quantunque fosse essa in quel tempo come il centro di un gran sistema, e la sua influenza e i suoi insegnamenti si dilatassero molto da lungi tra le nazioni civilizzate. Così nel numero dei grandi matematici di quel tempo, di cui non abbiamo rammentato i lavori, brilla l'illustre ed immortale Archimede. Ma non tal uomo appartiene a sè stesso, le sue opere appartengono al mondo, e nessuna scuola può attribuirsi la gloria che va associata al suo nome.

Dopo i grandi nomi dei quali abbiamo succintamente esposto i titoli all'ammirazione della posterità, l'ordine naturale dei tempi colloca nei fasti della scuola alessandrina il nome meritamente celebre d'Ipparco, nato a Nicea, in Bitinia, nel secolo secondo avanti l'era nostra. Se l'epoca precedente sembra, nella storia delle matematiche, maggiormente ripiena de' progressi della geometria, Ipparco segnò l'epoca delle grandi scoperte e del massimo splendore dell'astronomia, creando delle ipotesi che hanno posto la scienza nel cammino della verità. Quest'astronomo determinò, con una precisione molto maggiore di quella che prima di lui si era ottenuta, la durata delle rivoluzioni del sole, misurò l'eccentricità di quest'astro, e determinò il suo apogeo. Il genio di quest'uomo celebre si elevò così fino alle più alte concezioni della scienza. Ad esso è dovuto il primo catalogo di stelle fisse, che servì quindi a Tolomeo per formare le tavole del cielo. Questo

prodigioso lavoro, che non spaventò nè la pazienza nè il coraggio d'Ipparco, pose la scienza sulla via d'una delle sue più brillanti scoperte, quella cioè del moto delle stelle, e rivelò all'umanità la cognizione dell'ordine ammirabile che presiede al sistema del mondo. I moti di quegli astri innumerabili, che muovonsi nell'immensità, cessarono di essere per l'uomo un mistero inesplicabile, e fin d'allora concepì esso la speranza, che la scienza ha quindi realizzato, di penetrare più innanzi nel santuario delle leggi immutabili che regolano l'universo. Santa e potente facoltà della ragione, che pone l'uomo al primo anello della catena degli esseri, e gli scuopre una parte dei segreti dell'alto suo destino, sviluppando in lui quella virtualità creatrice che lo inalza fino a Dio! Qualunque possano essere le imperfezioni che esistono nelle scoperte degli antichi, è impossibile di non ammirare le ingegnose ipotesi, che essi fondarono sopra osservazioni eseguite senza l'aiuto degli strumenti che la scienza moderna ha creato, e sopra osservazioni anteriori, delle quali non avevano mezzo nessuno di verificare l'esattezza e la precisione. Essi infatti portarono un'attitudine ammirabile ed una sagacità meravigliosa nell'uso dei soli metodi che fossero a loro disposizione. Il cammino percorso dalla scienza astronomica da Talete fino ad Ipparco è immenso, e la scuola d'Alessandria ha avuto la gloria di contrassegnare ognuno dei suoi periodi con qualche gran progresso. Seguendo col pensiero questo cammino lento, ma sicuro, si vedono a poco a poco dissiparsi le nubi che nascondevano alla ragione umana le cognizioni che adesso possiede; vedonsi ad uno ad uno crollare e cadere gli antichi errori cosmogonici dei primi popoli civilizzati, e la scienza preparare così il mondo a rievolvere la prima rivelazione dell'Evangelio.

Tutti gli uomini che si distinsero nelle scienze da Ipparco fino all'era cristiana appartengono direttamente o indirettamente alla scuola d'Alessandria. I loro lavori non sono in sostanza che lo sviluppo dei lavori degli illustri maestri che uscirono dal seno di quella istituzione. Ctesibio, ed Erone, suo discepolo, ambedue d'Alessandria, si danno allora con successo allo studio della meccanica, ed estendono i confini di tale scienza; Possidonio si distingue per la sua abilità e per le sue profonde cognizioni in tutte le parti delle matematiche; Gemino espone la storia dell'astronomia; Cleomede scrive gli elementi di questa scienza, e comincia così a popolarizzarne lo studio; un altro astronomo, Sosigene, associa il suo nome alla riforma del calendario operata da Giulio Cesare; Dionisiodoro risolve il problema, proposto da Archimede, della divisione di un emisfero in un dato rapporto, per mezzo di un piano parallelo alla base; finalmente, il geometra Teodoro stabilisce i principj dell'astronomia sferica, e fa fare un progresso alla gnomonica costruendo un quadrante universale e portatile.

Durante il primo secolo dell'era cristiana la scuola d'Alessandria non produsse verun matematico di cui la posterità abbia dovuto conservare il nome. Ma perciò non brilla essa meno di un vivo splendore in altri rami di umano sapere, di cui non è nostro dovere l'occuparci in quest'opera.

Ogni secolo ha uno sviluppo intellettuale che gli è proprio; ed in quell'epoca i grandi avvenimenti politici, che avevano allora cangiato l'aspetto del mondo, dovettero dare allo spirito umano una direzione che influì sui progressi delle scienze. Tutte le idee si rivolsero verso le questioni sociali, che dovevano agitare la perdita di tante nazionalità incorporate nell'immensa monarchia che si elevò sugli avanzi della libertà romana. Da un'altra parte, il cristianesimo cominciava a sparger nel mondo i benefizj delle alte sue dottrine, ed influiva sulla preoccupazione degli spiriti con tutta la forza che la morale esercita nei rapporti sociali.

Verso l'anno 130 dell'era di rigenerazione, la scuola d'Alessandria accolse con entusiasmo i lavori di Tolomeo, nato a Tolemeide in Egitto. Ipparco aveva avuto il

progetto di fondare un corso completo di studj astronomici; Tolomeo lo mandò ad effetto e rettificò le teorie di quel grand' uomo per mezzo di nuove osservazioni, alle quali diede una maggiore estensione, ed un carattere di certezza, che formò delle sue ipotesi la scienza stessa, della quale i suoi predecessori non avevano potuto risolvere tutti i problemi. Parleremo altrove con maggiori particolarità delle scoperte di Tolomeo; ci basterà qui il dire che questo illustre astronomo, ponendo le sue dottrine come un limite che non fosse più permesso di oltrepassare, chiuse per così dire la scuola d'Alessandria ai progressi. Il suo sistema fu generalmente adottato, e servì di base alle osservazioni degli Arabi, quando i matematici di quella nazione ristorarono l'astronomia. Ricevendo da essi la scienza, l'Europa moderna accettò i principj sui quali era fondata, e che furono pure i soli che s'ingrassero nelle nostre scuole, fino ai tempi a noi più vicini, in cui prodigiose scoperte vennero a rovesciare un sistema che aveva regolato la scienza per un corso di quattordici secoli.

I lavori di Tolomeo sembrano aver dato un nuovo vigore allo studio delle scienze matematiche; ma i suoi libri furono unicamente l'oggetto di commentarii più o meno ingegnosi, senza che, come abbiain detto, i limiti che avevano imposto all'astronomia venissero mai oltrepassati. Nulladimeno geometri celebri, come Ipsicle, Porfirio, il vescovo Anazolio, Filone di Tiana, Timaride, Achille Tazio, conservarono degnamente da Tolomeo fino a Diofanto l'antica fama della scuola d'Alessandria.

A quest'ultimo matematico ordinariamente si attribuisce, sebbene a torto, l'invenzione dell'Algebra; esso è almeno tra i Greci il primo, nelle opere del quale si scoprono le più antiche tracce di questa scienza. Dopo di lui, Pappo, Teone, e la celebre Ipazia, sua figlia, compariscono nella scuola d'Alessandria come gli ultimi raggi dell'astro maestoso delle scienze matematiche. Verso la metà del quinto secolo, il filosofo Proclo, capo della setta platonica, aprì una nuova scuola in Atene, dove si trovò così trasportata la sede delle matematiche. Dopo quel tempo, la scuola fondata da Tolomeo Sotero e da Tolomeo Filadelfo fu quasi esclusivamente aperta alle dispute dommatiche e alle dottrine di una filosofia, notevole per la sua tendenza ad operare la fusione dei principj i più opposti; tentativo impotente che l'eclettismo del nostro tempo sembra voler riprodurre, ad onta dei lavori intellettuali della Germania, che hanuo fatto fare alle scienze filosofiche un progresso tanto reale sulle dottrine della scuola d'Alessandria, quanto quelli che nelle scienze matematiche hanno superato le ipotesi di Tolomeo.

Nell'anno 641 dell'era nostra, la città d'Alessandria cadde in potere degli Arabi. Questo avvenimento disastroso accadde sotto il califfato di Omar, il secondo successore di Maometto, la di cui religione aveva in poco tempo infiammato l'Asia di un entusiasmo frenetico. Il mondo civilizzato fu per un istante in pericolo di cadere sotto la spada dei settarii ardenti e fanatici del Corano; ed Alessandria, rifugio anco in quel tempo dei dotti, e deposito delle umane cognizioni non sfuggì al loro cieco istinto di distruzione. I monumenti venerabili dell'antichità, che riempivano quella città, furono distrutti o mutilati, ed il fuoco divorò la sua preziosa biblioteca, nella quale erano stati laboriosamente raccolti tutti i libri scritti durante nove secoli su tutte le parti dell'umano sapere.

La storia ha conservato il nome del filosofo Filopone, di cui lo zelo ed i generosi sforzi furono nulladimeno impotenti ad impedire quella catastrofe. Ei giunse non ostante a farne sospendere l'esecuzione, e a scuoter talmente le convinzioni di Amrou, che questi si credè in dovere di consultare il califfo sul partito da prendersi. Ecco la risposta di Omar, risposta che il suo barbaro sofisma ha reso celebre. « I libri di cui tu mi parli, disse egli all'inviato del suo generale, sono conformi o contrarii al Corano: nel primo caso bisogna bruciarli come inutili;

nel secondo sono degni delle fiamme come periclosi « Questa sentenza fu eseguita, e tale era il numero immenso dei volumi che componevano quella collezione, che tutti gli storici si accordano a dire che servirono per più di sei mesi a scaldare i bagni pubblici dell'infelice Alessandria.

Così perirono a un tempo e quella celebre scuola, che per una serie non interrotta di dieci secoli aveva sì potentemente cooperato ai progressi dello spirito umano, e quella biblioteca dove si dice che erano stati raccolti e classati con un ordine ammirabile tutti i libri che contenevano la mente dell'antichità. Questa perdita inestimabile non fu certamente una delle cause meno potenti, che contribuirono a sparger sulla terra le tenebre dell'ignoranza e della barbarie, che non si è dissipata che lentamente e dopo una lunga serie di anni.

Per una di quelle reazioni inaspettate e quasi inesplicabili, che sembrano indicare l'influenza della mano potente che dirige l'umanità, quegli stessi Arabi che avevano rovesciata e distrutta, nel loro cieco fanatismo, la scuola e la biblioteca d'Alessandria, e soffocata per così dire la scienza nelle loro mani fumanti di sangue, furono la prima nazione che ristabilì il suo culto, e che osò il suo carattere sociale con importanti lavori, ai quali i lumi moderni debbono i loro primitivi sviluppi.

- ** ALEXANDRE, o ALLERANDRE (GIACOMO), dotto religioso della Congregazione di S. Mauro, nacque ad Orleans nel 24 Gennaio 1653. Passò la sua vita tra i doveri del suo stato, e lo studio delle scienze matematiche, e morì il 23 Giugno 1734. È autore delle seguenti opere: I. *Traité du flux et du reflux de la mer*, Parigi, 1726, in-12; II. *Traité général des horloges*, Parigi, 1734 in-8. Tale opera è al di sotto dei progressi che l'orologeria ha fatti da un secolo, pure è interessante il catalogo, che l'autore vi ha inserito, di tutti gli scritti pubblicati prima del suo sullo stesso soggetto.

ALFARAZ, o ALFERAZ (*Astron.*). Più esattamente *âl-faras*, il cavallo. Nome dato tanto alla costellazione di Pegaso, quanto a quella del Cavallino. Queste due costellazioni vengono distinte colle denominazioni di *âl-faras-âl-aasem*, il gran cavallo, e di *gattat-âl-faras*, sezione del cavallo. Alcuni dei nostri astronomi danno a torto alla bella stella che si vede nell'ala di Pegaso, e che è segnata x nei cataloghi, ora il nome di *alfaraz*, ed ora quello di *markab*. È per ignoranza che una sola denominazione si è divisa in due nomi differenti. Questa stella è chiamata dagli Arabi *markab-âl-faras*, il veicolo del cavallo.

ALFARION. Strumento presso gli aotichi che serviva a livellare i piani. Pare che sia questo la livella dei muratori, che somiglia ad *oo' alfa* o A majuscola romana.

ALFERAZ. Vedi ALFARAZ.

- ** ALFERGAN (AHMED-BEN-KOTHAÏN), astronomo arabo, conosciuto più comunemente sotto il nome corrotto di *Alfraganus*, fu nominato ALFERGAN perchè era nato a Ferghanab, città della Sogdiana. Era sì eccellente nei calcoli astronomici che gli venne dato il soprannome di CALCOLATORE (*Hâcib*). Non si può determinare con precisione l'epoca della sua nascita, nè quella della sua morte. Si sa solamente che viveva sotto il regno del califfo Almamoun, morto nell'833. Alfergan è autore di una *Introduzione all'Astronomia*, divisa in 30 capitoli: tre de' suoi compendii dell'astronomia greca che cominciava ad essere adottata presso gli Arabi nel tempo che comparve Alfergan. Il catalogo delle stelle vi si trova, come nell'*Almagesto*, di 1022, e la precessione di un grado in cento anni; ma l'obliquità dell'eclittica non vi è che di 23° 35'. Esistono di quest'opera tre traduzioni latine; la prima, di Giovanni di Spagna, comunemente conosciuto sotto il nome corrotto di Giovanni Ispalense (*Hispalensis*), fatta nel XII secolo, stampata a Ferrara nel 1493, ristampata a Norimberga nel 1537, con una prefazione di Melantone, ed a Parigi nel 1546 in-8 col titolo: *Alfragani astronomorum peri-*

tissimi Compendium, complectens omne quod ad astronomica rudimenta spectat; la seconda, di Giovanni Christman, fatta sopra una versione ebraica, e pubblicata col titolo: *Muhamedis Alfragani Arabis cronologica et astronomica Elementa*, Francfort, 1590; e la terza, di Giacomo Golio, pubblicata ad Amsterdam nel 1669 in-4, insieme col testo arabo, col titolo: *Muhammedis fil. Ketiri Ferganensis Elementa astronomica*. Il traduttore l'arricchì di note erudite che la morte non gli permise di terminare.

Alfegan ha composto pure altre due opere, una sugli orologi solari, l'altra sulla costruzione dell'astrolabio e sull'uso di esso. Ne promise un'altra sull'obliquità dell'eclittica, e sulla maniera di osservarla in ogni secolo; ma questo trattato non ci è pervenuto. La sua introduzione all'astronomia è molto superficiale: essa non contiene che quanto dappertutto si legge, tranne i nomi arabi di alcune stelle, i domicilj della luna, le distanze dai pianeti e dalle stelle alla terra, ed i loro diametri. Ei supponeva che le orbite dei pianeti fossero disposte in modo che la più piccola distanza di un pianeta qualunque fosse eguale alla maggior distanza del pianeta inferiore, e la distanza più grande eguale alla più piccola del pianeta superiore; in tal maniera tutte le orbite si toccavano, e l'orbita di Saturno toccava la sfera delle stelle fisse.

ALFETA (*Astron.*). Nome derivato per corruzione da quello *âl-fekah*, dato dagli Arabi all'intera costellazione della Corona settentrionale. I nostri astronomi hanno dato per errore questo nome ad una stella particolare di questa stessa costellazione, il cui nome è *moanyr-âl-fekah*, *la risplendente della Corona*. Tale stella è quella che vien pure chiamata: *Lucida Coronae*, o *splendore della Corona*. Vedi l'articolo **CORONA**.

ALFONSINE (*Astron.*). Si è dato questo nome alle tavole astronomiche compilate a Toledo dietro gli ordini del re Alfonso X. Questo principe imprese il primo a rimediare i difetti dell'astronomia antica, e soprattutto a correggere le tavole di Tolomeo, la teoria del quale si allontanava continuamente di più in più dalle nuove osservazioni. Alfonso chiamò a Toledo un gran numero di astronomi cristiani, ebrei ed arabi, che lavorarono congiuntamente all'esecuzione di quell'importante progetto. Dopo quattro anni di studj, le Tavole Alfonsine furono pubblicate nel 1252, e ridotte all'epoca del primo Giugno di detto anno, nel quale era salito sul trono il re Alfonso. Esse furono quindi corrette, nel 1256, sulle osservazioni di un celebre astronomo arabo appellato Hassan Aboul Hassan. Gli astronomi che ebbero una maggior parte nella compilazione di queste Tavole furono, secondo alcuni autori, l'ebreo Isacco Aben-Said, Al-Kabith, Aben-Ragel, Aben-Mousa, Mohammed ec.

Le cognizioni astronomiche del tempo di Alfonso erano insufficienti per realizzare il progetto di quel re. Gli autori delle Tavole Alfonsine hanno commesso parecchi errori gravissimi, ed in specie nella loro ipotesi sul moto delle stelle fisse. Non ostante determinarono il luogo dell'apogeo del sole più esattamente di quello che era stato fatto fino a quel tempo, e non s'ingannarono che di 28" sulla durata dell'anno. Le Tavole Alfonsine furono pubblicate per la prima volta nel 1483 a Venezia da Radtolt, che in quel tempo era un eccellente stampatore: questa edizione contiene 24 fogli, ed è rarissima. Se ne hanno altre edizioni del 1492, 1521, 1545 ec. Vedi la *Storia dell'Astronomia* di Veidler, pag. 280.

ALFONSO X, soprannominato il Saggio, e l'*Astronomo*, re di Castiglia, e di Leone, figlio di Ferdinando il Santo e di Beatrice figlia dell'imperatore Filippo I, successe nel 1252 a Ferdinando III, suo fratello. Questo principe spiegò, a vantaggio dell'astronomia, uno zelo che ha reso il suo nome celebre nei fasti della scienza, della quale faceva l'occupazione sua favorita. Si mostra anche oggi, nell'Alcazar o palazzo di Segovia, la stanza dove ei faceva le sue osservazioni, e il

gabinetto dove le scriveva. Il regno di Alfonso fu agitatissimo; ma la protezione che accordò alle scienze gli acquistò maggior gloria delle guerre, nelle quali lo trascinò la sua ambizione di divenire imperatore. A sue spese e dietro i suoi ordini furono compilate le Tavole astronomiche che portano il suo nome. *Vedi ALFONSO.*

Il gesuita Mariana, autore di una storia di Spagna, descrivendo il carattere di questo principe, e facendo allusione alle sue disgrazie ed al suo gusto per l'astronomia, dice: *Erat Alphonso sublimis ingenium, sed incautum, superbae aures, lingua petulans, literis potius quam civilibus actibus instructus, dumque coelum considerat observatque astra, terram amisit.* Un'accusa di empietà più grave di questo cattivo giuoco di parole è stata ingiustamente imputata ad Alfonso. Alla vista delle ipotesi imbarazzanti che bisognava ammettere per conciliare tutti i fenomeni celesti, ei soleva dire motteggiando: « Se Dio m'avesse » chiamato a consigliarlo nel momento della creazione, il mondo sarebbe stato » più semplice e meglio ordinato. » Queste ardite parole, nel secolo in cui viveva, gli attirarono il sospetto che fosse ateo; ma noi non sappiamo vederci se non che Alfonso non era punto soddisfatto del sistema astronomico del suo tempo, e che aveva un vago presentimento delle scoperte, che sono state fatte dopo di lui, e che non permettono più d'indirizzare un tal rimprovero all'ordine dell'universo. Questo principe morì il 21 Aprile 1284.

ALFRAGANUS. *Vedi ALFERGAN.*

ALGEBAR, o ALGEBOR (*Astron.*). Nome arabo della bella costellazione più comunemente conosciuta sotto il nome d'Orione.

ALGEBRA. Scienza dei numeri considerati in generale, e scienza delle leggi dei numeri. (*Vedi il Discorso nell'INTRODUZIONE.*)

L'origine di questa scienza non può esser determinata con esattezza, e, sebbene ne esistano delle tracce negli scritti dei più antichi matematici, non è a parlar propriamente che dopo Diofanto, che essa ha formato un ramo della scienza dei numeri separato e distinto dall'aritmetica. Infatti tutte le considerazioni numeriche degli antichi non uscirono dalla sfera delle proprietà individuali dei numeri. Diofanto stesso non si eleva ad alcune verità generali che in quella parte dell'Algebra chiamata *teoria dei numeri*, che Gauss e Legendre hanno portata recentemente ad un sì alto grado di perfezione.

La parola *algebra* è derivata dall'arabo; ma la sua etimologia è stata diversamente interpretata. Gli Arabi che ci hanno trasmesso le prime nozioni di questa scienza importante l'avevano chiamata *el-djaber el-moqabelah*; che significa la scienza delle *restituzioni*, delle *proporzioni*, e delle *soluzioni*. Alcuni autori hanno pensato che l'Algebra traesse il suo nome da *Geber*, matematico, a cui ne attribuiscono l'invenzione, quantunque l'esistenza di questo Geber non sia ben provata. Senza arrestarci ad altre versioni etimologiche più o meno fondate, noi daremo una rapida scorsa ai primi sviluppi della scienza dei numeri, ne seguiranno i progressi lenti ed insensibili a traverso i secoli, e rammenteremo i principali autori, i di cui utili lavori l'hanno successivamente condotta a quella certezza razionale che la distingue sì eminentemente dalle altre scienze.

L'opera più antica che si conosca sull'algebra è quella di Diofanto, autore greco d'Alessandria, che viveva l'anno 350 della nostra era: era essa composta di tredici libri di cui solamente sei sono giunti fino a noi. Xilandro ne ha pubblicata una traduzione latina nel 1575; e, nel 1621 e 1679, Gaspare Bachet e l'illustre Fermat ne diedero delle edizioni greche e latine accompagnate da commentarii. I sei libri che ci restano di Diofanto non racchiudono un trattato sulle parti elementari della scienza; ma contengono semplicemente una collezione di quesiti difficili sui numeri quadrati e cubi, come pure diverse altre proprietà dei numeri. Nelle

sue osservazioni preliminari, o nella sua prefazione che è diretta ad un tal Dionisio, pel quale sembra essere stata scritta l'opera, Diofanto dà la nomenclatura e la generazione delle potenze; ei chiama le seconde potenze o quadrati, *dynamis*; i cubi, *cubus*; le quarte potenze, *dynamo-dynamis*; le quinte, *dynamo-cubus*; le seste, *cubo-cubus*, ec., secondo la somma degli esponenti delle potenze. Esprimeva una quantità incognita colla parola *ἀριθμός* numero, e la indicava nella soluzione colla sola finale *ς*. Nelle sue ricerche sulla moltiplicazione, osserva che *meno* moltiplicato per *meno* dà *più*, e che *meno* moltiplicato per *più* dà *meno*. Riguardo ai segni dell'addizione e della sottrazione, non ne fece uso che di un solo per l'ultima, ed è un ψ rovesciato ed un poco troncato. Il merito principale dell'opera di Diofanto consiste nella destrezza colla quale risolve i problemi indeterminati. In tali problemi, così chiamati perchè sono suscettibili di un'infinità di soluzioni, si tratta particolarmente di evitare i valori irrazionali ai quali conduce il metodo ordinario. Gli antichi non consideravano le quantità irrazionali come veri numeri, e per conseguenza, quando si cercava un numero atto a soddisfare un quesito, non poteva darsi una di queste quantità. Diofanto le evita per mezzo di alcune finte equazioni, il cui artificio merita di essere sviluppato. Ne daremo un esempio.

Si debba dividere un dato quadrato in due altri quadrati. Se il quadrato dato è 25, esprimendo uno dei quadrati cercati con x^2 , l'espressione $25 - x^2$ dovrà essere l'altro quadrato. Perchè lo sia necessariamente, si formi, dice Diofanto, un quadrato qualunque colla radice del quadrato dato, diminuita di un numero qualunque di volte l'incognita x , e si eguagli questo quadrato all'espressione $25 - x^2$. Il numero delle volte che deve prendersi l'incognita essendo arbitrario, supponiamolo eguale a 3; si avrà per la radice del quadrato fittizio, $5 - 3x$, il quadrato della quale $25 - 30x + 9x^2$ si farà eguale a $25 - x^2$, e così si otterrà l'equazione

$$25 - 30x + 9x^2 = 25 - x^2;$$

togliendo adesso dai due membri di questa equazione il quadrato 25, resterà solamente

$$9x^2 - 30x = -x^2;$$

donde, dividendo tutto per x , e risolvendo l'equazione risultante di primo grado $9x - 30 = -x$, otterremo $x = 3$. Così i quadrati cercati saranno 9, e 16.

Formando in altro modo il quadrato fittizio, prendendo, per esempio, per radice $5 - 4x$, si sarebbe trovato, facendo le medesime operazioni, $x = \frac{40}{17}$, il cui

quadrato $\frac{1600}{289}$, tolto da 25, dà $\frac{5625}{289}$ per il secondo quadrato cercato. Questo nu-

mero è infatti il quadrato di $\frac{25}{17}$. Ecco così due altri numeri quadrati la di cui

somma è eguale a 25; e proseguendo nella stessa maniera si troverebbe una moltitudine di altre soluzioni.

Diofanto è il solo autore greco sull'algebra i di cui scritti siano giunti fino a noi. Sappiamo solamente che la celebre Ipazia, figlia di Teone, fere un commentario sui tredici libri di Diofanto; ma questo commentario si è perduto insieme con gli ultimi sette libri. In qual maniera gli Arabi divennero possessori di questa scienza? Alcuni hanno creduto che l'avessero ricevuta dai Greci; ma è provato che l'opera di Diofanto non fu conosciuta dagli Arabi che verso la fine

del decimo secolo, mentre essi possedevano l'algebra nel nono secolo (Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, Parigi, 1838, vol. I. pag. 115.). L'opinione più probabile è che essi la ricevessero dagl'indiani. È certo infatti che gl'indiani nel secolo settimo, e forse ancora parecchi secoli prima di Diofanto, avevano estese cognizioni sull'algebra. Sapevano essi risolvere generalmente un'equazione di primo grado a due incognite in numeri interi; equazione che da Diofanto non è stata risolta che in casi particolari. Conoscevano la risoluzione generale delle equazioni di secondo grado ad una sola incognita, e risolvevano ancora alcune equazioni derivate dei gradi superiori. Avevano trovato un metodo per poter dedurre da una sola soluzione tutte le altre soluzioni in numeri interi di un'equazione indeterminata di secondo grado a due incognite, metodo che più di dieci secoli dopo ci è stato insegnato da Eulero. Cosicché il Prof. Libri (*Op. cit.* Vol. I. pag. 126) ha dovuto dire che se i trattati indiani di Algebra di Brahmagupta e di Bhaskara Acharya, pubblicati nel secolo attuale dai sigg. Colebrooke, Taylor, e Strachey, fossero stati portati in Europa sessanta o ottanta anni prima, la loro comparsa, anco dopo la morte di Newton e durante la vita di Eulero, avrebbe potuto affrettare tra noi i progressi dell'analisi algebrica.

Comunque sia di tali opinioni, per l'esame delle quali rimandiamo agli autori che più specialmente ne hanno parlato e che in appresso citeremo, l'algebra ed il suo nome è stato trasmesso all'Europa, e particolarmente alla Spagna, dagli Arabi o Saracini verso il principio del duodecimo secolo. L'Italia ha coltivato questa scienza, dopo la sua introduzione in Europa, prima di tutte le altre nazioni. Il primo trattato sopra l'algebra, scritto da un cristiano, è l'*Abacus* di Leonardo Bonacci, mercante pisano, più conosciuto sotto il nome di Fibonacci, contrazione di *Filius Bonacci*. In questo libro, scritto nel 1202, Leonardo ci racconta che aveva appreso l'algebra in Africa, dove era stato chiamato da suo padre, notaro dei mercanti pisani alla dogana di Bugia. Egli ha scritto pure altre opere sopra le matematiche, ma tutte sono rimaste inedite. Dopo di lui non si fece in generale che copiare ciò che trovavasi nel suo libro, senza nulla aggiungerci di nuovo, e l'algebra rimase stazionaria e poco conosciuta in Europa per lo spazio di circa tre secoli, quando allo spirare del secolo decimo quinto sorse a ravvivarne lo studio il P. Luca Paccioli, o Luca da Borgo. Questi pubblicò vari trattati sopra le matematiche, ma l'opera sua principale è quella che porta per titolo: *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità*, Venezia 1494 in-foglio; ristampata nel 1523, Tusculano, 2 tom. in 1 vol. in-folio. In tale opera si vede che la scienza in quel tempo (1500) non si estendeva al di là delle equazioni del secondo grado, dalle quali peraltro si deducevano unicamente le radici positive. Non si faceva ancora uso di segni, tranne alcuni segni di abbreviazione di parole. Ed in fine non si trattava che della soluzione di problemi numerici.

Dopo Luca da Borgo, la scienza fece progressi sensibilissimi, e se ne dilatò maggiormente la cognizione. Essa fu principalmente coltivata dal celebre Girolamo Cardano, i di cui scritti sulle matematiche, in nove libri, furono stampati a Milano, dove professava la fisica e le matematiche, nel 1539. Nel 1545 Cardano pubblicò un decimo libro, sotto il titolo: *Artis Magnae, seu de regulis algebrae liber unus*, Norimberga, in 4^o, nel quale contenevasi la risoluzione delle equazioni del terzo grado, risoluzione che gli era stata rivelata in parte da Niccolò Tartaglia, ma che egli completò e dimostrò.

Cardano è il primo che abbia scoperto la molteplicità dei valori dell'incognita nelle equazioni, e la loro distinzione in *positivi* e *negativi*. È inoltre a lui dovuta l'osservazione del caso detto *irriducibile* nelle equazioni di terzo grado. Confessa nella sua *Arte magna* che il metodo per risolvere le equazioni cubiche

appartiene a Scipione Ferreo di Bologna. Questi per lungo tempo tenne nascosta la sua scoperta, non avendola comunicata che al solo Antonio Florido, suo scolare. Quest'ultimo avendo proposto, in un combattimento letterario, a Niccolò Tartaglia alcuni problemi che conducevano ad equazioni di terzo grado, il suo avversario si diede a cercarne la soluzione con tanto ardore e successo che finalmente giunse a trovarla. Tartaglia scoprì la regola a Cardano sotto giuramento di segretezza, ma non gli comunicò la dimostrazione. A forza di studio e di meditazioni, Cardano trovò questa dimostrazione, e perfezionò la formula che anche oggi porta il nome di *formula cardanica*. Nell'*Arte magna* si trova pure un'altra scoperta notabilissima; ed è la risoluzione delle equazioni di quarto grado dovuta a Luigi Ferrari, allievo di Cardano.

Niccolò Tartaglia o Tartalea ha composto parecchie opere. Quella che porta per titolo: *Questi ed invensioni diverse*, Venezia, 1550 in-4, contiene, fra le altre cose, la risoluzione delle equazioni cubiche, ed il racconto della questione che su questo soggetto si elevò tra esso e Cardano. Gl'Indiani, in vece di servirsi delle lettere dell'alfabeto, indicavano le diverse quantità incognite coi nomi di differenti colori; i Persiani e gli Arabi impiegarono per esprimere la quantità incognita una parola che corrisponde alla voce *cosa*, quindi gl'Italiani adottarono questa parola per il medesimo uso, e l'algebra cominciò ad esser chiamata *Regola de la Cosa*, *Ars cosica*.

Nella stessa epoca la scienza algebrica fu coltivata in Germania da Stifelio, e Scheubelio. L'*Arithmetica integra* di Stifelio fu pubblicata a Norimberga nel 1544, e per conseguenza un anno prima della pubblicazione dell'*Arte magna* di Cardano. È dovuta a Stifelio e ad alcuni altri matematici tedeschi l'invenzione dei segni $+$, $-$, $\sqrt{}$, per esprimere *più*, *meno*, e le *radici*. Giovanni Scheubelio scrisse pure parecchie opere; ma non pare che abbia avuto cognizione delle equazioni cubiche, poichè non ne fa menzione.

Alcuni anni dopo la pubblicazione di tali scritti in Italia e in Germania, Roberto Recorde, celebre fisico del paese di Galles, provò coi suoi scritti che l'algebra non era assolutamente incognita in Inghilterra.

La prima edizione della sua aritmetica fu pubblicata nel 1552, e la seconda nel 1557 col titolo di *The Whetstone of witte*. Vi si trova l'estrazione delle radici delle quantità algebriche composte, e l'uso del segno dell'egualianza $=$.

Nel 1554 fu pubblicata a Lione l'opera di Giacomo Peletier intitolata: *Jacobi Peletarii cenomani de occulta parte numerorum quam algebram vocant, lib. duo*. È questa una produzione notevole, nella quale tutte le parti dell'algebra allora conosciute sono trattate con molta profondità. Peletier scoprì che una radice di un'equazione divide il termine assoluto, cioè il termine che non contiene l'incognita.

L'Italia ci presenta ancora Raffaello Bombelli, che fece parecchie utili scoperte, e la di cui algebra comparve a Bologna nel 1572. Fu Bombelli che il primo riconobbe che, nel caso irriducibile delle equazioni del terzo grado, le radici sono tutte reali. Gli è stata pure attribuita la risoluzione delle equazioni del quarto grado, quantunque il principio della sua soluzione sia lo stesso di quello di Ferrari, del quale non ha fatto che sviluppare la scoperta.

Dobbiamo ancora rammentare Simone Stevino di Bruges, nelle di cui opere si trovano importanti miglioramenti e idee nuove. La sua aritmetica fu pubblicata ad Anversa nel 1585.

Dopo la scoperta di Cardano e di Ferrari, la scienza aveva fatto pochi progressi reali, quando la Francia produsse l'illustre geometra Francesco Viète, che colle sue ricerche fece cambiar d'aspetto l'algebra. Uscendo dalle proprietà individuali, considerò i numeri in un modo molto più generale, e stabilì l'uso

delle lettere per rappresentare tutte le quantità sì cognite che incognite; il che fece dare alla sua algebra il nome di *speciosa*, che ha conservato per lungo tempo, perchè tutto vi era rappresentato per mezzo di simboli. Le diverse trasformazioni che possono farsi subire ad un'equazione, per darle una forma più comoda, sono per la maggior parte invenzione di Viète. Ei ne tratta nel suo libro: *De emendatione aequationum*, ed insegna il metodo per aumentare, diminuire, moltiplicare e dividere le radici di un'equazione. Con un artificio simile fa sparire il secondo termine delle equazioni, operazione che risolve direttamente quelle di secondo grado, e facilita la soluzione delle altre. Partendosi da queste considerazioni, Viète si eleva fino alla risoluzione generale delle equazioni di tutti i gradi. Nessuno prima di lui aveva abbracciato un soggetto sì vasto. Propose delle regole per trovare le radici per approssimazione; e se il metodo che inventò è lungo e laborioso, non gli si può per questo togliere il merito di avere aperto l'aringo percorso in seguito con tanto successo da Descartes, Newton, Eulero, e Lagrange. Si deve ancora a Viète l'applicazione dell'algebra alla geometria, almeno quell'applicazione che ha per oggetto di costruire le formule senza fare uso delle coordinate. Alcuni geometri del XVI secolo avevano in vero trovato parecchie soluzioni particolari; ma assegnando essi valori unicamente numerici alle linee date nei problemi, si limitavano a trovare i soli valori che potevano con questo metodo ottenere, e così le loro soluzioni erano prive di quella generalità, che la nuova forma data da Viète all'algebra, coll'introduzione delle lettere a rappresentare le quantità, gli permetteva di abbracciare. Non dobbiamo omettere che la teoria delle sezioni angolari deve esser posta nel numero delle scoperte di questo gran matematico, e che egli sospettò la legge che seguono gli sviluppi delle potenze di un binomio; legge trovata in seguito da Newton, e che è l'oggetto del famoso teorema conosciuto sotto il nome di *Binomio di Newton*. La considerazione dell'*infinito* non fu ignota a Viète che ci ha lasciato la seguente notabilissima formula:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}})} \times \sqrt{(\frac{1}{2} + \sqrt{(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}})})} \times \text{ec.} \dots \text{all' infinito,}$$

che esprime il rapporto del quadrato al circolo circoscritto, prendendosi per diametro l'unità.

Le opere algebriche di Viète furono scritte verso l'anno 1600, ma alcune di esse non furono pubblicate che dopo la sua morte, avvenuta nel 1603. La raccolta delle sue opere complete forma un volume in-folio che fu fatto stampare da Francesco Schooten a Leida nel 1646.

Alberto Girard, in Fiandra, e Harriot, in Inghilterra, si resero celebri verso il principio del XVII secolo per importanti scoperte. Girard nel suo libro: *Invenzione nuova in algebra*, pubblicato nel 1629, insegna a costruire *geometricamente* le tre radici dell'equazione cubica, per mezzo della trisezione dell'angolo, e le rappresenta con tre corde inscritte nel circolo. Ei dimostra ancora che nel caso irriducibile vi sono sempre tre radici reali.

Pare che Girard sia stato il primo che siasi occupato delle radici immaginarie, e che abbia scoperto che un'equazione ha tante radici reali o immaginarie, quante sono le unità dell'esponente della più alta potenza dell'incognita. Fu pure il primo ad insegnare l'uso delle radici negative nelle costruzioni geometriche.

La scoperta principale di Harriot consiste nell'aver determinato le leggi della formazione delle equazioni, che esso dimostra essere il risultato del prodotto di binomi di primo grado. Da questa formazione derivano moltissime verità interessanti per l'algebra, e non può negarsi che il geometra inglese non abbia fatto fare un passo immenso alla scienza, e non abbia grandemente facilitato le ricerche di Descartes sulle equazioni. La risoluzione numerica delle equazioni di tutti

i gradi fu pure considerabilmente perfezionata da Harriot. I segni $>$ e $<$ per indicare più grande e più piccolo sono di sua invenzione. Le sue opere furono pubblicate a Londra nel 1631 dal suo amico Werner.

Prima di lasciare questi primi fondatori dell'algebra non dobbiamo passare sotto silenzio Oughtred, le di cui opere sono state per lungo tempo considerate come classiche nelle università inglesi. Fu il primo a scrivere le frazioni decimali senza i loro denominatori, come si fa presentemente, ed introdusse il segno $\times$ per esprimere la moltiplicazione.

Nel lungo periodo che abbiamo percorso, abbiamo veduto quasi tutti gli sforzi dei geometri rivolti verso le equazioni, e la storia dell'algebra limitarsi al racconto delle loro ricerche, più o meno felici, sopra questa parte della scienza, importante per verità, ma che è lontana dal comprenderla tutta intera. Soltanto dopo le scoperte di Viète e di Harriot le altre sue parti sono state coltivate con successo, sicchè diviene per noi impossibile il continuare questa rivista biografica di autori, sì intimamente connessa coi primi progressi dell'algebra. D'ora in avanti le scoperte si affollano e si succedono con rapidità; immensi materiali si accumulano; il circolo, un tempo sì ristretto, della scienza dei numeri si estende nel modo il più vasto e il più inaspettato; i fenomeni della natura sono sottoposti alle sue leggi, e la creazione diviene tributaria de' suoi calcoli. Il XVII secolo brilla in mezzo a tutti i secoli; con lui i Descartes, i Fermat, i Wallis, i Galilei, i Kepler, i Newton, i Leibnitz, i Bernoulli, e tanti altri non meno illustri, si lanciano nella carriera. Una scoperta ingegnosa, quella dei logaritmi, saluta la ana aurora, una scoperta maravigliosa, quella del calcolo differenziale, corona il suo tramonto. Erede di tanta gloria il secolo XVIII continua ad arricchire il vasto dominio che gli vien trasmesso: Moivre, Stirling, Cotes, Lambert, Maclaurin, Maupertuis, d'Alembert, Lagrange, Laplace, e soprattutto Eulero, sviluppano e perfezionano successivamente tutti i rami della scienza; ma i limiti che ci sono prescritti in questo Dizionario ci costringono a rimettere agli articoli che riguardano in particolare ognuno di questi uomini celebri il ragguaglio dei loro lavori.

Frattanto ci contenteremo di accennare alcune delle opere principali che trattano della storia dell'algebra. Cassali, *Storia critica dell'origine, trasporto, e primi progressi in Italia dell'algebra*, Parma, 1797, 2 vol. in-4; Montucla, *Histoire des mathématiques*, Parigi, 1799, 4 vol. in-4, second. ediz.; Bossut, *Histoire générale des mathématiques*, Parigi, 1810, 2 vol. in-8. La prima edizione di quest'opera pubblicata col titolo di *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*, Parigi 1802, è stata tradotta in italiano da Gregorio Fontana che l'ha arricchita di note, Milano 1802 in 4 vol. in-8; Weidler, *Historia astronomiae*, Wittenberg, 1741 in-4; Kaestner, *Storia delle matematiche* (in tedesco), 1796-1800, 4 vol. in-8; Brahmagupta e Bhascara, *Algebra*, tradotta in inglese da Colebrooke, Londra, 1817, in-4; Bhascara Ardebary, *Lilawati*, tradotto in inglese da Taylor, Bombay, 1816 in-4; lo stesso, *Bija-Ganita*, tradotto in inglese da Strachey, Londra, 1813, in-4; Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, Parigi, 1817 2 vol. in-4; Franchini, *Saggio sulla storia delle matematiche*, Lucca, 1821, in-8, con due *Supplimenti* stampati pure a Lucca nel 1824 e 1827, il secondo dei quali è esclusivamente dedicato alla storia dell'algebra; Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, Parigi, 1838, in-8: quest'opera deve esser composta di sei volumi, ed i primi due sono già stati pubblicati; Hutton *Mathematical tracts*, Londra, 1812, 3 vol. in-8.

Adesso ci accingeremo ad esporre nel modo più chiaro i principj della scienza che le ricerche dei moderni analisti hanno finalmente completato.

1. I numeri possono essere riguardati sotto due differenti punti di vista: quello della loro costruzione o generazione, e quello della loro relazione reci-

proca o paragone. Da ciò risultano due suddivisioni generali per la scienza delle loro leggi, che si divide così in due rami, il primo dei quali ha per oggetto le leggi della costruzione delle diverse specie di numeri, ed il secondo, le leggi del paragone di questi numeri. Determiniamo primieramente in che cosa consista la costruzione dei numeri.

2. Noi non abbiamo la concezione primitiva che del solo numero uno, poichè le nostre percezioni non ci offrono che individui; e se noi formiamo delle collezioni di oggetti, questo succede per la forza sintetica del nostro intelletto, che ci fa riunire più percezioni in una sola percezione generale o concezione: così due percezioni di un medesimo oggetto o di oggetti simili ci danno la concezione del numero due, e quindi quella dei numeri 3, 4, 5, 6, ec. I numeri si presentano dunque in primo luogo all'intelligenza come semplici aggregati di unità, e il primo modo di costruzione che essa può concepire è di continuare indefinitamente questa aggregazione di unità, per elevarsi successivamente a numeri di mano in mano più grandi, dall'unità primitiva fino all'*infinito*, che considerare si può come l'unità totale. Abbiamo, nelle *Nozioni preliminari*, assegnato a questo modo di costruzione la forma generale

$$a + b = c,$$

a e b esprimendo delle quantità qualunque di unità, e c il numero formato dalla riunione o somma di queste unità.

Se dovessimo limitarci a questo modo primitivo di costruzione, tutta la scienza si ridurrebbe evidentemente all'*addizione*, ed alla *sottrazione*, la quale non ne è che la considerazione inversa, e noi non conosceremmo altri numeri che i *numeri interi*; ma, costruiti una volta questi numeri, l'intelletto se ne impossessa, vi applica le sue diverse facoltà, e s'innalza a nuovi modi di costruzione, i quali ci fanno successivamente conoscere altre specie di numeri sottoposti anch'essi a nuove considerazioni. Ed è così che dal modo primitivo $a + b = c$, arriviamo al modo intermedio $a \times b = c$, e finalmente al modo finale $a^b = c$.

Questi tre modi di costruzione dei numeri essendo, come lo vedremo in seguito, i soli possibili, è da essi che dobbiamo dedurre la natura particolare di tutte le specie di numeri, egualmente che le leggi generali che gli regolano: riprendiamo dunque le tre forme

$$a + b = c, \quad a \times b = c, \quad a^b = c,$$

e generalizziamo ciò che abbiamo esposto nelle nozioni preliminari.

La prima forma $a + b = c$ non può, come abbiamo già detto, farci conoscere che i soli numeri interi; poichè la concezione del numero c è in ogni caso quella di un aggregato di unità, finchè a e b saranno aggregati di tal fatta. Ma l'eguaglianza $a + b = c$ dandoci necessariamente l'eguaglianza inversa $c - a = b$, quest'ultima diviene, alla sua volta, suscettibile di essere considerata in tutta la sua generalità, indipendentemente dai valori particolari di c e di a , e deve sempre darci la costruzione del numero b , qualunque siano a e c . Ora si presenta un caso da osservarsi in questa costruzione, ed è quello in cui, nell'espressione generale $c - a = b$, si abbia $c < a$, ed in cui conseguentemente si renda impossibile di togliere a da c . In questo caso supponiamo che l'eccesso di a sopra c sia d , o che si abbia $a = c + d$; allora $c - a$ diverrà

$$c - c - d,$$

poichè è evidente che per togliere a da c bisogna togliere le due quantità c e d

che sono equivalenti ad a , ed avremo, osservando che la quantità $c - c$ si distrugge da sè stessa,

$$c - c - d = -d.$$

L'idea che possiamo annettere al numero d , preceduto così dal segno $-$, è quella di una quantità affetta o dotata di una *funzione di diminuzione*, poichè essa, dovunque entrerà, opererà una sottrazione. Siamo dunque condotti a riconoscere nei numeri, indipendentemente dalla loro grandezza, una qualità di accrescimento e di diminuzione, e questo è ciò che si chiama stato *positivo* o *negativo* di un numero. Noi indicheremo dunque, secondo l'uso, col nome di *numero positivo* qualunque numero che abbia una funzione di accrescimento, e con quello di *numero negativo*, qualunque numero che abbia una funzione di diminuzione.

3. È importante di osservare che lo stato positivo o negativo di un numero non esercita alcuna influenza sopra la grandezza di questo numero considerato isolatamente, ma ne esercita una sostanziale sulla grandezza del risultato delle operazioni di addizione o di sottrazione, nelle quali il numero può entrare. Infatti, se indichiamo qualunque quantità positiva con $(+A)$, e qualunque quantità negativa con $(-B)$, l'addizione di queste quantità sarà espressa da

$$(+A) + (-B),$$

o da $A - B$, non considerando che la sola *grandezza* dei numeri A e B , poichè la funzione di diminuzione del numero $(-B)$ gli fa operare una sottrazione dovunque esso possa essere introdotto. Quanto al risultato dell'operazione, esso sarà positivo se si abbia $A > B$, e negativo se si abbia $A < B$. Così per dare un esempio di casi particolari, si trova:

$$(+7) + (-4) = 7 - 4 = (+3)$$

$$(+7) + (-9) = 7 - 9 = (-2).$$

Se il numero al quale si aggiunge un altro numero fosse negativo, esso entrerebbe egualmente nell'operazione con la sua funzione di diminuzione. È dunque facile il vedere che si avrebbe ancora

$$(-7) + (-4) = -7 - 4 = (-11)$$

$$(-7) + (+4) = -7 + 4 = (-3).$$

Concluderemo dunque che, quando le quantità che si sommano sono tutte e due *positive*, o tutte e due *negative*, il risultato è eguale, in grandezza, alla somma di queste due quantità, ma *positivo* nel primo caso e *negativo* nel secondo; e che quando queste quantità sono di natura differente, il risultato è eguale alla loro differenza, e della stessa natura della quantità più grande.

4. La sottrazione eseguita sulle medesime quantità $(+A)$, $(-B)$, sarà espressa da

$$(+A) - (-B),$$

o semplicemente da $A + B$, poichè bisogna osservare che B , avendo una funzione di diminuzione, diminuirebbe $(+A)$ se gli fosse aggiunto; e per conseguenza deve operare un effetto contrario, essendogli sottratto. L'operazione della sottrazione è dunque qui artificiale; e sottrarre un numero è la stessa cosa che aggiungerlo cambiando il segno della sua qualità. Avremo, per la stessa ragione,

$$(-A) - (-B) = -A + B.$$

Donde dedurremo i seguenti esempj particolari, i quali abbracciano tutti i casi della sottrazione:

$$(+8) - (+4) = 8 - 4 = (+4)$$

$$(+8) - (-4) = 8 + 4 = (+12)$$

$$(-8) - (+4) = -8 - 4 = (-12)$$

$$(-8) - (-4) = -8 + 4 = (-4).$$

5. I matematici antichi cominciavano le loro opere elementari coll' esposizione di certe proposizioni chiamate *assiomi*, sopra i quali essi stabilivano successivamente i loro teoremi, seguendo un andamento progressivo o sintetico.

Questi assiomi sono proposizioni evidenti da per sè stesse, e la di cui certezza, fondata sopra il principio logico di contraddizione (*principium contradictionis et identitatis*), non può ammettere alcuna disputa. Tali sono:

1°. Due quantità eguali ad una terza sono eguali tra loro.

2°. Il tutto è più grande di una delle sue parti.

3°. Quando due quantità sono eguali, se si aumentano o se si diminuiscono ambedue di una medesima quantità, i risultati sono eguali.

In una eguaglianza qualunque $M = N$, le quantità M ed N si chiamano i *membr*i dell'eguaglianza; ed in particolare M il *primo membro*, ed N il *secondo*. Applicando loro il terzo assioma di sopra enunziato, possiamo ancora generalizzarlo nella seguente maniera:

Qualunque siano le operazioni che si possono eseguire sopra il primo membro M dell'eguaglianza $M = N$, se si fanno subire le stesse operazioni anche al secondo membro N , i due risultati saranno eguali.

Noi avevamo bisogno di stabilire questa proposizione evidente per ciò che segue.

6. Fin qui abbiamo considerato ciascun numero come formato solamente mediante l'addizione di due altri; ma è facile dare estensione a quanto abbiamo detto; poichè se si ha una serie di numeri costruiti nella seguente maniera:

$$a+b=c, c+d=e, e+f=g, g+h=i, i+k=l, \text{ ec.,}$$

si ottiene immediatamente la forma generale:

$$a+b+d+f+h+k+\text{ec.} \dots = M.$$

Donde possiamo concludere che un numero può essere formato con l'addizione di una quantità qualunque di altri numeri. Allorchè tutti i numeri componenti sono eguali, ossia quando si ha

$$a+a+a+a+a+a+\text{ec.} \dots = c,$$

c indicando la somma, la costruzione di c diviene regolare, e si esprime con $a \times b = c$, b indicando la quantità dei numeri a (*Nozioni Prelim.*, 3).

La generazione del numero c , ottenuto in questa maniera per mezzo dei due numeri a e b , differisce essenzialmente dalla generazione primitiva che di sopra abbiamo esaminata, e costituisce conseguentemente un nuovo modo di costruzione dei numeri.

7. Dobbiamo primieramente osservare che, per quanto differenti possano essere le idee che si annettono alle funzioni dei numeri a e b nella generazione $a \times b = c$ del numero c , questi due numeri entrano nella medesima maniera in questa generazione, vale a dire che si ha

$$a \times b = b \times a.$$

Infatti $a \times b$, o, per meglio fissare le idee con un esempio particolare, 4×3 indica $4+4+4$; ma $4=1+1+1+1$: dunque 4×3 non è altro che la somma delle unità

$$\begin{array}{c} 1+1+1+1 \\ 1+1+1+1 \\ 1+1+1+1. \end{array}$$

Ora, in qualunque maniera si eseguisca l'addizione di queste unità, sia contandole per linee orizzontali, sia contandole per linee verticali, si otterrà sempre evidentemente lo stesso risultato. Ma nella prima maniera si ha 3 volte 4 unità, e nella seconda, 4 volte 3 unità; dunque

$$4 \times 3 = 3 \times 4.$$

È facile di estendere questa dimostrazione ai numeri qualunque di unità a e b .

8. Questo modo di costruzione ha, come il precedente, il suo metodo diretto ed il suo metodo inverso. Il metodo diretto costituisce l'operazione della moltiplicazione che adesso abbiamo dedotta; il metodo inverso, dà luogo all'operazione della divisione la di cui forma generale è

$$\frac{c}{a} = b.$$

Avanti di esaminare più particolarmente i numeri che possono essere costruiti con queste nuove operazioni, è importante di considerare l'influenza che può esercitare sopra la natura dei loro risultati lo stato positivo o negativo dei numeri sopra i quali si opera.

9. La grandezza di un prodotto non riceve alcun cambiamento dalla qualità particolare dei suoi fattori. Quanto alla sua qualità, si presentano tre diversi casi nel determinarla: 1°. quando i due fattori sono positivi; 2°. quando i due fattori sono negativi; e 3°. quando l'uno dei fattori è positivo, e l'altro negativo.

Allorché i due fattori sono positivi, il prodotto è positivo; poichè $(+A) \times (+B)$ è la stessa cosa che $(+A) + (+A) + (+A) + \text{ec.}$, la di cui somma è necessariamente positiva.

Allorché i due fattori sono negativi, il prodotto è ancora positivo; poichè $(-A) \times (-B)$ indica che la quantità $(-A)$ è aggiunta negativamente B volte a sè medesima, il che si esprime nel modo seguente

$$-(-A) - (-A) - (-A) - (-A) - (-A) - \text{ec.} \dots \dots (a).$$

Ora noi sappiamo (4) che $-(-A) = +A$; così l'espressione (a) è la stessa cosa che

$$+A + A + A + A + A + A + \text{ec.} \dots$$

la di cui somma è positiva.

Allorché uno dei fattori è negativo e l'altro positivo, il prodotto è negativo; poichè $(-A) \times (+B)$ è l'espressione abbreviata di

$$(-A) + (-A) + (-A) + (-A) + \text{ec.} \dots,$$

che equivale (3) a

$$-A - A - A - A - A - A - A - \text{ec.} \dots,$$

la di cui somma è evidentemente negativa.

Se in luogo di avere $(-A) \times (+B)$ si avesse $(+A) \times (-B)$, il prodotto sarebbe ancora negativo, poichè (7) $(+A) \times (-B) = (-B) \times (+A)$.

La regola generale è dunque la seguente: *Il prodotto è positivo quando i suoi due fattori hanno lo stesso segno; ed è negativo quando hanno segni differenti.*

10. Nella operazione della divisione si presentano egualmente tre casi differenti per determinare la qualità del quoziente mediante le qualità del divisore e del dividendo, cioè:

1º. Quando il divisore e il dividendo sono positivi, il quoziente è pure positivo; poichè, nell'eguaglianza generale

$$\frac{c}{a} = b,$$

e dovendo essere il prodotto della moltiplicazione dei fattori a e b , è necessario che questi fattori siano tutti e due positivi, ovvero tutti e due negativi, affinchè c possa esser positivo. Così, nel nostro caso a essendo positivo, b deve essere egualmente positivo.

2º. Quando il dividendo è positivo, e il divisore negativo, il quoziente deve essere negativo per la stessa ragione detta di sopra. Se il dividendo fosse negativo e il divisore positivo, è facile di vedere che il quoziente dovrebbe ancora essere negativo.

3º. Finalmente quando il dividendo e il divisore sono ambedue negativi, il divisore è necessariamente positivo, poichè è necessario che i fattori abbiano segni differenti affinchè il prodotto sia negativo.

La regola generale è dunque simile a quella della moltiplicazione; vale a dire che *il risultato della divisione è positivo allorchè i numeri sopra i quali si opera hanno ambedue lo stesso segno, ed è negativo allorchè questi numeri hanno segni differenti.*

11. La formazione di un numero intero per mezzo di fattori suppone l'esistenza di certi numeri interi, i quali non possono essere decomposti in fattori; poichè, se nella generazione generale $A \times B = C$, si potesse considerare in ogni caso uno dei numeri A , come formato anch'esso dal prodotto di due altri numeri A' , B' , e successivamente A' come risultante dal prodotto di A'' per B'' , ec. ec., i numeri A, A', A'' ec., B, B', B'' , ec. divenendo di mano in mano più piccoli, si potrebbe continuare questa decomposizione finchè gli ultimi fattori fossero eguali all'unità. Ma 1×1 dà sempre 1, dunque non si può ammettere generalmente una tale decomposizione; ed esistono necessariamente dei numeri interi, i quali non possono essere formati mediante il prodotto di altri numeri interi.

Questi numeri si chiamano *numeri primi*. Tali sono 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ec., nella serie dei numeri naturali 1, 2, 3, 4, 5, 6, ec. Tutti gli altri possono formarsi con i loro prodotti.

Così, nell'espressione $A \times B = C$, se si suppone A formato per mezzo del prodotto di due numeri primi a e b , e B per mezzo del prodotto dei numeri primi c e d , il numero C sarà il prodotto dei quattro numeri primi a, b, c, d , e si avrà

$$a.b.c.d = C.$$

Il metodo per eseguire una tale decomposizione di un numero nei suoi fattori primi non è attualmente l'oggetto delle nostre ricerche (*Vedi FATTORI*): ci con-

tenteremo perciò di osservare che, qualunque sia l'ordine dei fattori, il prodotto è sempre lo stesso, e che si ha

$$a.b.c.d = a.c.d.b = b.c.d.a = ec;$$

ciò che è la conseguenza della proprietà $a.b = b.a$ (7).

12. La costruzione dei numeri per mezzo della divisione generale

$$\frac{C}{B} = A$$

presenta un caso particolare che merita di essere osservato; ed è quello in cui il numero B contenga dei fattori primi che non si trovino in C. Per esempio, sia C composto dei due fattori primi a, b , e B composto dei due fattori primi a, d ; si avrà

$$\frac{C}{B} = \frac{a.b}{a.d}.$$

Ora, se si dovesse semplicemente dividere $a.b$ per a , il quoziente sarebbe evidentemente eguale a b . Ma in luogo di dividere per a si deve dividere per $a.d$. Questo quoziente è dunque $\frac{b}{d}$. I due numeri b e d essendo numeri

primi, la divisione di b per d è impossibile; poichè non potendosi b decomporre in fattori non si può avere $b = d \times m$. Dunque la divisione di C per B, la quale si riduce a quella di b per d , non è possibile. Seguirebbe pure lo stesso se i numeri A e B fossero *primi tra loro*, vale a dire se essi non avessero verun fattore comune.

Tuttavia il numero A, il quale eguaglia il quoziente $\frac{C}{B}$, dovendo sempre ottenersi, qualunque siano C e B, siamo condotti a riconoscere l'esistenza di un'altra specie di numeri differente da quella dei numeri interi, dei quali ci siamo fin qui occupati. Infatti, supponendo $C=3$, e $B=2$, avremo

$$\frac{3}{2} > 1, \quad \frac{3}{2} < 2.$$

Il valore di A è dunque maggiore di 1, e minore di 2, e non è per conseguenza un numero intero.

Questi nuovi numeri, la generazione dei quali ci vien data dalla divisione, si chiamano *FRAZIONI*. Ne esiste un'infinità le di cui grandezze sono tra 0 e 1, 1 e 2, 2 e 3, ec. Nell'aritmetica, non si chiamano propriamente *frazioni* che quelli tra questi numeri che si trovano compresi tra 0 e 1, cioè quelli nei quali si ha $B > C$; gli altri si chiamano *numeri frazionarii*, perchè eseguendo la divisione fin-
tochè è possibile si può sempre ridurla ad una frazione. Per esempio, $\frac{3}{2}$ è la

medesima cosa che $1 + \frac{1}{2}$. Comunque sia però, noi indicheremo col nome di

frazione tutti i numeri della forma $\frac{C}{B}$, quando la divisione non può dare per quoziente un numero intero.

La maniera di enunziare le frazioni deriva dall'operazione stessa che le fa nascere.

Così, per enunziare la frazione $\frac{7}{8}$, si dirà l'*ottava parte di sette*; per enunzia-

re la frazione $\frac{11}{4}$, si dirà la *quarta parte di undici*, ec. Nell'aritmetica, sicco-

me non si chiamano *frazioni* che quelle tra queste quantità che sono minori dell'unità, così si considerano esse come parti dell'unità; e in luogo di dire,

per esempio, la *terza parte di due* per enunziare la frazione $\frac{2}{3}$, si dice

due terzi. Si suppone allora che l'unità sia divisa in *tre* parti, e che $\frac{2}{3}$ rap-

presenti *due* di queste parti. Per la stessa ragione, nella frazione $\frac{7}{9}$, che si

enunzia dicendo *sette noni*, si suppone che l'unità sia divisa in *nove* parti, e che la frazione ne contenga *sette*. Lo stesso si dica per qualunque altro caso. Si dà in generale il nome di *numeratore* al dividendo, e quello di *denominatore*

al divisore. Così, nella frazione $\frac{a}{b}$, *a* è il numeratore e *b* il denominatore. I due numeri *a* e *b* si chiamano ancora i due *termini* della frazione.

13. Resulta immediatamente dalla costruzione delle frazioni: 1°. che si moltiplicano moltiplicando i loro numeratori o dividendo i loro denominatori. Infatti, se si moltiplica il numeratore *a* di una frazione $\frac{a}{b}$ per un numero qua-

lunque *m*, essa diviene $\frac{a.m}{b}$; ora il dividendo, divenendo *m* volte più grande, deve contenere *m* volte di più il divisore. Parimente, dividendo il denominatore *b* per *m*, la frazione diviene $\frac{a}{b:m}$, e il divisore essendo *m* volte più piccolo deve essere contenuto *m* volte di più nel dividendo. Si ha dunque

$$\frac{a.m}{b} = \frac{a}{b:m}.$$

2°. Che si divide una frazione dividendo il suo numeratore o moltiplicando il suo denominatore. Poichè nel primo caso, servendoci dei medesimi numeri presi di sopra, la frazione diviene $\frac{a:m}{b}$; e nel secondo, $\frac{a}{b.m}$; ora, quando il

dividendo diviene *m* volte minore in forza della divisione, esso contiene *m* volte di meno il divisore; e quando il divisore diviene *m* volte maggiore in forza della moltiplicazione, esso è parimente contenuto *m* volte di meno nel dividendo. Si ha dunque ancora

$$\frac{a:m}{b} = \frac{a}{b.m}.$$

3°. Che una frazione non cangia di valore quando si moltiplicano, o si di-

vidono i suoi due termini per lo stesso numero. Infatti, nel primo caso la frazione divenendo $\frac{a.m}{b.m}$, il dividendo e il divisore divengono tutti e due m volte maggiori; il primo non può dunque contenere il secondo che tante volte quante lo conteneva prima della moltiplicazione; che è quanto dire che la frazione conserva lo stesso valore: nel secondo caso, la frazione divenendo $\frac{a:m}{b:m}$, il dividendo e il divisore divengono ambedue m volte più piccoli; e conseguentemente il secondo non può essere contenuto nel primo che tante volte quante lo era prima della divisione. Le due espressioni $\frac{a.m}{b.m}$, $\frac{a:m}{b:m}$, hanno dunque lo stesso valore.

14. Segue dalle precedenti proprietà che se i due termini di una frazione hanno un fattore comune, si può toglierlo senza cangiare il valore della frazione. Sia, per esempio, la frazione $\frac{A}{B}$, nella quale $A = ap$, e $B = bp$, si avrà

$$\frac{A}{B} = \frac{ap}{bp} = \frac{a}{b},$$

sopprimendo il fattore comune p .

Allorché i due termini di una frazione non hanno alcun fattore comune, essa si dice *irriducibile*, ovvero *ridotta alla più semplice espressione*.

15. Si possono eseguire sulle frazioni le quattro operazioni che abbiamo dedotte dai due primi modi di costruzione dei numeri, cioè l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione.

Le due prime operazioni non possono eseguirsi immediatamente che quando le frazioni sulle quali si vuole operare hanno lo stesso denominatore; ma è sempre possibile di ridurre tutti gli altri casi a quest'ultimo, in forza della proprietà che hanno le frazioni di poter cangiare di forma senza cangiare di valore. Per

esempio, se si hanno più frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, possiamo facilmente trasformarle

in altre frazioni che siano loro eguali, e che di più abbiano lo stesso denominatore; per far ciò basta moltiplicare i due termini di ciascuna frazione per i denominatori di tutte le altre, e allora esse divengono

$$\frac{a.d.f.h}{b.d.f.h}, \quad \frac{c.b.f.h}{d.b.f.h}, \quad \frac{e.b.d.h}{f.b.d.h}, \quad \frac{g.b.d.f}{h.b.d.f}.$$

Ora queste frazioni hanno tutte lo stesso denominatore, poichè si ha (11)

$$b.d.f.h = d.b.f.h = f.b.d.h = h.b.d.f;$$

ed inoltre sono eguali alle proposte, poichè sono state formate moltiplicando i due termini di ciascuna di esse per uno stesso numero (13).

Per mezzo di questa operazione preparatoria, che si chiama *riduzione al medesimo denominatore*, l'addizione delle frazioni non presenta alcuna difficoltà: basta sommare i numeratori e dare alla lor somma il denominatore comune. V'edi ADDIZIONE delle frazioni.

16. La sottrazione delle frazioni si eseguisce prendendo la differenza dei numeratori e dando a questa differenza il denominatore comune. Per esempio, per sottrarre $\frac{3}{11}$ da $\frac{9}{11}$ si toglie 3 da 9, e si dà al resto 6 il denominatore comune 11, si ha così

$$\frac{9}{11} - \frac{3}{11} = \frac{9-3}{11} = \frac{6}{11}.$$

Le ragioni di questa regola sono le stesse di quelle dell'addizione.

Si ha dunque in generale

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

Se le frazioni hanno denominatori differenti, si comincia dal ridurle al medesimo denominatore, e si opera in seguito come si è fatto di sopra. Così, per

le due frazioni generali $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, si ottiene

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} - \frac{c.b}{b.d} = \frac{a.d-c.b}{b.d}.$$

17. Per moltiplicare una frazione per un'altra frazione, è necessario moltiplicare i due numeratori l'uno per l'altro, e i due denominatori l'uno per l'altro; il primo prodotto è il numeratore del risultato, e il secondo è il suo denominatore. Che è quanto dire che $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ è eguale ad $\frac{a.c}{b.d}$.

Infatti moltiplicando $\frac{a}{b}$ solamente per c , si ottiene, dietro ciò che abbiamo detto (13), $\frac{a.c}{b}$; ma questo prodotto è d volte più grande di quello che si domanda, poichè si tratta di moltiplicare per $\frac{c}{d}$, e non per c , e $\frac{c}{d}$ è d volte più piccolo di c ; è necessario dunque, per ottenere il vero prodotto, rendere $\frac{a.c}{b}$ d volte più piccolo, e per far ciò basta moltiplicare il suo denominatore per d (13); il risultato $\frac{a.c}{b.d}$ sarà dunque il prodotto di $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

Si troverebbe egualmente che

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{e}{f} \times \frac{g}{h} \text{ ec.} = \frac{a.c.e.g. \dots \text{ec.}}{b.d.f.h. \dots \text{ec.}}.$$

18. La divisione delle frazioni si cangia in moltiplicazione rovesciando l'or-

dine dei termini della frazione divisore; vale a dire che $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$ è la medesima

cosa che $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a.d}{b.c}$. Si possono trovare facilmente le ragioni di questa regola; ma noi ne daremo una dimostrazione la quale sarà intanto un esempio del meccanismo dell'algebra.

Indichiamo il quoziente cercato per $\frac{x}{y}$, essendo x ed y due numeri incogniti che si tratta di determinare, ed avremo

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{x}{y}.$$

Ma allora essendo $\frac{c}{d}$ ed $\frac{x}{y}$ i fattori di $\frac{a}{b}$, dobbiamo avere

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{x}{y};$$

donde per le regole della moltiplicazione si deduce

$$\frac{a}{b} = \frac{c.x}{d.y}.$$

Ora, moltiplicando queste due quantità eguali per d , l'eguaglianza non sarà distrutta e diverrà

$$\frac{a.d}{b} = \frac{c.x}{y};$$

e dividendo adesso ambedue i membri dell'eguaglianza per c , si otterrà

$$\frac{a.d}{b.c} = \frac{x}{y}.$$

Ma $\frac{x}{y} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$, dunque, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.c}$. Così, siccome $\frac{a.d}{b.c}$ è la stessa cosa

che $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$, rimane dimostrata la regola enunziata.

19. Se immaginiamo una serie di numeri costruiti mediante il secondo modo di generazione, nella seguente maniera:

$$A \times B = C, C \times D = E, E \times F = H, \text{ ec. ec. } \dots \dots L \times M = N,$$

introducendo i fattori di C nella seconda eguaglianza, quelli di E nella terza, e così in seguito successivamente fino all'ultimo, otterremo

$$A \times B \times D \times F \times \text{ ec. } \dots \dots = N;$$

espressione che c' insegna che un numero può essere costruito con una quantità qualunque di fattori; ciò che potevamo ancora concludere dalle cose dette prece-

dentemente. Questa espressione non ci presenta dunque alcuna nuova considerazione fintantochè i numeri A, B, D, F, ec. sono differenti gli uni dagli altri; ma quando tutti questi fattori sono eguali, la generazione del loro prodotto, che indicheremo con C, diviene

$$A \times A \times A \times A \times A \dots = C,$$

e si esprime in un modo interamente determinato dalla forma generale

$$A^B = C.$$

La lettera B posta in tal modo al di sopra di A indica il numero dei fattori A (*Vedi* NOZIONI PRELIMINARI 8.).

Questa generazione di un numero C, per mezzo di due altri numeri A e B, è evidentemente differente da quelle che risultano dai due primi modi generali di costruzione dei numeri: $A+B=C$, $A \times B=C$; essa costituisce dunque un nuovo modo, il di cui esame ci farà conoscere nuove operazioni e nuove specie di numeri.

La generazione inversa ad $A^B = C$ si esprime con $\sqrt[B]{C} = A$.

20. Si chiamano in generale *quantità esponenziali* le quantità la di cui forma è A^m, B^n , ec. Siccome le diverse trasformazioni di cui esse sono suscettibili formano una parte importante della costruzione dei numeri, così daremo la deduzione delle loro principali proprietà.

Il prodotto di due potenze A^m, B^n , di cui le basi sono diseguali non può esprimersi differentemente da quello di due numeri qualunque; ma quando le basi sono eguali, si ha

$$A^m \times A^n = A^{m+n},$$

poichè il numero dei fattori A è allora $m+n$.

Per la medesima ragione

$$A^m \times A^n \times A^p \times A^q \times A^r \times \text{ec.} = A^{m+n+p+q+r+\text{ec.}}$$

21. La potenza m di un prodotto $a.b.c.d.e.$ ec. può esprimersi indifferentemente per $(a.b.c.d.e. \text{ ec.})^m$, e per $a^m.b^m.c^m.d^m.e^m.$ ec. È questa una conseguenza immediata della costruzione delle potenze.

22. La potenza m di una frazione qualunque $\frac{a}{b}$ si ottiene prendendo le potenze del medesimo grado dei suoi due termini; così si ha

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

Infatti, si ha la seguente serie d'identità:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \text{ec.} \dots = \frac{a.a.a.\dots \text{ec.}}{b.b.b.\dots \text{ec.}} = \frac{a^m}{b^m}$$

23. Il quoziente di due potenze qualunque $\frac{A^p}{A^n}$ si esprime con A^{p-n} . Ed è una conseguenza diretta della proprietà spiegata al n°. 20; poichè dall'eguaglianza

$$A^m \times A^n = A^{m+n}$$

si ottiene $A^m = \frac{A^{m+n}}{A^n}$. Facciamo $m+n=q$, si avrà $m=q-n$, e per conseguenza

$$\frac{A^q}{A^n} = A^{q-n}.$$

24. Da quest' ultima espressione risultano parecchie conseguenze importanti.

1°. Se gli esponenti q ed n sono eguali, si ha $A^q : A^q = A^{q-q} = A^0$; ma $\frac{A^q}{A^q} = 1$, dunque $A^0 = 1$. La potenza zero di una quantità qualunque è dunque eguale all' unità.

2°. Se nella medesima espressione si fa $q=0$, essa diviene

$$\frac{A^0}{A^n} = \frac{1}{A^n} = A^{-n}.$$

Coà una potenza, il di cui esponente è negativo, è eguale all' unità divisa per questa medesima potenza coll' esponente positivo.

25. Il prodotto e il quoziente di due potenze con esponenti negativi seguono dunque le medesime leggi che sono state determinate nel caso degli esponenti positivi; e si ha

$$A^{-m} \times A^{-n} = A^{-m-n}, \quad \frac{A^{-m}}{A^{-n}} = A^{-m+n}.$$

Infatti siccome (24)

$$A^{-m} = \frac{1}{A^m}, \quad A^{-n} = \frac{1}{A^n};$$

così

$$A^{-m} \times A^{-n} = \frac{1}{A^m} \times \frac{1}{A^n} = (17) \frac{1}{A^{m+n}} = A^{-m-n}.$$

Eguale si ha

$$\frac{A^{-m}}{A^{-n}} = A^{-m} : A^{-n} = \frac{1}{A^m} : \frac{1}{A^n} = (18) \frac{A^n}{A^m} = A^{n-m}.$$

26. S' inalza una quantità esponenziale ad una potenza qualunque moltiplicando il suo esponente per quello di questa potenza; così si ha $(A^m)^n = A^{mn}$.

L' espressione $(A^m)^n$ indica il prodotto $A^m \times A^m \times A^m \times A^m \times \text{ec.}$, essendo n il numero dei fattori A^m ; questo prodotto si riduce ad $A^{m+m+m+m+\text{ec.}}$, ovvero, ad A^{mn} , poichè $m+m+m+m+\text{ec.} = mn$.

La potenza r di un prodotto $A^m, B^n, C^p, D^q, \text{ec.}$ si esprimerà dunque indifferentemente per $(A^m, B^n, C^p, D^q, \text{ec.})^r$, ovvero per $A^{mr}, B^{nr}, C^{pr}, D^{qr}, \text{ec.}$

27. La radice n di una quantità A^m , o $\sqrt[n]{A^m}$, è eguale ad $A^{\frac{m}{n}}$; poichè, sia $m=pn$, abbiamo

$$\sqrt[n]{A^m} = \sqrt[n]{A^{pn}} = \sqrt[n]{(A^p)^n}.$$

Ma in generale $\sqrt[n]{X^m} = X^{\frac{m}{n}}$; dunque $\sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}}$, poichè l'eguaglianza $m=pn$ ci dà $p = \frac{m}{n}$.

Questa deduzione suppone che m sia divisibile per n , cioè che p sia un numero intero, solo caso nel quale si può prendere esattamente la radice. Quando ciò non ha luogo, si conserva nientedimeno l'espressione

$$\sqrt[n]{A^m} = A^{\frac{m}{n}},$$

la quale c'indica una potenza con *esponente frazionario*.

28. Le quantità, la di cui forma generale è $\sqrt[n]{C}$, si chiamano *quantità radicali* quando si considerano in tutta la loro generalità.

In questa costruzione dei numeri si presenta un caso notabilissimo, ed è quello nel quale non esiste alcun numero intero A capace di soddisfare all'eguaglianza

$$\sqrt[n]{C} = A.$$

Per esempio, la radice quadrata di 5 è maggiore di 2, perchè $2^2=4$; e tuttavia essa è minore di 3, perchè $3^2=9$; il valore del numero $\sqrt{5}$ è dunque tra 2 e 3. In questo caso non solamente non esiste, come è chiaro, nessun numero intero che esprima il valore di $\sqrt{5}$, ma non vi può esser nemmeno nessun numero frazionario che corrisponda esattamente a questo valore. Infatti, se si potesse trovarne uno, indicandolo con $\frac{a}{b}$, si avrebbe $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5$; ma $\frac{a}{b}$ essendo una frazione, la divisione di a per b non è possibile; e conseguentemente neppure quella di $a \times a$ per $b \times b$ (*Vedi TEORIA DEI NUMERI*): $\frac{a^2}{b^2}$ non può dunque essere un numero intero, e l'eguaglianza $\frac{a^2}{b^2} = 5$ non può ammettersi. Così $\sqrt{5}$ non è nè un numero intero nè un numero frazionario, e per conseguenza fa parte di una nuova specie di numeri.

Questi nuovi numeri si chiamano *numeri irrazionali*, perchè i loro rapporti con l'unità non possono essere assegnati esattamente. *Vedi NUMERI IRRAZIONALI*.

29. Il prodotto di due numeri irrazionali del medesimo grado, o in generale di due quantità radicali $\sqrt[n]{A}$ e $\sqrt[n]{B}$, può esprimersi per $\sqrt[n]{AB}$.

Infatti, siano $\sqrt[n]{A} = x$ e $\sqrt[n]{B} = y$, si avrà pure $A = x^n$ e $B = y^n$, e quindi $AB = x^n y^n$; ma (21) $x^n y^n = (xy)^n$, dunque $AB = (xy)^n$. Prendendo la radice n , quest'ultima eguaglianza diviene

$$\sqrt[n]{AB} = xy, \text{ ossia } \sqrt[n]{AB} = \sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B}.$$

Si avrebbe ancora

$$\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{B} \times \sqrt[n]{C} \times \sqrt[n]{D} \dots \text{ec.} = \sqrt[n]{A.B.C.D. \text{ ec.}}$$

30. Si possono sempre ridurre al medesimo grado, senza cangiare i loro valori, le quantità radicali di gradi differenti. Per esempio, $\sqrt[m]{A}$ e $\sqrt[n]{B}$ essendo la medesima cosa che $A^{\frac{1}{m}}, B^{\frac{1}{n}}$ (27), riducendo le due frazioni $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}$ al medesimo denominatore (15), esse divengono $\frac{n}{mn}, \frac{m}{mn}$, e le quantità proposte sono identicamente le stesse che $A^{\frac{n}{mn}}, B^{\frac{m}{mn}}$, ovvero $\sqrt[mn]{A^n}, \sqrt[mn]{B^m}$. Dunque

$$\sqrt[m]{A} \times \sqrt[n]{B} = \sqrt[mn]{A^n} \times \sqrt[mn]{B^m} = \sqrt[mn]{A^n B^m}.$$

31. Abbiamo, per le medesime ragioni,

$$\sqrt[m]{A^n} \times \sqrt[p]{B^q} = \sqrt[m]{A^{np}} \times \sqrt[p]{B^{mq}} = \sqrt[p]{A^{np} B^{mq}}.$$

Se in questa espressione si suppone $A=B$, essa diviene

$$\sqrt[m]{A^n} \times \sqrt[p]{A^q} = \sqrt[p]{A^{np+mq}} \dots\dots\dots (a).$$

Ma avendosi

$$\sqrt[m]{A^n} = A^{\frac{n}{m}}, \quad \sqrt[p]{A^q} = A^{\frac{q}{p}}, \quad \sqrt[p]{A^{np+mq}} = A^{\frac{np+mq}{p}},$$

ed essendo la frazione $\frac{np+mq}{p}$ evidentemente la somma delle due frazioni $\frac{n}{m}, \frac{q}{p}$, l'eguaglianza (a) è la stessa cosa che

$$A^{\frac{n}{m}} \times A^{\frac{q}{p}} = A^{\frac{n}{m} + \frac{q}{p}}.$$

Così la regola data (20 e 25) per gli esponenti interi, positivi e negativi, si estende al caso degli esponenti frazionarij positivi.

32. Il quoziente della divisione di una quantità radicale $\sqrt[m]{A}$ per un'altra quantità radicale $\sqrt[n]{B}$, del medesimo grado, si esprime con $\sqrt[m]{\frac{A}{B}}$. Per dimostrarlo, supponiamo $\sqrt[m]{A} = x$ e $\sqrt[n]{B} = y$; allora avremo

$$A = x^m, \quad B = y^n, \quad e \quad \frac{A}{B} = \frac{x^m}{y^n}.$$

Ma (22), $\frac{x^m}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$, dunque $\frac{A}{B} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$.

Prendendo la radice m dai due membri di quest'ultima eguaglianza, essa diviene

$$\sqrt[m]{\frac{A}{B}} = \frac{x}{y}, \quad \text{ossia} \quad \sqrt[m]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[m]{A}}{\sqrt[m]{B}}.$$

33. Quando le quantità radicali sono di gradi differenti, si riducono in primo luogo allo stesso grado come si è fatto di sopra (30), e si ottiene senza difficoltà

$$\sqrt[m]{A} : \sqrt[n]{B} = \sqrt[mn]{A^n} : \sqrt[mn]{B^m} = \sqrt[mn]{A^n : B^m}.$$

$$\sqrt[m]{A^p} : \sqrt[n]{B^q} = \sqrt[mn]{A^{pn}} : \sqrt[mn]{B^{mq}} = \sqrt[mn]{A^{pn} : B^{mq}}.$$

34. Facendo $A=B$ nell'ultima di queste espressioni, essa diviene

$$\sqrt[m]{A^p} : \sqrt[n]{A^q} = \sqrt[mn]{A^{pn-mq}} = A^{\frac{pn-mq}{mn}};$$

ossia, per le medesime riflessioni del n°. 31, ed osservando che $\frac{pn-mq}{mn}$ non è

altro che $\frac{p}{m} - \frac{q}{n}$,

$$A^{\frac{p}{m}} : A^{\frac{q}{n}} = A^{\frac{p}{m} - \frac{q}{n}} \dots \dots (b).$$

La regola del numero 23 si estende dunque ancora al caso degli esponenti frazionarj.

35. Se nell'eguaglianza (b) si fa $\frac{p}{m} = 0$, essa diviene

$$\frac{1}{A^{\frac{q}{n}}} = A^{-\frac{q}{n}}.$$

Così le potenze con esponenti *frazionarj negativi* hanno lo stesso significato delle potenze con esponenti interi negativi (24).

Da quest'ultima proposizione, e seguendo le tracce del calcolo del numero 25, si può facilmente concludere, che le regole della moltiplicazione e della divisione delle potenze di una medesima base comprendono anco il caso degli esponenti frazionarj negativi, e che per conseguenza, qualunque siano gli esponenti m ed n , interi o frazionarj, positivi o negativi, si ha generalmente

$$A^m \times A^n = A^{m+n}, \text{ e } \frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}.$$

36. La potenza m di una quantità $\sqrt[n]{A}$, o $(\sqrt[n]{A})^m$, è la stessa cosa che $\sqrt[n]{A^m}$, e la radice m di questa medesima quantità, ossia $\sqrt[m]{(\sqrt[n]{A})}$, è eguale a $\sqrt[mn]{A}$.

Infatti $(\sqrt[n]{A})^m$ esprime il prodotto $\sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{A} \times \sqrt[n]{A} \dots$ ec., essendo m il numero dei fattori. Ora questo prodotto può mettersi sotto la forma (29)

$$\sqrt[n]{(A \times A \times A \times A \dots \text{ec.})}, \text{ o } \sqrt[n]{A^m}.$$

Quanto alla radice m , se supponiamo l'eguaglianza

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[n]{A},$$

otterremo subito, elevando i due membri alla potenza m , una seconda eguaglianza

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{A^m}.$$

Dunque, elevando ancora i due membri alla potenza n , avremo la terza eguaglianza

$$A = \sqrt[n]{A^{mn}}.$$

Elevando finalmente i due membri di quest'ultima alla potenza x , otterremo

$$A^x = A^{mn},$$

dalla quale risulta $x = mn$, e per conseguenza

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}.$$

37. Ci resta da esaminare in qual maniera la qualità dei risultati, ossia il loro stato *positivo o negativo*, è connessa con quella delle quantità date nelle due operazioni dell'*inalzamento alle potenze e dell'estrazione delle radici*. Cominciamo dall'inalzamento alle potenze.

Quattro casi si presentano:

1°. La base e l'esponente sono positivi. Allora è evidente che la potenza è pure *positiva*, e che si ha

$$(+A)^{(+B)} = (+C);$$

indicando, come abbiamo fatto di sopra, con i segni $+$ e $-$ racchiusi tra parentesi, lo stato dei numeri sopra i quali si opera, onde meglio far comprendere le regole delle loro combinazioni.

2°. La base è negativa e l'esponente positivo. La potenza può essere in questo caso *positiva o negativa*, secondo che l'esponente sarà *pari o impari*; vale a dire secondo che l'esponente sarà o non sarà multiplo di 2. Infatti, sia m un numero qualunque, 0, 1, 2, 3 ec., da zero fino all'infinito, $2m$ rappresenterà tutti i numeri pari possibili, e $2m+1$ tutti i numeri impari. Così, quando l'esponente è pari, la potenza sarà $(-A)^{2m}$, e sarà $(-A)^{2m+1}$ quando l'esponente è impari. Noi trascuriamo di mettere il segno $+$ agli esponenti e di racchiuderli tra parentesi, poichè si è convenuto che qualunque quantità la quale non è preceduta da alcun segno venga considerata come *positiva*.

Ma, per le regole dell'inalzamento alle potenze delle quantità esponenziali (26), abbiamo

$$(-A)^{2m} = [(-A)^2]^m.$$

Ora (9), $(-A)^2 = -A \times -A = +A^2$. Dunque

$$(-A)^{2m} = [(-A)^2]^m = [+A^2]^m = +A^{2m}.$$

La potenza è dunque *positiva* quando l'esponente è *pari*.

Abbiamo ancora (20)

$$(-A)^{2m+1} = (-A)^{2m} \times (-A)^1.$$

Questa eguaglianza è la medesima cosa, per ciò che si è detto, che

$$(-A)^{2m+1} = (+A^{2m}) \times (-A) = -A^{2m+1}.$$

La potenza è dunque *negativa* quando l'esponente è *impari*.

3°. La base è positiva e l'esponente negativo. La potenza si riduce allora ad una frazione; mentre, come abbiamo già veduto (24),

$$(+A)^{\frac{(-B)}{A}} = \frac{1}{A^{\frac{B}{A}}},$$

e la potenza è evidentemente sempre *positiva*.

4°. Finalmente la base e l'esponente sono negativi. Si ha anche adesso

$$(-A)^{\frac{(-B)}{A}} = \frac{1}{(-A)^{\frac{B}{A}}},$$

e secondo che B sarà *pari* o *impari*, la potenza sarà *positiva* o *negativa*.

38. Nell'operazione dell'*estrazione delle radici* si presentano egualmente quattro differenti casi per determinare lo stato *positivo* o *negativo* della radice.

1°. Il numero e l'esponente sono *positivi*. La qualità della radice dipende dalla grandezza dell'esponente; poichè, se l'esponente è *pari*, siccome si ha (37)

$$(+A)^{2m} = (+C), \quad \text{e} \quad (-A)^{2m} = (+C),$$

ne risulta

$$\sqrt[2m]{(+C)} = (+A), \quad \text{e} \quad \sqrt[2m]{(+C)} = (-A).$$

Nel caso dell'esponente *pari* la radice può esser dunque tanto *positiva* quanto *negativa*. Si esprime questa proprietà con la formula

$$\sqrt[2m]{(+C)} = (\pm A).$$

Se l'esponente è *impari*, siccome si ha solamente.

$$(+A)^{2m+1} = (+C),$$

così si ottiene l'unico risultato

$$\sqrt[2m+1]{(+C)} = (+A).$$

La radice è dunque sempre *positiva* quando l'esponente è *impari*.

2°. Il numero essendo *positivo* e l'esponente *negativo*, la radice è *positiva* e prende una forma frazionaria. Infatti,

$$\sqrt[(-B)]{C} \text{ è la medesima cosa che } C^{-\frac{1}{B}} = \frac{1}{C^{\frac{1}{B}}} = \frac{1}{\sqrt[B]{C}}.$$

Dunque

$$\sqrt[(-B)]{C} = \frac{1}{\sqrt[B]{C}}.$$

3°. Il numero essendo *negativo* e l'esponente *positivo*, se l'esponente è *impari*, la radice è *negativa*, poichè da

$$(-A)^{2m+1} = (-C) \text{ si ricava } \sqrt[2m+1]{(-C)} = (-A).$$

Ma se l'esponente è *pari*, la generazione della radice, quantunque possibile in *idea*, diviene impossibile in *realtà*, non potendo essere allora la radice nè positiva nè ne-

gativa. Infatti $\sqrt[2m]{(-C)}$ non può essere una quantità positiva $(+A)$, poichè $(+A)^{2m}$ è positivo, e non può essere nemmeno una quantità negativa $(-A)$, poichè $(-A)^{2m}$ è pure positivo (37). Questo caso, che è veramente da osservarsi, ci offre dunque la costruzione di una specie particolare di numeri, ai quali è impossibile di dare qualunque siasi interpretazione, quantunque essi sian di un uso frequente ed utile nei calcoli. Si è dato a questi numeri il nome di *quantità immaginarie* (*Fedi* questa parola), che è lungi dal definirne esattamente l'origine, mentre l'immaginazione è una facoltà psicologica, la quale non concorre in nessun modo alla generazione dei numeri che si opera mediante l'intelletto.

Se noi osserviamo che la generazione di un numero negativo per mezzo dell'unità è in generale

$$(-1) \times M,$$

potremo dare alla quantità $\sqrt[2m]{(-C)}$ la forma $\sqrt[2m]{(-1) \times (+C)}$, che equivale (29) a $\sqrt[2m]{(+C)} \times \sqrt[2m]{-1}$. Ora la quantità $\sqrt[2m]{(+C)}$ essendo reale, il fattore *immaginario* $\sqrt[2m]{-1}$ può solo essere l'oggetto di nuove considerazioni.

Le quantità dette *immaginarie* possono dunque esprimersi per mezzo di $\sqrt[2m]{-1}$, e la loro forma generale è

$$M \sqrt[2m]{-1},$$

M essendo una quantità reale qualunque.

4°. Finalmente essendo il numero e l'esponente *negativi*, si trova come all'articolo 2° di questo numero,

$$\sqrt[(-B)]{(-C)} = \frac{1}{\sqrt[B]{(-C)}}.$$

Ed applicando a questa espressione i ragionamenti medesimi dell'articolo 3° si vedrà che la radice sarà *reale e negativa* quando B è *impari*, e sarà *immaginaria* con B *pari*.

39. Noi ci siamo elevati successivamente dalla generazione primitiva dei numeri $A+B=C$ alle generazioni $A \times B=C$, e $A=B=C$; abbiamo esaminato le diverse specie di numeri generati da questi tre differenti modi di costruzione, e

determinata la loro natura; ci resta da dimostrare che il modo $A=B=C$ è l'ultimo modo elementare possibile di costruzione, e che per conseguenza ciò che precede contiene tutti gli *elementi* della scienza dei numeri. Per provare questo cerchiamo, se è possibile, di costruire una nuova specie di numeri, e riprendiam-

mo il cammino che ci ha condotti (6) da $A+B=C$ ad $A \times B=C$, e da quest'ultima (19) ad $A=C$.

Formiamo dunque una serie di numeri

$$a^m=b, b^n=c, c^r=d, d^s=e, \text{ ec. ec.}$$

Sostituendo il valore di b in quello di c , abbiamo

$$(a^m)^n=c, \text{ ossia (26) } a^{mn}=c.$$

Sostituendo in seguito questo valore di c in quello di d , esso diviene

$$(a^{mn})^r=d, \text{ cioè } a^{mnr}=d.$$

Continuando dunque nella medesima maniera successivamente, indicando per p l'ultima potenza, avremo

$$a^{mnr\ldots ec.}=p,$$

la quale, quando tutte le quantità m, n, r, s , ec. sono eguali, si riduce ad

$$a^{mq}=p,$$

indicando il numero di queste quantità per q .

B

Ora, quest'espressione non differisce in nulla da $A=C$. È dunque impossibile di trovare un modo di generazione elementare, il quale non sia compreso sotto una delle tre forme di già trovate; e queste tre forme contengono infatti tutti gli *elementi* possibili della scienza dei numeri considerata nella sua più grande generalità.

Eulero è il primo che siasi accorto del legame che esiste fra i diversi modi delle generazioni elementari, e che abbia fatto osservare che ognuno di essi dà origine a nuove specie di numeri. I matematici che gli sono succeduti, e particolarmente gli autori di opere elementari, pare che non abbiano compreso ciò che vi è d'importante in questa considerazione, che sola permette di coordinare le diverse parti dell'algebra, e di portarle a quell'unità sistematica, senza la quale una scienza non è che una collezione di fatti o di leggi senza legame. Questi autori si sono contentati, per la maggior parte, di presentare l'algebra come un mezzo particolare di risolvere i problemi, confondendo così ciò che ha potuto condurre a scoprire la scienza con la scienza stessa; e si sono partiti da questioni particolari per arrivare ad equazioni, la di cui risoluzione generalizzata forma, secondo loro, la base della scienza dei numeri. Questo metodo è evidentemente vizioso: i numeri costituiscono un ordine di *verità*, le di cui leggi sono necessariamente indipendenti da qualunque applicazione numerica o geometrica; e come tali, la loro generazione deve precedere necessariamente il loro *paragone*, dal quale dipendono le *equazioni*.

Ma questa generazione presenta due punti di vista distinti: il primo è quello nel quale non si considerano che i modi elementari e primitivi, presi isolatamente, della costruzione dei numeri; il secondo è quello nel quale si considera la riunione di questi modi primitivi, e le costruzioni derivate che nascono da questa riunione. Il primo punto di vista costituisce la *generazione elementare* che abbiamo esposta; il secondo, la *generazione sistematica*, la quale sarà sviluppata successivamente. Il *paragone* dei numeri ci presenta egualmente due parti, di cui la prima, il *paragone elementare*, ci dà le *Proporzioni* e le *Progressioni*, e la seconda, il *paragone sistematico*, ci dà le *Equazioni*. Si vedano nel Dizionario queste parole, e ALGORITMA.

Adecco secondo il consueto accenneremo i migliori e più recenti trattati elementari di Algebra, ai quali potrà ricorrere chi desiderasse maggiori cognizioni in questo ramo importantissimo delle matematiche pure. Lacroix, *Éléments d'Algèbre*, Parigi 1830, 2 vol. in-8, 15^a ediz.; Reynaud, *Traité d'Algèbre*, Parigi, 1830, in-8, 8^a edizione; Garnier, *Éléments d'Algèbre*, Parigi, 1811 e 1814, 2 vol. in-8; Lefebvre de Fourcy, *Leçons d'Algèbre*, Parigi, 1835 in-8; Mayer e Choquet, *Traité élémentaire d'Algèbre*, Parigi, 1836 in-8; Paoli, *Elementi d'Algebra*, Pisa, 1794, 2 vol. in-4, ed ivi 3^a edizione, 1803, 3 vol. in-4; Flauti, *Corso d'analisi algebrica*, Napoli 1830 in-8; senza annoverare quei trattati di Algebra che si trovano compresi nei corsi completi di matematiche, come quelli di Franchini, Inghirami, Francoeur ec. ec.

ALGEBRAICO o **ALGEBRICO**. Ciò che appartiene all'algebra. Si dice *caratteri algebrici*, *quantità algebriche*, *curve algebriche*.

Una volta si dividevano le linee curve, in curve *geometriche*, *algebriche*, *trascendenti* e *meccaniche*, e il termine *algebrico* si riferiva a quelle di queste linee la di cui natura può essere espressa da un'equazione elementare, vale a dire da un'equazione la quale non contiene veruna quantità trascendente. Ma oggi che la generazione di tutte le quantità fa parte dell'algebra, queste distinzioni non hanno più alcun fondamento. Tutte le equazioni sono essenzialmente algebriche, e il rapporto delle ascisse alle ordinate di una curva qualunque essendo sempre rappresentato da un'equazione, la classazione di queste linee deve seguire quella delle equazioni (*Vedi CURVE ed EQUAZIONI*).

ALGEBRISTA. Dicesi quegli che è versato nell'Algebra. (*Vedi ALGEBRA*).

ALGEDY (*Astron.*). Nome che significa *il capretto*, e che si dà alla stella del Capricorno segnata γ nei cataloghi. Gli Arabi davano pure questo nome all'intera costellazione, ed anco alla stella polare.

ALGENER, o **ALGENIB**, e più correttamente **ALGENA FERRAOUS** (*il fianco di Perseo*) (*Astron.*). Alcuni osservatori hanno dato questo nome alla cintura di Perseo; ma parecchi autori l'hanno male a proposito confuso col nome di **AL-GERAN** (*Pala*), dato ad una stella di seconda grandezza, situata nella costellazione di Pegaso. Viene indicata nei cataloghi colla lettera γ .

ALGHISI (**GALASSO**), architetto e geometra del XVI secolo, nato a Carpi, pubblicò un'opera sulle fortificazioni, in tre libri, stampata con gran lusso tipografico a Venezia, nel 1570, in-folio. Tibaldi ha inciso, sopra un suo disegno, una stampa che rappresenta un gran palazzo reale, colla data del 1566. Parecchi autori hanno posto a contribuzione le opere dell'Alghisi, che fu architetto del duca di Ferrara.

ALGOL, e più esattamente **RAS AL-GHOL** (*testa di furia*) (*Astron.*). Nome della stella di seconda grandezza volgarmente chiamata *Testa di Medusa* nella costellazione di Perseo, e segnata nei cataloghi colla lettera β . Questa stella va soggetta ad una variazione periodica nella intensità della sua luce: essa passa in due giorni e quarantotto o quarantanove minuti dalla seconda grandezza alla quarta o alla quinta grandezza. Questa osservazione è stata fatta per la prima volta nel 1783 da un gentiluomo del ducato di York chiamato Goodricke, sebbene fino dal secolo XVII si fosse notata qualche alterazione nella luce di questa stella. A Parigi essa non rimane sotto l'orizzonte che per un'ora e ventisette minuti. Le variazioni di Algol possono spiegarsi, con Maupertuis, mediante la figura schiacciata di questa stella, o, con Riccioli, mediante qualche macchia sulla sua superficie, o mediante l'interposizione di qualche pianeta che giri intorno a questa bella stella: questa è l'opinione di Goodricke. (*Vedi STELLE CANGIANTI*).

ALGOMEIZA, e più correttamente **AL-GRANETMA** (*Astron.*). Si dà questo no-

me a Procione, una delle stelle della costellazione del Cane minore, e qualche volta all'intera costellazione (*Vedi* PROCIONE). Alcuni astronomi arabi hanno scritto questo nome AL-GOMEYZAN, che significa *piccolo sicomoro*.

ALGORAB (*Astron.*). Nome di una delle stelle della costellazione meridionale del Corvo, indicata γ nei cataloghi. Il nome di AL-GHORAB, che significa *il corvo*, vien dato dagli Arabi all'intera costellazione.

ALGORITMIA. È sotto questo nome che un geometra moderno, il sig. Wronski, indica uno dei rami fondamentali delle matematiche pure: quello cioè che ha per oggetto i numeri. Lo scopo di questo dotto nelle numerose opere, che ha pubblicato in Francia fino dal 1812, pare che sia quello di fondare in generale la filosofia delle matematiche, e di formare in particolare un nuovo ramo di queste scienze, al quale dà il nome di *Tecnia*. Le vedute nuove che esso propone, l'unità che vuole stabilire fra le numerose parti delle matematiche, la legge universale che ha scoperto, legge che, dietro il rapporto del celebre Lagrange, comprende tutte le leggi conosciute per lo sviluppo delle funzioni, non ci permettono di passare sotto silenzio una dottrina che non può mancare d'influire sull'avvenire della scienza. *Vedi* FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE.

ALGORITMICHE FACOLTA'. *Vedi* FACOLTA' ALGORITMICHE.

ALGORITMO. Termine derivato dalla parola araba AL-GORETM, che significa *radice* in generale, e che è stata usata, per estensione, nel significato di *calcolo*. Si adopera non solamente per indicare qualunque specie di calcolo o di generazione dei numeri, ma ancora per indicare la notazione speciale adottata nei calcoli. Così, per esempio, $a^b=c$ è l'*algoritmo delle potenze*; $\Delta x = (x + \Delta x) - x$ è l'*algoritmo delle differenze*; $Fx = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \text{ec.} \dots$, è l'*algoritmo delle serie*, ec., ec. La scienza il di cui scopo è di abbracciare i fatti e le leggi dei numeri, e per conseguenza tutti gli algoritmi, dovrebbe dunque essere chiamata per eccellenza *algoritmia*; e dobbiamo fare osservare in questo proposito che l'adozione di una parola particolare per esprimere la scienza generale dei numeri è tanto più necessaria, in quanto che tale scienza non ha fin qui ricevuto alcuna speciale denominazione, per cui non possa essere confusa con l'una o con l'altra delle sue parti, l'*aritmetica* e l'*algebra*. Il sig. Ampère, nella sua classificazione delle cognizioni umane, propone la parola *aritmologia*; ma questa parola non ci sembra tanto bene appropriata al soggetto, quanto quella di *algoritmia*, la quale si trova già usata in molte opere importanti.

ALHABOR, o **ALABOR**, e più correttamente **AL-AABOUR** (*Astron.*). Nome arabo della stella Sirio.

ALHAJOTH, o **ALAJOT**, e più correttamente **AL-AYOUQ** (*Astron.*). Nome arabo della stella della Capra, che si trova nella costellazione del Coccchiere, e che i Sirj chiamano HAYOTOU. Da alcuni autori viene indicata come una stella di terza grandezza nella costellazione del Capricorno. È questo un errore al quale ha potuto dare origine il nome volgare di tale stella, attribuito alcune volte a quest'ultima costellazione. La stella della Capra è indicata ancora col nome di **ALHATOD**.

ALHATOD, o **ALATOD** (*Astron.*). Nome arabo della bella stella della Capra.

ALHAZEN. Nome volgare col quale i dotti d'Europa indicano il celebre e profondo matematico arabo il di cui nome è **AL-HASSAN**, **BEN-HASSAN**, **ABD-ALY**, **BEN EL-HAYTHAM**. Era esso nativo di Basrah o Bassorah, e si trovava in Egitto alla corte del califfo El-Hakem, verso l'anno 400 dell'egira (1009 dell'era nostra), per la seguente circostanza. Si vantò egli un giorno che costruito avrebbe nel Nilo una macchina, colla quale avrebbe messo gli abitanti in sicuro dalle eccessive inondazioni e dal soverchio decrescimento delle acque di questo fiume. Tale proposizione riferita venne ad Hakem, califfo fatemita, che, ad onta delle sue stranezze, proteg-

geva i dotti e gli chiamava alla sua corte. Fece egli venire Alhazen, uscì ad incontrarlo quando seppe che era vicino al Cairo, lo colmò di benefizj, lo fornì di operaj, e lo mise in istato di mantenere la sua parola; ma quando Alhazen ebbe percorso l'Egitto, e riconosciuto il corso del Nilo, vide l'impossibilità di eseguire quel progetto, che na orgoglio irreflessivo gli aveva fatto concepire, e ritornò vergognando al Cairo. Siccome ei temeva la collera di Hakem si finse pazzo, e continuò tal finzione fino alla morte di quel principe avvenuta nell'anno dell'era nostra 1020. Non avendo nessun mezzo di sussistenza, impiegava i momenti che ei toglieva alla composizione delle sue opere in copiare libri che poi vendeva, e passò così il resto della sua vita, contentandosi di poco e lavorando molto. Morì al Cairo l'anno 430 dell'egira (1038 di G. C.)

Alhazen ha composto un gran numero di opere delle quali Casiri ci ha conservato l'elenco (*Bibl. Arab. Hisp. tom. I pag. 415*), e di cui una parte esiste manoscritta nella Biblioteca Bodleiana, ed in quella di Leida. Ma le scienze sue favorite, e di cui si occupò più specialmente, furono l'astronomia e l'ottica; e per questo rapporto merita di esser citato con distinzione tra i dotti della sua nazione, i di cui studj hanno maggiormente contribuito a spargere in Europa le scienze ed i lumi.

Il *Trattato d' Ottica* d'Alhazen manifesta in parecchi luoghi una profonda istruzione, e tentativi felici per giungere alla spiegazione dei fenomeni che presenta questa scienza, e che erano considerati ancora come insolubili al suo tempo. Questo libro è pure commendevole per un'altra ragione: esso può essere utilissimo alla storia letteraria e critica delle scienze presso gli Arabi, dei quali espone tutti i progressi in un quadro delle cognizioni possedute da tale illustre nazione. Quest'opera è poi divisa in tre parti. La prima, consacrata alla fisica, non è esente da errori. Alhazen vi sviluppa delle false dottrine sulla causa della visione e sui colori. Non ostante vi si trovano considerazioni giudiziosissime sulla refrazione astronomica, sulla grandezza apparente degli oggetti, e specialmente sul fenomeno dell'ingrandimento del sole e della luna veduti all'orizzonte. La seconda parte, che è consacrata alla catottrica, è trattata da Alhazen con maggior dottrina, quantunque vi siano incorsi alcuni errori, come i suoi calcoli sul luogo apparente dell'immagine negli specchi curvi, e quelli sul fuoco degli specchi caustici. La terza parte è consacrata alla diottrica. Le cognizioni di Alhazen su questo soggetto, sebbene molto estese, non ostante sono ancora imperfette. Pure in questa parte della sua opera si trova l'esposizione di teorie ingegnose per ispiegare la refrazione. Huygens ha rimproverato ad Alhazen un grave errore, di cui non è colpevole, facendogli dire che gli angoli refratti sono proporzionali agli angoli d'inclinazione. Il matematico arabo scoprì benissimo, al contrario, che non vi era tra loro nessun rapporto costante, e ricorse all'esperienza per determinare la quantità della refrazione conveniente a ciascuna obliquità; ci ne dà pure una tavola che distrugge affatto l'asserzione di Huygens. L'ottica di Alhazen, tradotta dall'arabo, e riunita a quella di Vitellione, è stata pubblicata la prima volta a Basilea, nel 1572, da Risner sotto questo titolo: *Alhazen, o Alhaken Opticæ Thesaurus libri VIII, primum editi. Ejusdem liber de Crepusculis et nubium ascensionibus cum commentariis Risnerii, Basil. Episc., 1572*, in fol. Il trattato dei crepuscoli era già stato pubblicato da Gerardo di Cremona nel 1572. La dottrina di Alhazen sui crepuscoli, sull'atmosfera, e sulla refrazione astronomica è particolarmente lodata dai dotti, e si pretende che abbia molto servito a Keplero.

Esistono altri matematici col nome di Alhazen, i lavori dei quali sono meno importanti, e di cui non abbiamo giudicato utile il far menzione.

AL-HOOT (il Cetaceo) (*Astron.*). Nome arabo della stella seguita e nei vostri cataloghi, e che è la prima della coda dell'Orsa maggiore. Viene pure indicata

coi nomi alterati di ALIOT, ALIATH, ALLIOTH, MIRACH, e sotto quello di MIZAR nell'*Uranometria* di Bayer. La cognizione di questa stella è soprattutto utile in mare.

ALIAT, o ALIATH (*Astron.*). *Vedi* AL-HOOT.

ALIDADA. Riga mobile di legno o di metallo, che serve a dirigere delle visuali agli oggetti, e segnare le linee delle loro direzioni quando si levano le piante per mezzo dello strumento detto *Tavoletta* (*Vedi* TAVOLETTA). Alle estremità dell'alidada s'innalzano perpendicolarmente due pezzi di rame, uno dei quali ha un foro a cui si pone l'occhio, e l'altro un'apertura quadrata nel cui mezzo è teso verticalmente un filo: questi due pezzi diconsi *traguardi*. Per mirare un oggetto si dirige l'alidada in maniera che il raggio visuale, che parte dal foro d'uno dei traguardi, rada il filo dell'altro, e vada al punto di mira. La direzione vien determinata dal piano che è perpendicolare al piano dell'alidada, e ne rade esattamente l'orlo.

Chiamasi ancora alidada quella riga che, girando impernata nel centro d'un circolo diviso in gradi, può percorrerne il lembo, e misurare di quanti gradi abbia girato. Essa ha pure alle sue estremità due traguardi, oppure è armata di un cannocchiale (*Vedi* GRAFOMETRO, e CIRCOLO RIPETITORE.). La parola alidada viene da AL-HIDAD, che in arabo ha i diversi significati di *traguardo di ferro, scopo, da punto determinato*. In greco ed in latino viene spesso indicata col nome *ἀντιπρᾶ, dioptra*; e talvolta ancora con quello di *linea fiduciae, linea di fiducia*.

ALIEMINI (*Astron.*). Nome dato nelle *Tavole Alfonsine* alla bella stella del Cane maggiore, più comunemente conosciuta sotto il nome di *Sirio*. Aliemini è una corruzione della parola araba AL-YEMINY, o AL-YEMANIYH, che significa *situato a destra*.

**ALIMENTATORE (*Mecc.*). Si chiama con tal nome quella parte di una macchina che somministra materia ad un'altra parte della stessa macchina con un certo ordine. Così nelle caldaje delle macchine a vapore dicesi *alimentatore* l'apparato che serve a rimettere l'acqua a mano che si consuma. Nei fornelli si aggiunge talvolta un *alimentatore*, ossia un meccanismo che va gettando in essi a poco a poco il combustibile nella quantità necessaria.

ALIOT, o ALIOTH. *Vedi* AL-HOOT.

ALIQUANTO (*Aritm.*), dalla parola latina *aliquantus*. Le parti *aliquante* di un numero, o in generale di un tutto, sono quelle che non vi sono contenute esattamente un numero intero di volte, o che non ne sono fattori. Per esempio, 5 è una parte *aliquanta* di 8, perchè 5 non è fattore di 8. La parte *aliquanta* di un numero è l'opposto della parte *aliquota*. *Vedi* ALIQUOTO.

ALIQUOTO (*Aritm.*), dalla parola latina *aliquotus*. Parte *aliquota* di un numero, o di una quantità, dicesi quella che vi è contenuta esattamente un numero intero di volte, o che ne è fattore. Per esempio, 2 è una parte *aliquota* di 8, perchè 2 è fattore di 8.

** Nella moltiplicazione dei numeri complessi si fa uso della proprietà che hanno le parti *aliquote* di esser contenute esattamente un numero intero di volte nella quantità alla quale si riferiscono. Abbiassi, per esempio, da trovare l'importare di Libbre 3½, once 7, e danari 15 di una data mercanzia che costa Lire 897, soldi 7, e danari 3 la libbra. Per risolvere questo quesito basta moltiplicare il prezzo della libbra per la quantità della mercanzia; ma per chi non sapesse come contenersi in questa moltiplicazione, fatta complicata dalle diverse frazioni che accompagnano i due fattori, il metodo più semplice che potrebbe presentarsi sarebbe quello di ridurre ognuno dei fattori ad un solo numero frazionario dell'unità principale, di eseguire la moltiplicazione sui due numeri frazionari colle regole della moltiplicazione delle frazioni, e di convertir quindi il prodotto, che

sarà un numero frazionario dell'unità principale, in un numero complesso di unità, e di divisioni e suddivisioni convenzionali di tale unità. Così, nel nostro caso,

il prezzo della mercanzia ridotto a danari darà 215367 danari, ossia $\frac{215367}{240}$ di lira,

e il peso della mercanzia ridotto a danari darà 100407 danari, ossia $\frac{100407}{288}$ di

libbra; ed eseguendo su questi due numeri frazionari la moltiplicazione si avrà

per prodotto $\frac{21624354369}{69120}$ di lira, ossia Lire 312852. 6. 11 $\frac{25}{32}$ per valore totale

della mercanzia.

Il metodo delle parti aliquote rende più breve la soluzione del precedente quesito. Consiste questo metodo nel decomporre i numeri delle diverse divisioni dell'unità in parti aliquote, sia dell'unità principale, sia le une delle altre; ciò fatto, per avere il prodotto corrispondente ad una di queste parti aliquote, si prende da uno dei prodotti, che precedono, una parte indicata dal numero delle volte che la parte aliquota, che si considera, è contenuta nella parte corrispondente al prodotto già ottenuto. Ecco esemplificato questo metodo sui medesimi numeri di sopra riportati

						Lir. 897 7 3
						Lib. 348 7 15
Costo di Lib. 348 a Lir. 897 la Libbra.						7176
						3588
						2691
"	"	"	a	sol. 5	"	87 — —
"	"	"	a	" 2	"	34 16 —
"	"	"	a	dan. 3	"	4 7 —
"	di	Once 6 a	Lire 897. 7. 3 la	Libbra.		448 13 7 $\frac{1}{2}$
"	"	" 1 a	" " " "	" " " "	"	74 15 7 $\frac{1}{4}$
"	"	Dan. 12 a	" " " "	" " " "	"	37 7 9 $\frac{1}{4}$
"	"	" 3 a	" " " "	" " " "	"	9 6 11 $\frac{13}{32}$
						Lire 312852 6 11 $\frac{25}{32}$

Per avere il prodotto dei due numeri complessi indicati, si comincia da prendere soltanto il valore di Libbre 348 a Lire 897. 7. 3 la libbra; e per far ciò si moltiplica primieramente 897 per 348: quindi, per ottenere il prodotto di 7 soldi per 348, si osserva che 7 soldi possono decomorsi in 5 soldi, che formano $\frac{1}{4}$ di lira, più 2 soldi che formano $\frac{1}{10}$ di lira; dunque siccome il prodotto di una lira moltiplicata per 348 sarebbe 348 lire, così quello di 7 soldi si comporrà del quarto di 348 lire, più del decimo di 348. Prendendo il quarto di 348 lire si ha 87 lire, e prendendone il decimo si ha 34 lire e 16 soldi; i quali prodotti si aggiungono a quello di 897 per 348.

Passando ai tre danari si osserva che essi sono l'ottava parte di 2 soldi, ossia di 24 danari, perciò per averne il prodotto per 348 basta prendere l'ottavo del prodotto dei 2 soldi, e così si avrà 4 lire e 7 soldi.

Fin qui non si è preso che l'importare di 348 libbre di merce a lire 897 soldi 7 e danari 3 la libbra, e ciò si è ottenuto prendendo in primo luogo il costo delle dette libbre 348 di merce come se costassero sole lire 897 la libbra, quindi agginrendovi il costo delle stesse libbre a ragione di 5 soldi la libbra,

in seguito unendovi il costo della stessa mercanzia a ragione di 2 soldi la libbra, ed in fine riportando il costo della merce a ragione di tre danari la libbra. Ma con questo non si è eseguita interamente l'operazione, poichè non si ricercava il valore di libbre 348 soltanto, ma volevasi ancora quello di once 7 e danari 15.

Per avere pertanto anco questo valore, si decomporranno le 7 once in 6 once, che sono $\frac{1}{2}$ di una libbra, più nn'oncia che è $\frac{1}{2}$ di 6 once: quindi per il costo delle 6 once si prenderà la metà di quello della libbra, e pel costo dell'oncia il sesto di quello delle 6 once.

Venendo ora ai 15 danari di libbra, si decomporranno in 12 danari, che formano $\frac{1}{4}$ dell'oncia, e 3 danari che sono $\frac{1}{4}$ di 12 danari; così prendendo la metà del costo di nn'oncia si avrà quello di 12 danari, e prendendo il quarto del costo di 12 danari si avrà quello di 3 danari.

Sommati tutti questi parziali prodotti, si ottiene il valore totale della merce in Lire 312852. 6. 12 $\frac{24}{100}$, come si era avuto con l'altro metodo delle frazioni ordinarie. Si possono le divisioni e suddivisioni dell'unità principale decomporre in parti aliquote in più maniere; fra queste dovrà scegliersi quella che conduce a un minor numero di prodotti parziali: quando però il sistema di decomposizione più semplice non si veda a colpo d'occhio, in pratica è meglio appigliarsi a quello che primo si presenta alla mente, mentre il più delle volte la perdita di tempo che potrebbe occasionare la ricerca di un altro modo di decomposizione non resterebbe compensata dalla maggior brevità del calcolo.

****ALISEO** (*Naut.*). Sotto questo nome conoscono i marinari alcuni venti regolari che soffiano quasi sempre in certi luoghi fra i tropici.

ALKAMELUZ (*Astron.*). Nome dato da alcuni autori alla stella Arturo situata nella costellazione di Boote. Questa denominazione è una corruzione del nome *AL-BARISH* (*il lanciere*), che le danno gli Arabi.

****ALLACCIARE l'acqua** significa ridurre più sorgenti di acqua in un solo canale in guisa tale, che non se ne perda alcuna.

****ALLEN** (*TOMMASO*). Matematico inglese, nato nel 1542, ad Utoxeter nello Staffordshire. Le cognizioni di Allen nelle matematiche lo fecero considerare dal volgo ignorante come un mago; l'autore di un libro intitolato: *Repubblica di Leicester*, lo accusò di avere impiegato la magia per servire il conte di Leicester nel suo progetto di sposare la regina Elisabetta. Non è d'uopo arrestarsi sopra una così assurda imputazione; ma è certo che il conte aveva tanta confidenza in Allen, che nulla d'importante si faceva nello Stato senza che questi ne fosse informato. Questo matematico è stato introdotto da Walter Scott nel suo romanzo *il Castello di Kenilworth*, dove figura come astrologo del conte di Leicester.

Allen raccoglieva con una perseveranza instancabile quanti manoscritti poteva concernenti la storia, l'antichità, l'astronomia, la filosofia e le matematiche. Parecchi autori gli citarono siccome quelli che formavano la *Bibliotheca Alleniana*. Oltre le preziose collezioni lasciate da quel dotto, si ha di lui: I. *Ptolemaei Pelusiensis, De astrorum iudiciis, aut, ut vulgo vocant, quadripartitae constructionis liber secundus, cum expositione Thomae Alleya Angli Oxoniensis*; II. *Claudii Ptolemaei, De astrorum iudiciis liber tertius, cum expositione Th. Alleya*. Morì nel 1632 in età avanzatissima. È cosa da compiangere che un uomo tanto stimato da' suoi contemporanei, e riguardato come uno de' primi matematici del suo tempo, non abbia lasciato un maggior numero di opere sulla scienza alla quale si era dedicato.

ALLERANDRÉ (*GIACOMO*). Vedi **ALEXANDRE**.

ALLIATH, o ALLIOTH (*Astron.*). Vedi **AL-HOOT**.

*** ALLIGAZIONE**. Regola d'alligazione (*Aritm.*). Si dà indistintamente in aritmetica il nome d'alligazione a qualunque mescolanza di diverse materie suscet-

tibili di essere riunite. Le questioni, che si possono proporre sopra queste mescolanze, offrono due punti di vista differenti: 1°. Essendo dati i prezzi e le quantità delle materie componenti, si vuol determinare il prezzo della mescolanza. 2°. Essendo dato il prezzo e la quantità della mescolanza, come pure i prezzi delle materie componenti, si vogliono determinare le quantità di queste materie. Le operazioni aritmetiche necessarie per risolvere questi due diversi ordini di proposizioni si chiamano regole di alligazione, cioè: *regola d'alligazione diretta* nel primo caso, e *regola d'alligazione inversa* nel secondo.

Regola d'alligazione diretta. Il caso più semplice è quello che ha per oggetto di determinare il prezzo di una mescolanza. È necessario in primo luogo di determinare bene l'idea che si annette alla parola *prezzo*.

Esprimendo la quantità di una merce qualunque con un numero, l'unità di questo numero indica sempre una certa quantità determinata, di cui si è previamente convenuto, ed è particolarmente il valore in danaro di questa unità che si chiama il *prezzo della merce*. Questo prezzo, moltiplicato in seguito per il numero delle unità, che la quantità della merce contiene, fa conoscere il *valore* di questa quantità. Per esempio, 12 braccia di stoffa, a 3 lire il braccio, costano 36 lire. Il numero 12 esprime la *quantità* della mercanzia, il numero 36 il suo *valore*, e il numero 3 il suo *prezzo*.

Il *prezzo* è dunque il *valore specifico* di una cosa, ossia il *valore dell'unità* di questa cosa.

Ciò posto, ecco la regola: *Si moltiplica il prezzo di ciascuna materia per la sua quantità rispettiva; si divide la somma dei prodotti per quella delle quantità, o per la quantità totale della mescolanza; il quoziente che ne risulta sarà il prezzo della mescolanza.*

Es. I. *Si sono mescolate insieme 3 specie di grano a differenti prezzi, cioè:*

10	Sacca di grano a	Lire	15
12	—	—	" 13
8	—	—	" 12

Si domanda il prezzo della mescolanza.

Moltiplicando ciascun numero di sacchi per il suo prezzo, si trova:

Valore delle	10	sacca	Lire	150
— delle	12	—	"	156
— delle	8	—	"	96
Valore totale delle	30	sacca	Lire	402

Dividendo 402 per 30, si trova Lire 13 e soldi 8 per il prezzo del sacco della mescolanza.

Es. II. *Voleudo fondere insieme più verghe d'argento a differenti titoli, si desidera conoscere il titolo della mescolanza.*

Si chiama *titolo* dell'argento la quantità di metallo puro contenuto in un marco, e si valuta questo titolo supponendo il marco diviso in 12 parti, che si chiamano *danari*, e il danaro in 24 *grani*. Così quando si dice che il titolo di una verga è di 10 danari e mezzo, s'intende che un marco di questa verga contiene 10 danari e 12 grani d'argento puro, e 1 danaro e 12 grani di qualunque altro metallo inferiore. Quando una verga d'argento è interamente pura, si dice che essa è a 12 danari.

In Toscana ed in altri Stati d'Italia il titolo dell'argento si valuta sopra una

libbra che si suppone divisa in 12 oncie, e l'oncia in 24 danari. Così dicendosi che il titolo di una data verga o pasta è di 8 oncie e 9 danari, si vuole intendere che in una libbra di questa verga si contengono 8 oncie e 9 danari d'argento puro, e 3 oncie e 15 danari di lega o di metallo inferiore. Il titolo poi dell'oro si calcola sopra un'oncia che s'immagina divisa in 24 parti dette *karati* o *carati*; cosicchè una verga d'oro il cui titolo sia di 22 *carati*, contiene 22 parti di oro puro e due parti di metallo inferiore.

Il titolo dell'argento e dell'oro indica dunque nel medesimo tempo il prezzo che hanno nel commercio questi metalli; ed in questo caso dobbiamo operare come nell'esempio precedente. Così avendo fuso insieme

25 marchi d'argento a 10 $\frac{1}{2}$ danari di fino
38 — — a 9 $\frac{1}{4}$ —
16 — — a 11 —

per trovare il prezzo della mescolanza, si moltiplica ciascun titolo per il numero dei marchi al quale esso appartiene, e si trova

Valore dei	25 marchi	262 $\frac{1}{2}$ danari
— dei	38 —	351 $\frac{1}{2}$ —
— dei	16 —	176
Valore dei	79 marchi	790 danari.

Dividendo il numero totale dei danari per quello dei marchi si ottiene 10 danari per il titolo della mescolanza.

Il titolo dell'argento come pure quello dell'oro, si esprime in Francia, dopo l'introduzione del sistema decimale, in *millesimi* dell'unità: così l'argento puro si dice a 1000 *millesimi*; e l'argento, che contiene 90 o 100 *millesimi* di lega, si dice essere al titolo di 0,90 o 0,900 (Vedi Titolo).

Esaminando il processo seguito nella regola d'alligazione diretta, è facile di concepirne le ragioni. Infatti A, B, C, D, ec., essendo delle quantità qualunque di mercanzie, i di cui prezzi rispettivi sono m, m', m'', m''' , ec., i valori di queste mercanzie sono $mA, m'B, m''C, m'''D$, ec., e per conseguenza il valore totale della loro mescolanza sarà

$$mA + m'B + m''C + m'''D + \text{ec.}$$

la quantità della mescolanza essendo

$$A + B + C + D + \text{ec.}$$

Ora, per trovare il *valore* di una mercanzia, è necessario moltiplicare la sua *quantità* per il suo *prezzo*; dunque, dividendo il *valore* per la *quantità*, si trova il *prezzo*. Così, dividendo $mA + m'B + m''C + m'''D + \text{ec.}$ per $A + B + C + D + \text{ec.}$, si avrà il prezzo della mescolanza.

In tutto ciò che precede, ed in ciò che saremo per dire, si suppone che le materie che si mescolano insieme non abbiano nessuna scambievole azione chimica, per cui vengano a diminuirsi o aumentarsi i loro volumi.

Regola d'alligazione inversa. Nella regola d'alligazione inversa, quando si hanno più di due oggetti mescolati, il problema è indeterminato, e può ammettere un gran numero di soluzioni: esso supera allora le forze dell'aritmetica ordinaria (Vedi ANALISI INDETERMINATA). Noi dunque non esamineremo adesso che il caso di due oggetti.

Il prezzo di ciascuna delle materie essendo conosciuto, come pure quello della mescolanza, si tratta di determinare la quantità di ciascuna delle materie co-

ponenti. Ecco la regola: Si tolga il prezzo più piccolo dal prezzo della mescolanza, si tolga in seguito il prezzo della mescolanza dal prezzo più grande, e si avranno così due differenze. Si divida in seguito la quantità della mescolanza in due parti, le quali stiano fra loro nel medesimo rapporto delle due differenze trovate, e queste due parti saranno le quantità domandate, cioè: la più grande sarà quello il prezzo della quale differisce meno dal prezzo della mescolanza, e la minore sarà quella il cui prezzo differisce più dal prezzo della mescolanza.

10. *Esempio.* Un sacco di grano a 15 lire si compone di una parte di grano a 12 lire il sacco e di un'altra a 19 lire. Si domanda la quantità di ciascuna di queste parti.

$$\text{Prima differenza } 15 - 12 = 3$$

$$\text{Seconda differenza } 19 - 15 = 4$$

Bisogna dunque dividere il sacco in due parti le quali stiano fra loro come 3 : 4. Così, il sacco essendo l'unità, queste parti sono $\frac{3}{7}$ e $\frac{4}{7}$; vi è dunque nella mescolanza $\frac{3}{7}$ di grano a 19 lire, e $\frac{4}{7}$ di grano a 12 lire.

110. *Esempio.* 500 bottiglie di vino a 3 lire sono il prodotto della mescolanza di due specie di vini, l'una a 5 lire e l'altra a 2 lire la bottiglia. Si ricercano quantità che abbiamo dovuto prendere di ciascuna di queste specie di vino.

$$\text{Prima differenza } 3 - 2 = 1$$

$$\text{Seconda differenza } 5 - 3 = 2$$

Le quantità cercate stanno dunque nel rapporto di 2 a 1. Per trovarle, si pongono le due proporzioni

$$3 : 500 :: 2 : 333 \frac{1}{3}$$

$$3 : 500 :: 1 : 166 \frac{2}{3}$$

Abbiamo dunque preso 166 $\frac{2}{3}$ bottiglie a 5 lire, e 333 $\frac{1}{3}$ bottiglie a 3 lire.

Questa regola può dimostrarsi nella seguente maniera. Sia A la quantità di una delle materie, ed m il suo prezzo; B la quantità dell'altra materia, ed n il suo prezzo; M la quantità della mescolanza, e p il suo prezzo; abbiamo dalla regola diretta

$$mA + nB = pM.$$

Ma M è la medesima cosa che $A + B$, dunque si ha ancora

$$mA + nB = pA + pB.$$

Riunendo in un medesimo membro le quantità che hanno un fattore comune, abbiamo

$$mA - pA = pB - nB,$$

ossia

$$(m - p)A = (p - n)B;$$

cioè che si

$$\frac{A}{B} = \frac{p - n}{m - p}.$$

Il rapporto delle quantità A e B è dunque infatti lo stesso di quello delle differenze $p - n$ ed $m - p$. Ciò in quanto alla prima parte della regola. In quanto al-

l'altra parte si osserverà primieramente che, per avere positive ambedue le differenze, si dovrà supporre che sia n il prezzo minore ed m il prezzo maggiore, o, in altri termini, che A rappresenti la quantità che ha un prezzo maggiore, e B quella che ha un prezzo minore, il che non toglierà nulla alla generalità della formula. Ciò posto, è chiaro che, secondochè $p-n$ sarà maggiore o minore di $m-p$, A dovrà essere maggiore o minore di B ; che è quanto dire, che se la differenza tra il prezzo della mescolanza ed il prezzo minore supererà la differenza tra il prezzo maggiore e quello della mescolanza, la materia di maggior costo dovrà superare quella che costa meno, e viceversa se la prima di dette differenze sarà superata dalla seconda, la materia che costa meno dovrà essere in maggior quantità dell'altra.

Qualora si desiderassero i valori di A , e di B separati e indipendenti l'uno dall'altro, basterà porre in luogo di B e di A i loro valori $M-A$ ed $M-B$, tratti dall'equazione $A+B=M$, e risolvendo quindi per A e per B le risultanti equazioni si avrà

$$A = M \left(\frac{p-n}{m-n} \right), \quad B = M \left(\frac{m-p}{m-n} \right).$$

Alla regola inversa d'alligazione si riferisce il famoso problema della Corona di Gerone, re di Siracusa. Aveva questo principe consegnato dell'oro ad un artefice per farne una corona; ma sospettando che costui avesse sottratto una porzione dell'oro ricevuto, ed avesse sostituito in sua vece altrettanto peso d'argento, incaricò il celebre Archimede di riscontrare, senza guastare la corona, se vi fosse frode per parte dell'artefice, ed in caso affermativo di determinare la quantità dell'oro e dell'argento contenuto nella corona. Fu in questa occasione che l'illustre matematico siracusano, intento a risolvere il propostogli problema, scoprì l'importante legge d'idrostatica, che i corpi immersi in un liquido qualunque perdono tanto del loro peso, quanto è il peso di un egual volume del liquido nel quale vengono immersi. Raccontasi che scoperta avendo questa legge nell'atto di entrare nel bagno, trasportato dal giubbilo di aver fatto una osservazione sì rilevante, e tutto preoccupato delle numerose applicazioni di questa bella scoperta, applicazioni che la sua gran mente aveva già afferrate, uscì dal bagno e nudo tornò a casa percorrendo le strade di Siracusa, e gridando: *l'ho trovato, l'ho trovato*. Ed infatti mediante la legge idrostatica surriferita, e col soccorso della regola di alligazione si giunge a sciogliere il quesito proposto da Gerone.

Infatti, chiamato M il peso della corona, si facciano due masse, l'una di puro argento e l'altra di puro oro, ed ognuna del medesimo peso M . Ciò fatto, s'immergano in un liquido qualunque i tre corpi, e si rappresentino con p , m , ed n i pesi di cui vengono a diminuire la corona, la massa d'argento, e la massa d'oro. Adesso abbiamo due sostanze diverse, un dato peso di una delle quali, immerso in un liquido, perde una porzione m di peso, mentre un medesimo peso dell'altra, nella medesima circostanza, ne perde una porzione n ; e con queste sostanze si è fatta una mescolanza, che, a perfetta eguaglianza di condizioni, perde una quantità di peso espressa da p . Se dunque, conosciute le quantità M , p , m , ed n , vogliamo trovare le quantità dell'argento e dell'oro, che mescolate insieme formino un composto di peso M , che immerso in un dato liquido perda un peso p , abbiamo da fare una ricerca perfettamente identica a quella che ci proponiamo nella regola inversa d'alligazione, come d'altronde può verificarsi mediante l'identità dei risultati che si ottengono risolvendo il problema. Infatti, indicando con A e con B i pesi dell'argento e dell'oro, necessari a formare una corona del peso e della qualità prescritta, si vedrà che l'argento A immerso nel liquido perde un peso $\frac{mA}{M}$, e l'oro B perde un peso $\frac{nB}{M}$; ma, per condizione, la

mescolanza deve esser tale che perda un peso p , dunque si avrà

$$\frac{mA}{M} + \frac{nB}{M} = p,$$

ossia

$$mA + nB = pM.$$

E poichè i due pesi A e B debbono formare il peso M , avremo

$$mA + nB = p(A + B);$$

e quindi

$$\frac{A}{B} = \frac{p-n}{m-p} = \frac{n-p}{p-m}$$

risultato identico a quello superiormente ottenuto, e dal quale si otterrebbero egualmente i valori separati di A e di B .

ALLIOTH (*Astron.*). Vedi **AL-HOOT**.

ALLUNGATO (*Geom.*). Dicesi in geometria *allungato* ciò che è più lungo che largo. La *sferoide allungata* è una sferoide il di cui asse è maggiore del diametro del circolo perpendicolare a quest'asse, ed egualmente lontano dalle sue estremità.

Così si può dare e si dà il nome di *sferoide allungata* alla sferoide prodotta dalla rivoluzione di una semi-ellisse intorno al suo grand'asse (Vedi **SFEROIDE**). Al contrario, se la sferoide è formata dalla rivoluzione di una semi-ellisse intorno al suo asse minore, o in generale se il suo asse è minore del diametro del circolo il di cui piano è perpendicolare alla metà di quest'asse, si chiama *sferoide schiacciata*. Quest'ultima figura è presso a poco quella della terra che abitiamo, e forse ancora di tutti i pianeti, nella maggior parte dei quali si osserva che l'asse è più piccolo del diametro dell'equatore (Vedi **TERRA**).

La parola *allungato* si usa ancora parlando delle cicloidi e delle epicycloidi, la base delle quali è più grande della circonferenza del circolo generatore (Vedi **CICLOIDE**, ed **EPICYCLOIDE**).

ALMAGESTO (*Storia letteraria delle scienze matematiche*). È questo il titolo dato dagli Arabi al *Trattato d'Astronomia* composto da Tolomeo verso l'anno 140 dell'era nostra: ed è nel tempo stesso uno dei più celebri libri dell'antichità, e l'opera più antica d'astronomia che sia giunta fino a noi. Questo nome è formato dalla greca parola *μεγίστος*, *grandissimo*, che gli Arabi non hanno fatto che copiare, aggiungendovi il loro articolo arabo *al* nel titolo di *tahryr al-magesty*, che significa *l'opera grandissima, l'opera per eccellenza*. L'entusiasmo col quale l'Almagesto fu accolto, nell'epoca in cui fu scritto, gli aveva precedentemente fatto dare un titolo analogo dagli astronomi della scuola d'Alessandria (*Μεγάλη Συνοψις*, *gran composizione*). Gli Arabi danno pure a quest'opera di Tolomeo il titolo di *sountakrys*.

L'Almagesto è stato, dalla sua comparsa fino ad un'epoca a noi molto vicina, l'oggetto di un gran numero di commentarii: è questo il destino comune di tutte le produzioni che aprono un campo novello alle investigazioni della scienza ed ai progressi dello spirito umano. I più antichi e i più notabili di questi commentarii furono quelli di Teone e di Pappo, matematici celebri che onoravano nel secolo IV la scuola d'Alessandria. La parte del lavoro di Teone, sfuggita alle vicissitudini dei tempi, si ferma al decimo libro dell'Almagesto; il resto e senza dubbio perduto per sempre, egualmente che i commentarii di Pappo, del quale non possediamo che pochi frammenti relativi al quinto libro dell'opera di Tolomeo. Dobbiamo esternare con tutti i matematici moderni, che si sono occu-

pati della storia letteraria della scienza, il rinascimento che questi avanzi preziosi delle cognizioni astronomiche dell'antichità non siano mai stati tradotti; poichè è impossibile che non contengano delle vedute interessanti sull'astronomia e sulla geometria.

Verso l'anno 212 dell'egira, o l'anno 827 dell'era cristiana, cioè nell'epoca in cui un gran movimento di civilizzazione si sviluppò nella nazione araba, ed in cui questo popolo diede asilo alle scienze sì crudelmente proscritte in Alessandria dai soldati di Omar, l'illustre califfo El-mamoun o Almamonn fece eseguire a Bagdad una traduzione araba dell'Almagesto. Si riferisce che questo principe, vincitore dell'imperatore Michele II, gl' impose come una condizione della pace, che acconsentì di fare con lui, il dono di una collezione dei migliori libri della Grecia. È a questo tributo, che onora la memoria di El-mamoun, ed attesta il suo amore per le scienze, che gli Arabi furono debitori dell'opera di Tolomeo, alla quale diedero allora il nome di *Tahryr al-megesty*, dal quale noi abbiamo formato quello di *Almagesto*. Il musulmano El-Hassan Ben-Yousef, ed il cristiano Sergio ne furono, si dice, i traduttori.

Numerose copie dell'Almagesto circolarono fino da quel tempo tra gli Arabi, e popolarizzarono presso quella gran nazione le cognizioni astronomiche, che avevano illustrato la scuola d'Alessandria. Fra tutti i dotti arabi, si citano Thabet-ben-Qorrah, e Nassir-éd-dyn, i commentarii dei quali contribuirono maggiormente a spiegare le diverse ipotesi, e a facilitarne lo studio.

Verso l'anno 1230, epoca in cui il rinascimento delle scienze gettò alcuni raggi di luce in mezzo alla tenebre che avvolgevano l'Europa occidentale, l'Imperatore Federigo II, che proteggeva l'astronomia, ed egli stesso coltivava questa scienza, fece tradurre l'Almagesto sulla versione araba. Alquanto dopo la metà del secolo precedente, una traduzione di quest'opera era stata intrapresa da Gerardo di Cremona.

La prima edizione latina dell'Almagesto fu fatta a Venezia nel 1515 col seguente titolo: *Almagestum Claudii Ptolemaei Pheludiensis Alexandrini, astronomorum principis, opus ingens ac nobile, omnes coelorum motus continens. Felicibus astris eat in lucem ductu Petri Liechtenstein Coloniensis Germani, anno virginis partus, 1515, die decima jan. Venetiis ex officina ejusdem litteraria cum privilegio*. Tale edizione, in caratteri gotici, ha conservato molte parole arabe, termini tecnici di cui il traduttore ignorava certamente gli equivalenti latini. Ipparco vi è dappertutto nominato *Abrachis*. È probabile che la versione di Gerardo di Cremona fosse quella che servisse per questo lavoro, monumento notabile, e divenuto raro, dei primi saggi dall'arte tipografica. Un secolo prima di quest'epoca, Giorgio di Trebisonda, uno dei dotti greci che vennero a cercare un refugio in Italia, poco avanti la caduta dell'impero bizantino, tradusse l'Almagesto dalla sua lingua nativa in latino. La sua opera, restata per lungo tempo manoscritta, fu successivamente stampata a Venezia nel 1525, e a Basilea nel 1541, e 1551. Nel 1538, Walder stampava a Basilea il testo greco dell'Almagesto, con quello dei commentarii di Teone, ma senza traduzione a fronte. Questa edizione, notevole per la nitidezza dei caratteri e per l'esattezza del testo, è considerata come una delle più belle opere che siano uscite dai torchi di quel celebre stampatore.

L'Almagesto contiene una raccolta preziosa ed importante di antiche osservazioni; e sono queste le sole che la scienza astronomica moderna abbia ereditate dall'antichità, sebbene Tolomeo ne abbia quasi sempre dedotto delle conclusioni erronee, che sono state rettifiche dalla scienza moderna, come può vedersi specialmente nelle seguenti opere: Casini (Giacomo), *Eléments d'astronomie*, Parigi 1740 in-4; una memoria di Halley nelle *Transazioni filosofiche* N°. 204,

pag. 913; Lemonnier, *Institutions astronomiques*, Parigi 1746 in-4; Lalande, *Traité d'Astronomie*, Parigi 1792 3 volumi in-4, n.º 344; e Delambre, *Histoire de l'Astronomie ancienne*, Parigi 1817 2 vol. in-4. Noi esamineremo, nell'articolo biografico di questo grand'astronomo, le principali ipotesi fondate su queste antiche tracce della scienza. Vedi **TOLOMEO**.

ALMAMOUN. Vedi **EL-NAMOUN**.

ALMANACCO (*Astron.*). Tavola nella quale sono notati i giorni dell'anno. I grammatici non sono d'accordo sull'etimologia di questa parola. Alcuni la fanno derivare dall'articolo arabo *al* e dalla parola *manakh*, *conto*, perchè appunto mediante gli almanacchi contansi i giorni dell'anno. Scaligero crede che sia composta dello stesso articolo *al* e della greca parola *πάvνος*, *il corso dei mesi*. Golio attribuisce un'altra derivazione a questa parola. È costume, ei dice, presso i popoli dell'Oriente di recare dei doni ai loro sovrani al principio del nuovo anno: i doni degli astronomi consistono nelle *effemeridi* dell'anno che comincia, di quì tali effemeridi hanno preso il nome di *almanha*, che significa *doni del nuovo anno*. Altri in fine con Verstegan la fanno derivare dal sassone. I Germani segnavano il corso delle lune per tutto l'anno sopra un bastone o un pezzo di legno quadrato, che chiamavasi *al monaght*, contrazione di *al-moon-held*, che significa *contenente tutte le lune*. La parola *almenichiacum* si trova usata in questo medesimo senso da S. Agostino nel suo Trattato: *De Civitate Dei*.

Gli almanacchi, nel senso moderno di questa parola, rassomigliano a ciò che i Romani chiamavano *fasti*, e sono pubblicazioni annue che contengono le divisioni civili dell'anno, le feste mobili ed immobili, e l'epoche dei più notabili fenomeni dei corpi celesti, come gli eclissi del sole e della luna, le congiunzioni e le opposizioni dei pianeti ec. ec. Vedi **CALENDARIO**, **EFFEMERIDI**, **ANNO**, **MESI**, **GIORNO**, ec.

L'origine degli almanacchi è tanto antica quanto è antico il bisogno di conoscere l'epoca delle stagioni e la loro durata: così se ne riscontrano i rozzi principj presso i popoli i meno civilizzati. I Peruviani contavano i giorni sopra certe cordicelle annodate dette *quipos*, che servivano loro di calendario. Nei primi tempi della repubblica romana si consacrava ogni anno un chiodo nel muro del tempio di Minerva, e dal numero dei chiodi si calcolavano gli anni decorati. Non si conosce però con precisione l'epoca in cui cominciarono a compiliarsi degli almanacchi propriamente detti: ma che verso i tempi di Tolomeo si componessero ad Alessandria degli almanacchi, si rileva apertamente da un passo di Teone, il commentatore dell'Almagesto, in un manoscritto trovato a Parigi da Delambre, nel quale viene spiegato il modo di compilarli. È impossibile che in alcun tempo gli almanacchi siano stati rari; ma, nella scarsità dei libri giunti fino a noi, l'astronomo Lalande non ha potuto ottenere notizia che di quelli di Salomone Jarchus, pubblicati verso la metà del duodecimo secolo, e del celebre Purbach, pubblicati verso il 1450-61. Gli almanacchi di Regiomontano, i primi che siano stati pubblicati colla stampa, comparvero tra il 1475 e il 1506; e da quell'epoca si potrebbe tracciare una serie non interrotta di simili produzioni, delle quali i limiti di quest'articolo non ci permettono d'indicare gli autori.

Il numero degli almanacchi è andato aumentando a dismisura; e in tali produzioni si sono introdotti articoli e notizie estranee affatto all'oggetto unico e primitivo a cui erano destinate; cosicchè si pubblicano presentemente almanacchi storici, almanacchi geografici, almanacchi botanici, almanacchi militari, ec., a seconda della natura delle notizie che vi s' inseriscono. Gli almanacchi puramente astronomici si sono anch'essi moltiplicati, e chi desiderasse di averne un ragguaglio sufficientemente esteso potrà consultare la *Bibliographie astronomique* di Lalande, Parigi, 1784 in-4, e l'articolo *Ephemeris* del *Mathematical*

Dictionary del dott. Hutton, Londra 1796 a vol. in-4. Noi ci contenteremo di rammentarne alcuni dei principali.

Nel 1679 cominciò a pubblicarsi a Parigi dall'astronomo Picard il celebre almanacco astronomico intitolato: *Connoissance des tems*, che fu successivamente continuato da varj astronomi, e tuttora si pubblica sotto la direzione del *Bureau des longitudes* di Francia. Nel 1767 cominciò a pubblicarsi in Inghilterra, sotto la direzione dell'astronomo Maskelyne, l'altro non meno celebre almanacco intitolato: *Nautical Almanac*, che nel 1834 ha ricevuto notabili variazioni e miglioramenti. Il sig. de Cesaris incominciò nel 1755 la pubblicazione delle *Effemeridi*, che si stampano a Milano. L'illustre Bode presiede per cinquant'anni a Berlino alla compilazione dell'*Astronomisches Jahrbuch* (annuario astronomico), che nel 1830 venne interamente rifuso dal Professore Eneke, e pubblicato col titolo di *Ephemeris*. Da questi almanacchi si traggono i calcoli che servono alla compilazione della parte astronomica di tutti gli altri almanacchi, calendarj, lunarj ec.

ALMERZAMONNAGIED (*Astron.*). Nome della stella che forma la parte più orientale della spalla d'Orione.

ALMICANTARATI, o **ALMUCANTARI** (*Astron.*). Piccoli circoli paralleli all'orizzonte; i quali s'immaginano passare per tutti i gradi del meridiano; e i loro centri sono situati sulla verticale che congiunge lo zenit al nadir. Si chiamano ancora circoli d'altezza, e paralleli d'altezza, perchè servono a indicare l'altezza di un astro sopra l'orizzonte. Quando, per esempio, un astro ha venti gradi d'altezza, tutti i punti che sono a quest'altezza, facendo il giro del cielo parallelamente all'orizzonte, formano l'*almucantoro* dell'astro stesso. Dalla parola greca *κέντρον*, centro, gli Arabi formarono la voce *ol-moganttorât*, che significa *formante la volta*, o *foggio d'oreata*, o *di ponte*, e che per corruzione è stata cangiata nella parola volgare *almicantoro* o *almucantoro* (Costard, *History of Astronomy*, Londra, 1767, pag. 18.). Vedi **SFERA ARMILLARE**.

I passaggi per uno stesso almucantaro di due stelle conosciute possono far conoscere l'ora che è: se tali passaggi si hanno per due almucantari si può ancora trovare l'altezza del polo, e la declinazione delle due stelle. Questo problema è stato sciolto da Federico Cristoforo Mayer nelle Memorie dell'Accademia di Pietroburgo, e da Maupertuis nella sua *Astronomia nautica* impressa a Parigi nel 1743, nella quale si trovano molti altri problemi di tal sorta, che sono però di poco uso nell'Astronomia.

ALMUCANTARI (*Astron.*). Vedi **ALMICANTARATI**.

ALMUCEDIA, o **ALMUREDIN** (*Astron.*). Nome dato dagli Arabi, secondo Casius, alla stella segnata 1 nella costellazione della Vergine. Queste due denominazioni del pari erronee non sono che l'alterazione commessa dai nostri amanuensi delle parole *miqdâm-êl-qittôf* (annunzio della vendemmia), nome che realmente danno gli Arabi a questa stella.

ALMUDA. Misura portoghese che equivale a litri 16,541, e a fiaschi fiorentini da vino 7,257. Ventisei almude formano una pipa o botte.

ALMUREDIN (*Astron.*). Vedi **ALMUCEDIA**.

***ALORROMETRO** (da *ἄλς*, ἄλς mare, *μετρον* scorrere, e *μετρον* misuro). Così viene chiamato da Kircher uno strumento atto a misurare il retrocedimento del mare a seconda della posizione della luna rapporto al sole.

ALPHERAZ (*Astron.*). Vedi **ALFERAZ**.

ALPHETA (*Astron.*). Vedi **ALFETA**.

***ALQUIERE**. È una misura di grani in Portogallo; e sessanta alquieri fanno un moyo o moggio di quel paese. Un alquiere equivale a litri 13,3333, e a staja toscane 0,5473.

ALRAMECH, o **ARAMECH** (*Astron.*). Questo nome, corrotto dalla parola di-

ramdh (il lanciere), è stato dato dagli Arabi alla bella stella più comunemente conosciuta sotto il nome di Arturo nella costellazione di Boote.

ALRUCCABAH (*Astron.*), e più esattamente *al-rekabeh* (il carro). È questo uno dei nomi arabi della stella polare, secondo gli astronomi; ma gli Arabi non hanno dato questo nome, che è tratto dalla lingua caldea, che alla costellazione dell'Orsa minore.

ALSOUFY, astronomo arabo nato a Rey il 14 di moharrum l'anno 291 dell'egira (7 Dicembre 903 di G. C.). Si applicò di buon'ora allo studio delle scienze, e meritò per i suoi progressi il favore di Adhad-Eddaulah, principe buide, che l'ammise fra i suoi intimi. Ha composto una *Tavola astronomica*, un *Catalogo delle stelle fisse*, e un *Trattato sulla proiezione dei raggi*, celebratissimo in Oriente. Nella prefazione al suo Catalogo delle stelle fisse, Alsonfy dice esservi due maniere di conoscere il cielo stellato, quella degli Arabi, e quella degli astronomi. Egli fa l'esposizione de' due metodi, descrive quindi le costellazioni in uso fra gli astronomi arabi, e ne dà due figure, una sulla sfera, l'altra nel cielo. Tali costellazioni sono quelle di Tolomeo, senza nessuna differenza. L'autore in seguito descrive le costellazioni conosciute anticamente dagli Arabi, e delle quali si conserva fra essi la memoria in un gran numero di versi. Hyde ha pubblicato parecchi frammenti di questo Catalogo nel commento sopra le tavole astronomiche di Oulough-Bey, pubblicato ad Oxford nel 1665, in-4. Alsoufy morì il giorno 13 di moharrum 376 dell'egira (25 Maggio 986 di G. C.).

ALTAIR, **ATAIR**, o **ALCAIR** (*Astron.*). Nomi diversamente corrotti dagli astronomi enropei del nome *al-tayr* (l'uccello), e coi quali s'indica la bella costellazione dell'Aquila. Questo nome si dà pure alla costellazione del Cigno.

ALTALENO. È un'antica macchina militare formata di una grossa trave confitta in terra, in cima alla quale è posta in bilico per il traverso un'altra trave più lunga, impernata in un dato punto della sua lunghezza, talché quando una delle sue estremità si alza, l'altra si abbassa. In generale in tutte le macchine dicesi *altalena* quel pezzo in simil guisa impernato, che cangia un moto di va e viene in moto circolare. L'altaleno è una leva di primo genere, nella quale cioè il punto d'appoggia trovasi tra la potenza e la resistenza.

ALTARE (*Astron.*). Costellazione meridionale chiamata ancora: *Vesta*, *Ara*, *Acerra*, *Pharus*, *Ara centauri*, *Ara thymiamatis*, *Thuribulum*, *Thymeles*, *Altare*, *Sacrarium*, *Templum*, *Focus*, *Lar*, *Ignitabulum*, *Batillus*, *Puteus*, *Prunarum conceptaculum*. Gli Dei, dicono i poeti, essendo in guerra coi Titani fecero fare da Vulcano un altare, sul quale si legarono con mutuo giuramento. Quest'altare fu posto tra le costellazioni. La stella principale di questa costellazione è di terza grandezza.

ALTERNAZIONE (*Alg.*). Cangiamento d'ordine o di disposizione di più oggetti gli uni rapporto agli altri (*Vedi* PERMUTAZIONE).

ALTERNO (*Geom.*). Quando due rette parallele AB e CD (*Tav. X, fig. 8*) (*Vedi* NAZIONI PARALLELE. 36) sono tagliate da una trasversale qualunque EH, gli angoli formati da queste linee si chiamano *angoli alterni*, quando si prendono in senso contrario due a due, sia al di dentro, sia al di fuori delle parallele. Così i due angoli AFG, FGD sono angoli *alterni* al di dentro, ossia angoli *alterni interni*, come lo sono pure i due angoli BFG, FGC; e i due angoli AFE, DGH sono due angoli *alterni* al di fuori, ossia due angoli *alterni esterni*, e sono egualmente due angoli *alterni esterni* gli angoli EFB, CGH (*Vedi* ANGOLI, e PARALLELE).

In una proporzione geometrica qualunque

$$A : B :: C : D,$$

cangiando di posto i due termini medj B e C, si ottiene un'altra proporzione

$$A : C :: B : D,$$

la quale chiamasi proporzione *alterna* rapporto alla prima (*Vedi* PROPORZIONE). Negli antichi trattati questo cangiamento di posto dei termini medj viene espresso con la parola *alternando*.

ALTEZZA (*Geom.*). *Altezza* di un oggetto dicesi ordinariamente l'elevazione del medesimo al di sopra della superficie della terra. La misura delle altezze tanto accessibili che inaccessibili è l'oggetto dell'*Altimetria*. *Vedi* ALTIMETRIA.

Si usa ancora questa parola per indicare la distanza di un punto o di una linea da una linea o da un piano. Così dicesi *altezza* di un triangolo la perpendicolare abbassata dal suo vertice sulla sua base, o più generalmente dal vertice di uno de' suoi angoli sul lato opposto a quest'angolo. L'*altezza* di un parallelogrammo è la perpendicolare abbassata da un punto qualunque di uno de' suoi lati sul lato opposto.

ALTEZZA (*Astron.*). Si dice *altezza* o elevazione di un astro l'arco del circolo verticale compreso tra l'astro e l'orizzonte: quindi in questo caso non intendesi per altezza una lunghezza, ma una distanza angolare. Così, essendo l'osservatore in O (*Tav. XII, fig. 3*), l'altezza dell'astro S relativamente a lui sarà l'arco SR, ossia l'angolo SOH formato dalla visuale OS e dalla linea orizzontale OR. Siccome però è molto più facile e meno soggetto ad errore il determinare una linea verticale, che il condurne una orizzontale, perciò gli astronomi, invece di osservare l'altezza di un astro, misurano la sua distanza ZOS dallo zenit, dalla quale, prendendone il complemento, ottengono facilmente l'altezza dell'astro sopra l'orizzonte. Ecco il modo di trovare la distanza di un astro dallo zenit.

Sia in O (*Tav. XII, fig. 5*) uno spettatore che voglia determinare l'altezza della stella S. Esso disporrà uno dei lati di un quarto di circolo nella direzione della stella S; allora il filo a piombo, che è sospeso liberamente al centro O dell'istrumento, determinerà sul lembo graduato un arco DM o un angolo DOM, che sarà eguale alla distanza della stella dallo zenit. Infatti il lato OD del quadrante non è che il prolungamento del raggio visuale che fissa la direzione della stella, mentre il filo a piombo OM è il prolungamento della linea verticale OZ; quindi l'angolo DOM, come opposto al vertice, sarà eguale all'angolo ZOS, ossia alla distanza della stella dallo zenit. Ciò posto, l'angolo MON, complemento di DOM, sarà eguale alla cercata altezza della stella al di sopra dell'orizzonte. Questo basta per comprendere come possa trovarsi l'altezza degli astri mediante l'osservazione. In oggi però la maravigliosa perfezione, colla quale si dividono le circonferenze degli istrumenti anco di piccoli diametri, ha fatto andare quasi affatto in disuso i quarti di circolo, che d'altronde per le loro grandi dimensioni erano assai incomodi a maneggiarsi (*Vedi* QUARTO DI CIRCOLO, TRIPOLO, e CIRCOLO RIPARTITORE).

Le altezze si distinguono in *apparenti*, e in *vere*. L'altezza apparente è quella che si osserva con gli istrumenti, e che è affetta dagli errori prodotti dalla *refrazione* che innalza l'astro verso lo zenit, e dalla *parallasse* che l'abbassa verso l'orizzonte. L'altezza vera è quella che si ottiene dal calcolo, ed è spogliata dagli effetti della refrazione e della parallasse.

L'*altezza meridiana* che ha luogo quando l'astro passa pel meridiano, ossia nell'istante della sua culminazione, è la più grande di tutte, ed è misurata dall'arco di meridiano compreso tra l'astro e l'orizzonte. La sua determinazione è essenziale in un numero grande di questioni astronomiche, e principalmente per trovare la *declinazione* di un astro (*Vedi* DECLINAZIONE). Una volta l'altezza meridiana osservavasi per mezzo di uno gnomone, in oggi però si fa uso di un *quadrante murale*, o dello *strumento dei passaggi*. Si vedano queste parole nel Dizionario.

L'*altezza dell'equatore* è la più piccola delle sue due distanze dall'orizzonte

misurata sul meridiano. Essa è il complemento dell'altezza del polo, e serve a trovare la declinazione di un astro conoscendone l'altezza meridiana. L'altezza dell'equatore si può trovare direttamente, osservando la massima e la minima altezza meridiana del sole nell'inverno e nell'estate. I primi Caldei che osservarono in Babilonia avevano l'equatore alzato 54 gradi; e se il sole, invece di descrivere l'eclittica, avesse percorso nel suo moto annuo l'equatore, tutti i giorni sarebbe stato alzato a mezzodì di 54 gradi. Ma i Babilonesi si avvidero che il sole si alzava nell'estate di 24 gradi al di sopra dell'equatore, e nell'inverno al contrario si abbassava al di sotto di 24 gradi; cosicchè l'altezza meridiana del sole giungeva nell'estate fino a 78°, mentre nell'inverno si riduceva a soli 30°; dal che si deduceva evidentemente che l'eclittica era un circolo inclinato di 24° sull'equatore. Questo circolo doveva inoltre tagliare l'equatore in due punti diametralmente opposti, poichè due volte l'anno, nella primavera e nell'autunno, osservavasi l'altezza del sole a mezzodì eguale all'altezza dell'equatore, cioè di 54 gradi; quindi in quei due giorni soltanto il sole si trovava sull'equatore, mentre tre mesi innanzi, nei giorni dei due solstizj d'inverno e d'estate, ne era lontano di 24°. Il mezzo tra 30° e 78°, cioè 54°, era dunque l'altezza dell'equatore a Babilonia.

L'altezza del polo è eguale alla latitudine terrestre del luogo, ed il problema tanto importante per l'astronomia e la geografia di trovare la latitudine di un luogo si riduce a trovare l'altezza del polo al di sopra dell'orizzonte di questo luogo (*Vedi LATITUDINE*).

Se la stella polare fosse situata precisamente al polo basterebbe misurare la sua altezza per avere immediatamente la latitudine; siccome però essa ne è distante di circa due gradi, così non può trovarsi che per mezzo delle sue altezze meridiane il centro del piccolo circolo che essa descrive in ventiquattr'ore intorno al polo, ossia il polo medesimo. Infatti passando questa stella due volte pel meridiano nel corso di una rivoluzione diurna, se noi indichiamo con h la sua più grande altezza meridiana, e per h' la sua più piccola, $h-h'$ sarà il diametro del

piccolo circolo descritto da questa stella, e per conseguenza $h' + \frac{h-h'}{2}$, ossia

$\frac{h+h'}{2}$, sarà l'altezza del centro ossia del polo. Deve intendersi però che le al-

tezze di cui si prende in tal modo la semisomma, ossia il medio, debbono esser prima corrette e spogliate degli effetti della refrazione.

Tutte le stelle la di cui distanza dal polo è minore dell'altezza del polo, cioè quelle che non tramontano mai, e descrivono tutto il loro circolo diurno al di sopra dell'orizzonte, possono egualmente servire per ottenere l'altezza del polo, osservando il loro doppio passaggio pel meridiano: questo metodo è il migliore di tutti quelli che s'impiegano nel problema delle latitudini; ma richiedendo esso lunghe notti e serene, così gli astronomi hanno immaginato altri metodi nella ricerca delle latitudini, i quali verranno indicati all'articolo LATITUDINE.

Le altezze degli astri osservate fuori del meridiano servono ancora a trovare l'ora che è nel momento dell'osservazione. Osservata l'altezza del sole o di un altro astro al di sopra dell'orizzonte, la determinazione dell'ora in un dato momento dipende dal conoscere l'angolo orario che fa il sole o l'altro astro in quel momento. Gli antichi astronomi non avevano altro mezzo per trovar l'ora. Sia dunque (*Tav. XII, fig. 4*) Z lo zenit di un osservatore, P il polo, EQ l'equatore, OR l'orizzonte, ed S il sole, e siasi osservata l'altezza SM di quest'astro al di sopra dell'orizzonte. L'angolo orario EPD potrà facilmente tro-

varsi risolvendo il triangolo sferico ZSP, nel quale si conoscono tutti e tre, i lati, cioè il lato ZS, che è il complemento dell'altezza osservata del sole, il lato PZ, che è il complemento della latitudine EZ del luogo, e il lato PS, che è la distanza del sole dal polo boreale, cioè la somma di 90° e della declinazione del sole, se questa è antrale, o la differenza tra 90° e la declinazione, se questa è boreale. Conosciuto per mezzo della trigonometria sferica l'angolo SPZ o EPD, si convertirà in tempo a ragione di 15° per ora; e il risultato che si otterrà sarà esattamente l'ora dell'osservazione, se trattasi di un'ora dopo mezzodì: se poi si trattasse di un'ora antimeridiana, l'angolo orario darebbe solamente ciò che manca per arrivare a mezzogiorno. In questo caso, per avere immediatamente l'ora che è, si può prendere il supplemento dell'angolo P a 180° , che convertito in tempo darà l'ora del mattino, cioè l'ora contata dopo la mezzanotte.

Se l'altezza osservata sia quella d'una stella, si risolverà parimente il triangolo sferico PZS, ma l'angolo P non darà che la distanza della stella dal meridiano. Per dedurne l'ora dell'osservazione si calcolerà l'ascensione retta della stella e quella del sole, che si toglierà da quella della stella: trovata una tal differenza le si aggiungerà o le si toglierà l'angolo P, ottenuto dalla risoluzione del triangolo sferico PZS, secondochè la stella sarà all'occidente o all'oriente del meridiano. La somma o la differenza ridotta in tempo a ragione di 15° per ora darà l'ora dell'osservazione a partirsi dal mezzodì fino alle 24 ore; avvertendo però che se a motivo delle indicate sottrazioni si giungesse ad un risultato negativo, questo, ridotto in tempo, indicherebbe quanto manca per arrivare al mezzodì. Alcuni esempi chiariranno quanto abbiamo detto.

1.^o Esempio. Siasi trovato l'angolo orario P di una stella, che è all'oriente del meridiano, $= 25^\circ 26'$, l'ascensione retta del sole $= 176^\circ 47'$, e quella della stella $= 66^\circ 30'$; la differenza delle due ascensioni rette sarà $- 110^\circ 17'$, dalla quale sottratto l'angolo orario $25^\circ 26'$, si avrà per risultato $- 135^\circ 43'$, che ridotto in tempo darà 9 ore, 2 minuti, e 52 secondi, ed essendo negativo, indicherà quanto manca per arrivare a mezzodì.

2.^o Esempio. Sia la stella all'occidente del meridiano, e il suo angolo orario P $= 26^\circ 32'$, l'ascensione retta del sole $= 117^\circ 48'$, e quella della stella $= 103^\circ 22'$. La differenza tra le due ascensioni è $- 14^\circ 26'$, e sommata con l'angolo orario dà $12^\circ 6'$, risultato che convertito in tempo, ed essendo positivo, esprime che sono 48 minuti e 24 secondi dopo mezzogiorno.

Invece di trovare l'ora per mezzo dell'altezza può trovarsi l'altezza per un'ora data. In questo caso non occorre che risolvere il medesimo triangolo sferico PZS, nel quale si conoscono i due lati PZ e PS, e l'angolo orario da essi compreso, e trovare il lato opposto ZS, complemento dell'altezza dell'astro. Questo problema inverso è di un uso frequente in astronomia per il calcolo degli eclissi, per la costruzione de' quadranti solari, e per la costruzione delle tavole di refrazione.

ALTEZZE CORRISPONDENTI. Si dà questo nome a due altezze eguali di un medesimo astro, osservate l'una avanti il passaggio dell'astro pel meridiano, e l'altra dopo questo passaggio. Queste due altezze servono a determinare l'istante preciso del passaggio dell'astro pel meridiano, e quindi a determinare le differenze dell'ascensione retta dei varj astri.

Per l'effetto del moto diurno apparente, gli astri sembrano descrivere dei cerchi paralleli all'equatore, dei quali le due parti che rimangono a destra e a sinistra sono perfettamente simili; così, per esempio, un'ora prima del passaggio pel meridiano, ed un'ora dopo, gli astri hanno la stessa altezza al di sopra dell'orizzonte in un senso differente. Se dunque si è osservato, per mezzo di un orologio, il momento in cui l'astro aveva un'altezza qualunque prima del suo

passaggio pel meridiano, e quindi il momento in cui si trova ad avere la medesima altezza discendendo verso il tramonto, la metà della somma dei tempi delle osservazioni sarà il tempo che segnava l'orologio nel momento del passaggio pel meridiano. Così se alle ore $10^h 38' 26''$ da sera una data stella aveva una certa altezza al di sopra dell'orizzonte prima del suo passaggio pel meridiano, ed alle ore $3^h 51' 48''$ da mattina era giunta alla medesima altezza dopo il suo passaggio pel meridiano, sommando queste due ore, e prendendo la metà della somma, si avrà l'ora della culminazione della stella. Si deve però avvertire che nell'eseguire questa somma invece di scrivere $3^h 51' 48''$ si deve porre $15^h 51' 48''$, poichè per prendere il medio dei due tempi dobbiamo considerare che le ore siano segnate di seguito, mentre ordinariamente gli orologi dopo aver battuto le ore 12 ricominciano a battere 1, 2, 3 ec. ore. In tal modo si avrà una somma di $26^h 30' 14''$, la cui metà $13^h 15' 7''$, ovvero, per l'avvertenza fatta, $1^h 15' 7''$ sarà l'ora precisa del passaggio della stella pel meridiano.

Si fa uso di questo metodo per verificare il moto degli orologi, e conoscere di quanto avanzino o ritardino, essendo stata previamente calcolata l'ora del passaggio.

Questo metodo suppone che l'astro descriva giornalmente un solo e medesimo parallelo all'equatore, il che quanto è sensibilmente vero per le stelle fisse è altrettanto inesatto rapporto al sole, il quale, percorrendo tutti i giorni un arco di circa un grado sull'eclittica, va continuamente allontanandosi o accostandosi all'equatore, e la quantità di cui si accosta o si discosta arriva verso il tempo degli equinozi fino ad un minuto di grado per ora. Ecco come possa farsene il calcolo.

Siasi osservata l'altezza del sole, ovvero la di lui distanza ZA (Tav. XII, fig. 7) dallo zenit, ad una data ora della mattina: se la sua distanza polare non cangiasse, dovrebbe aversi la sera, quando fosse giunto ad una distanza dallo zenit $ZB=ZA$, un triangolo sferico ZPB eguale perfettamente all'altro ZPA , e per conseguenza sarebbero eguali gli angoli orari ZPA , ZPB , ed il meridiano PZM avrebbe diviso in due parti eguali l'angolo APB , che misura l'intervallo di tempo fra le due osservazioni. Ma se il sole si è avvicinato al polo, e da B si è trasferito in B' , sarà diminuita la sua distanza dallo zenit, e quindi accresciuta la sua altezza; bisognerà dunque, per avere una distanza eguale a quella della mattina, aspettare che il sole abbia continuato a discendere, il che darà un angolo orario ZPb maggiore di ZPB o di ZPA , e la differenza de' due angoli orari sarà BPb : prendendo la semisomma dei due tempi indicati dal cronometro si ha il tempo in cui il sole si trovava nel mezzo dell'angolo APb ; ma la metà di quest'angolo è $= \frac{1}{2}(APB+BPb) = \frac{1}{2}APB + \frac{1}{2}BPb$, dunque il mezzodì che se ne

concludesse eccederebbe il vero di $\frac{1}{30} BPb$, riducendo a tempo la graduazione dell'angolo $\frac{1}{2}BPb$. Si tratta ora di determinare quest'angolo, o la correzione di tempo $-\frac{1}{30} BPb$.

I due triangoli PZb e PZA , o il suo eguale PZB , hanno due lati rispettivamente eguali, cioè PZ comune, ed il lato $Zb=ZB$; ma differiscono in questo, che essendo, per l'aumentata declinazione del sole, diminuita la distanza polare, il lato Pb è minore del lato PB , e conseguentemente l'angolo ZPb maggiore di ZPB . Ciò posto, chiamato P l'angolo orario ZPB , H l'altezza del polo al di sopra dell'orizzonte, D la declinazione del sole nel tempo in cui trovavasi in A , ed N la sua distanza dallo zenit, che si suppone eguale in B ed in b ; e riflettendo che

$PZ = 90^\circ - H$, e $PB = 90^\circ - D$, si avrà dalla trigonometria sferica la seguente relazione:

$$\cos N = \cos P \sin PZ \sin PB + \cos PZ \cos PB,$$

ossia

$$\cos N = \cos P \sin (90^\circ - H) \sin (90^\circ - D) + \cos (90^\circ - H) \cos (90^\circ - D),$$

la quale si riduce alla seguente

$$\cos N = \cos P \cos H \cos D + \sin H \sin D. \dots\dots (a)$$

Se ora in questa relazione si fa variare la declinazione D di quanto è variata nell'intervallo fra le due osservazioni, restando ferme le quantità N ed H , che non debbono cangiare, la prima per condizione, e la seconda per essere le osservazioni fatte nel medesimo luogo, la sola quantità P risentirà l'effetto della variazione di D . E poichè la variazione di D , e la corrispondente di P sono piccole, e per conseguenza trascurabili le loro potenze superiori alla prima, perciò differenziando la relazione (a) otterremo

$$e = -dP \sin P \cos H \cos D - dD \cos P \cos H \sin D + dD \cos D \sin H,$$

ossia

$$dP = \frac{dD \cos D \sin H - dD \cos P \cos H \sin D}{\sin P \cos H \cos D},$$

dalla quale si ottiene, dopo le opportune riduzioni,

$$dP = \frac{dD}{\sin P} (\tan H - \cos P \tan D);$$

ed in fine riducendo in tempo la graduazione di dP si avrà la correzione cercata

$$= -\frac{dD}{30 \sin P} (\tan H - \cos P \tan D).$$

Nelle applicazioni pratiche di questa formula si deve avvertire che in essa abbiamo supposto che la declinazione fosse presa dalla parte del polo elevato. Nel caso che venisse presa dalla parte del polo che rimane sotto l'orizzonte, $\tan D$ diverrebbe negativa, ed il termine in cui si trova questa funzione cangiando segno diventerebbe positivo; perciò in quanto a noi che abbiamo elevato il polo artico dovrà farsi uso della formula nel modo in cui si trova esposta di sopra, quando la declinazione sarà boreale, cioè dall'equinozio di primavera fino all'equinozio d'autunno; mentre si dovrà far positivo il termine $-\cos P \tan D$, quando la declinazione sarà australe, cioè dall'equinozio d'autunno a quello di primavera.

È ancora da avvertirsi che la correzione, la quale nell'ipotesi che la distanza dal polo elevato andasse diminuendo abbiamo trovata sottrattiva, sarebbe trovata additiva nel caso opposto dell'avvicinamento del sole al polo depresso, come potrebbe verificarsi rifacendo i calcoli di sopra eseguiti: perciò una tal correzione dovrà da noi che siamo nell'emisfero boreale togliersi nel tempo che il sole percorrerà i segni ascendenti, cioè dal solstizio d'inverno al solstizio di estate, mentre dovrà aggiungersi nel tempo che quest'astro percorrerà i segni discendenti, cioè dal solstizio di estate a quello d'inverno.

Esempio. Il primo giorno del mese di Marzo 1764 furono osservate a Parigi le altezze corrispondenti del sole alle ore 9 della mattina e alle 3 della sera: si doman-

da la correzione da farsi al mezzogiorno che da queste osservazioni si dedurrebbe. La declinazione del sole era australe e di $7^{\circ} 17'$, e la sua diminuzione in un giorno di $0^{\circ} 22' 54''$, cosicchè il cangiamento di declinazione nelle 6 ore, intervallo delle due osservazioni, è di $5' 43''.5$. In tal modo avremo $dD = 5' 43''.5 = 343''.5$; P sarà eguale al semintervallo del tempo decorso tra le due osservazioni ridotto in gradi, cioè $\text{sen } P = \text{sen } 45^{\circ}$; l'altezza H del polo è per l'osservatorio di Parigi $48^{\circ} 50' 13''$, onde abbiamo $\text{tang } H = \text{tang } 48^{\circ} 50' 13''$; ed in fine la declinazione australe $D = 7^{\circ} 17'$. Ecco il calcolo

$$\begin{array}{rcl}
 \log \text{ tang } D & = & 9,1065557 \\
 + \log \cos P & = & 9,8494850 \\
 \hline
 \text{somma} & = & 8,9560407 = \log 0,0903734 \\
 \log \text{ tang } H & = & 10,0583418 = \log 1,1437780 \\
 \text{somma} & & = 1,2341514 \\
 \log 1,2341514 & = & 0,0913684 \\
 - \log \text{ sen } P & = & 9,8494850 \\
 \hline
 \text{differenza} & = & 0,2418834 \\
 + \log dD & = & 2,5359267 \\
 \hline
 \text{somma} & = & 2,7778101 \\
 - \log 30 & = & 1,4771213 \\
 \hline
 \text{differenza} & = & 1,3006888 = \log 19'',9843
 \end{array}$$

Questa correzione di circa $20''$ sarà, nel nostro caso, da togliersi dal mezzogiorno concluso dalle altezze corrispondenti, perchè il sole va diminuendo la sua distanza dal polo elevato per Parigi, come si è dovuto rendere additivo il termine $\text{tang } D \cos P$ della formula, per essere australe la declinazione del sole.

Il metodo qui esposto per la ricerca della correzione da farsi al risultato, che si ottiene dalle altezze corrispondenti, per la sua semplicità e sufficiente esattezza, viene praticato da tutti gli astronomi; non essendo esso però assolutamente rigoroso sono stati immaginati altri metodi, per la cognizione de' quali rimandiamo il lettore al *Trattato di Astronomia* di Delambre; agli *Elementi di Astronomia* di Santini, Padova, 1830 vol. I § 104; alle *Memorie dell'accademia di Pietroburgo* Tom. VIII; a quelle dell'accademia di Parigi dell'anno 1741; ed a quelle dell'accademia di Berlino dell'anno 1747.

ALTIMETRIA (Geom.). (Da *altus* alto, e *metron* misura). Parte della geometria pratica, che ha per oggetto la misura delle altezze accessibili ed inaccessibili.

Si dà il nome di *accessibili* agli oggetti, alla base dei quali possiamo approssimarci per misurarne la distanza dal punto della stazione, da cui si vuol prender l'altezza. Si dà al contrario il nome di *inaccessibili* agli oggetti ai quali non possiamo approssimarci.

Esistono parecchi metodi per misurare l'altezza degli oggetti: gli uni non richiedono che la cognizione dei principi più elementari della geometria; gli altri si fondano su quelli della trigonometria. Noi gli faremo successivamente conoscere per mezzo di esempj.

Gli stromenti di cui comunemente si fa uso in queste operazioni sono le *biffe*, il *grafometro*, il *teodolito*, e il *barometro*. Si vedano nel Dizionario queste diverse parole.

PROBLEMA I. *Misurare l'altezza AI (Tav. XV, fig. 5) di una torre accessibile, non impiegando in questa misura che le semplici biffe.*

Si sceglierà una stazione F adattata, cioè ad un medesimo livello col piede I della torre. (*Vedi AGGIUNTA*), e vi si planterà una biffa CF, avendo cura di collocarla esattamente perpendicolare all'orizzonte, il che si eseguisce facilmente per mezzo di un filo a piombo. Quindi ad una distanza qualunque FG dalla biffa FC si planterà una seconda biffa DG, più piccola della prima, che s'inneggerà nella terra fin tanto che mirando per la sua estremità D, questa estremità, quella della prima biffa C, e la sommità A della torre, si trovino in una stessa linea retta, ossia nello stesso raggio visuale DA. Eseguito ciò, si misureranno con accuratezza le distanze IG ed FG, e le altezze delle biffe CF e DG.

I triangoli simili ABD, CED daranno la proporzione (*Vedi TRIANGOLI*)

$$ED : CE :: BD : AB,$$

dalla quale si trae (*Vedi PROPORZIONI*)

$$AB = \frac{CE \times BD}{ED}.$$

Ora, conoscendo AB, basta aggiungerci BI o DG, altezza della piccola biffa, per avere l'altezza cercata AI. Supponiamo, per esempio, che la distanza misurata IG sia di 80 metri, FG di 10 metri, l'altezza della prima biffa CF di 3 metri, e quella della seconda, DG, di 1^m,275. Si avrà $CE = CF - DG = 3^m - 1^m,275 = 1^m,725$; $ED = FG = 10$; e $BD = IG = 80$. Dunque

$$AB = \frac{1,725 \times 80}{10} = 13^m,8;$$

a quest'ultimo valore di AB aggiungendo $BI = DG = 1^m,275$, si avrà in fine per l'altezza cercata $AI = 15^m,075$.

Si potrebbe ancora fare questa operazione con una sola biffa; ma in tal caso bisogna, dopo aver piantato questa biffa CF, trovare esattamente il punto H, determinato dal raggio visuale AC. I due triangoli simili AIH, CFH danno la proporzione

$$FH : CF :: IH : AI,$$

dalla quale si dedurrà immediatamente

$$AI = \frac{IH \times CF}{FH}.$$

Così sostituendo in questa espressione i valori di IH, CF ed FH, che saranno stati previamente misurati con esattezza, si troverà quello di AI.

Il problema, che consiste nel misurare un'altezza accessibile senza fare uso della trigonometria, può ancora risolversi per mezzo della riflessione dei raggi visuali, effettuata in uno specchio, o per mezzo dell'ombra degli oggetti; ma questi due metodi non somministrano che approssimazioni poco precise, e noi ci contenteremo di dare un'idea dell'ultimo.

PROBLEMA II. Misurare l'altezza AB (Tav. VIII, fig. 5) per mezzo della sua ombra.

Si misuri la lunghezza BC dell'ombra; si planti una biffa DE, e si misuri pure la sua altezza, non meno che la lunghezza EF della sua ombra. Le lunghezze delle ombre stando tra loro come le altezze degli oggetti, a motivo dei triangoli simili ABC, DEF, si avrà la proporzione

$$EF : BC :: DE : AB. \dots \dots (m)$$

donde si dedurrà facilmente il valore di AB.

La determinazione di AB sarà tanto più esatta, quanto le ombre saranno più facili a misurarsi esattamente; di più è importante di misurarle nel medesimo tempo, poichè le loro lunghezze variando ad ogni momento, i rapporti di tali lunghezze non sono realmente eguali ai rapporti delle altezze degli oggetti, che in un medesimo istante. Così, per maggiore esattezza, bisogna cominciare da segnare i punti F e C sul terreno, e misurare quindi le linee BC ed EF.

Nel caso presente, se si fosse trovato $DE = 3$ metri, $BC = 65$ metri, ed $EF = 4^m,533$, sostituendo questi valori nella proporzione (m), si otterrà

$$AB = \frac{65 \times 3}{4,533} = 43^m,018.$$

PROBLEMA III. Misurare un' altezza accessibile BC (Tav. XVI, fig. 1) per mezzo di un grafometro, o di uno strumento proprio a indicare gli angoli.

Avendo scelto una stazione A, e misurato la sua distanza AC dal piede del muro del quale vuol conoscersi l' altezza, vi si collocherà il grafometro, dandogli una posizione verticale; si dirigerà quindi l' alidada in modo da vedere la sommità B nel raggio visuale dei traguardi, o nell' asse AB del canocchiale, se lo strumento ne è armato, e si osserverà sul lembo il numero dei gradi dell' angolo BAC. Ciò fatto, il triangolo rettangolo ABC darà la proporzione (*Vedi TRIANGOLI*)

$$R : \text{tang BAC} :: AC : BC,$$

dalla quale si concluderà

$$BC = \frac{AC \times \text{tang BAC}}{R},$$

indicandosi con R il raggio. Applicandovi i logaritmi, questa espressione diviene

$$\log BC = \log AC + \log \text{tang BAC} - \log R.$$

Supponiamo, per esempio, la distanza $AC = 80$ metri, e l' angolo $BAC = 29^\circ 50'$, allora per la formula precedente avremo

$$\begin{array}{rcl} \log AC, \text{ o } \log 80 & = & 1,9030900 \\ + \log \text{ tang } 29^\circ 50' & = & 9,6967745 \\ \hline & \text{somma} & 11,5998645 \\ - \log R & = & 10,0000000 \\ \hline & \text{differenza} & 1,5998645 = \log BC \end{array}$$

Il logaritmo di BC corrispondendo nelle tavole al numero 39,7983, l' altezza BC sarà dunque di $39^m,7983$. Aggiungendo a BC l' altezza del grafometro, si avrà l' altezza totale del muro.

Noi abbiamo supposto in ciò che precede che il terreno sul quale si è misurata la distanza AC sia ad un medesimo livello col piede del muro; se ciò non avesse luogo, la visuale AC essendo sempre parallela al terreno (Tav. XII, fig. 8), il triangolo ABC non sarà più rettangolo in C. In questo caso, avendo determinato il punto C in modo che CN sia eguale all' altezza AM del grafometro, si misurerà AC o MN, come pure gli angoli BAC e CAM; ma le linee AM e BN essendo parallele, gli angoli alterni interni CAM e ACB sono eguali (*Vedi ANGOLI*); per conseguenza conoscendo due angoli del triangolo ACB si determinerà il terzo angolo ABC, togliendo la somma di questi due angoli da due angoli retti (*Vedi TRIANGOLI*). Ora nel triangolo ABC si ha la proporzione

$$\text{sen ABC} : \text{sen BAC} :: AC : BC,$$

la quale dà per calcolare BC l'espressione

$$BC = \frac{AC \times \sin BAC}{\sin ABC};$$

ossia, applicandovi i logaritmi,

$$\log BC = \log AC + \log \sin BAC - \log \sin ABC.$$

Eseguito il calcolo, basterà aggiungere a BC l'altezza del grafometro per avere l'altezza richiesta BN.

PROBLEMA IV. *Misurare un'altezza inaccessibile* CD (Tav. XVI, fig. 2).

Avendo scelto e misurato una distanza MN ben livellata, si faranno due stazioni, l'una in M e l'altra in N, misurando col grafometro gli angoli BAD, BAC, CAD della prima, e gli angoli ABC, ABD della seconda. Ciò fatto, nel triangolo ACB si calcolerà il lato AC per mezzo della proporzione

$$\sin ACB : \sin ABC :: AB : AC,$$

ed avremo pel valore di questo lato

$$AC = \frac{AB \times \sin ABC}{\sin ACB},$$

essendo l'angolo ACB eguale a due retti meno i due angoli osservati CAB, ABC.

Nel triangolo ADB si calcolerà egualmente il lato AD per mezzo della proporzione

$$\sin ADB : \sin ABD :: AB : AD,$$

la quale dà, pel valore di questo lato, l'espressione

$$AD = \frac{AB \times \sin ABD}{\sin ADB},$$

essendo parimente l'angolo ADB eguale a due retti meno i due angoli osservati BAD, ABD.

Avendo effettuato i calcoli di sopra accennati, si conosceranno i due lati AC, AD del triangolo ACD, egualmente che l'angolo CAD, compreso tra questi lati; non si tratta dunque adesso che di ottenere il terzo lato CD di questo triangolo. A tale effetto si osserverà che conoscendo l'angolo CAD, si avrà la somma degli altri due angoli ACD, e ADC, togliendolo da due angoli retti, e che la differenza di questi medesimi angoli si ottiene dall'appresso relazione che ci vien somministrata dalla trigonometria

$$AC + AD : AC - AD :: \tan \frac{1}{2} S : \tan \frac{1}{2} D,$$

S indicando la somma, e D la differenza degli angoli ACD, ADC. Ora, conoscendo la somma e la differenza di due quantità, si ottiene la maggiore aggiungendo la metà della somma alla metà della differenza, e la minore togliendo dalla metà della somma la metà della differenza. Infatti, siano M ed N due quantità qualunque, $\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}N$ sarà la metà della loro somma, e $\frac{1}{2}M - \frac{1}{2}N$ la metà della loro differenza: di qui si ha evidentemente, sommando la semisomma colla semidifferenza,

$$\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}M - \frac{1}{2}N = M,$$

e togliendo la semidifferenza dalla semisomma,

$$\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}N - \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}N = N.$$

Così nel triangolo ACD si conosceranno i tre angoli, e i due lati AC e AD; e, per avere il terzo lato, si stabilirà la proporzione

$$\text{sen ADC} : \text{sen CAD} :: \text{AC} : \text{CD},$$

donde si pitterrà in fine, per l'altezza cercata, l'espressione

$$\text{CD} = \frac{\text{AC} \times \text{sen CAD}}{\text{sen ADC}}.$$

Sia, per esempio, AB=10 metri, BAD=15° 6', BAC=31° 30', CAD=14° 24', ABC=130° 10', e ABD=148° 58'.

Dal valore degli angoli osservati si concluderà quello degli angoli ACB, ADB, cioè ACB=18° 20', e ADB=15° 56'.

Sostituendo ora questi valori nelle espressioni superiormente trovate per AC e AD, avremo

$$\begin{aligned} \log 10 &= 1,0000000 \\ + \log \text{sen } 130^\circ 10' &= 9,8831908 \\ \hline \text{somma} &= 10,8831908 \\ - \log \text{sen } 18^\circ 20' &= 9,4976824 \\ \hline \text{differenza} &= 1,3855084 = \log 24^m,2945 = \log \text{AC} \\ \log 10 &= 1,0000000 \\ + \log \text{sen } 148^\circ 58' &= 9,7122596 \\ \hline \text{somma} &= 10,7122596 \\ - \log \text{sen } 15^\circ 56' &= 9,4385719 \\ \hline \text{differenza} &= 1,2736877 = \log 18^m,7797 = \log \text{AD} \end{aligned}$$

e conseguentemente si ottiene

$$\text{AC} + \text{AD} = 43^m,0742, \text{ e } \text{AC} - \text{AD} = 5^m,5148.$$

Nel triangolo ACD si ha

$$\frac{1}{2} S = \frac{180^\circ - 14^\circ 24'}{2} = 82^\circ 48',$$

e per conseguenza

$$\text{tang } \frac{1}{2} D = \frac{5,5148 \times \text{tang } 82^\circ 48'}{43,0742};$$

ed applicando i logaritmi si ha

$$\begin{aligned} \log 5,5148 &= 0,7415298 \\ + \log \text{tang } 82^\circ 48' &= 10,8984956 \\ \hline \text{somma} &= 11,6400254 \\ - \log 43,0742 &= 1,6342172 \\ \hline \text{differenza} &= 10,0058082 = \log \text{tang } 45^\circ 22' 59'' = \log \text{tang } \frac{1}{2} D \end{aligned}$$

Conosciuto in tal modo il valore di $\frac{1}{2} D$, per mezzo di questo e di quello di sopra trovato di $\frac{1}{2} S$, si troverà l'angolo ADC=128° 10' 59'', e l'angolo ACD=37° 25' 1''.

Abbiamo dunque

$$\text{CD} = \frac{24,2945 \times \text{sen } 14^\circ 24'}{\text{sen } 128^\circ 10' 59''};$$

ed applicando i logaritmi si otterrà

$$\begin{aligned}\log 24,2945 &= 1,3855084 \\ +\log \operatorname{sen} 14^{\circ} 24' &= 9,356581 \\ \hline \text{somma} &= 10,7811665 \\ -\log \operatorname{sen} 128^{\circ} 10' 59'' &= 9,8954446 \\ \hline \text{differenza} &= 0,8857219 = \log 7,68638 = \log CD.\end{aligned}$$

L'altezza inaccessibile CD è dunque eguale a $7^m,68638$.

Qualora in linea di riprova si volesse trovare in altro modo la stessa altezza CD, si stabilirebbe la proporzione

$$\operatorname{sen} ACD : \operatorname{sen} CAD :: AD : CD,$$

dalla quale si otterrebbe il valore di

$$CD = \frac{AD \times \operatorname{sen} CAD}{\operatorname{sen} ACD},$$

ed applicando i logaritmi si troverebbe

$$\begin{aligned}\log 18,7797 &= 1,2736877 \\ +\log \operatorname{sen} 14^{\circ} 24' &= 9,356581 \\ \hline \text{somma} &= 10,6693458 \\ -\log \operatorname{sen} 37^{\circ} 25' 1'' &= 9,7836254 \\ \hline \text{differenza} &= 0,8857204 = \log 7,68636 = \log CD,\end{aligned}$$

ossia il valore di CD eguale a quello di sopra trovato colla semplice differenza di 2 centomillesimi, differenza che deriva unicamente dalle piccole frazioni che si perdono nel calcolo dei logaritmi.

PROBLEMA V. Misurare l'altezza d'una montagna (Tav. XVII, fig. 7).

Dopo aver misurato la distanza AB delle due stazioni, si prenderà alla stazione A l'angolo CAB, come pure l'angolo d'elevazione CAD; alla stazione B si prenderà l'angolo AEC. Il triangolo CAB dà

$$\operatorname{sen} ACB : \operatorname{sen} ABC :: AB : AC,$$

e per conseguenza

$$AC = \frac{AB \times \operatorname{sen} ABC}{\operatorname{sen} ACB},$$

essendo l'angolo ACB eguale a 180° meno la somma dei due angoli osservati CAB, ABC.

Il triangolo CAD, rettangolo in D, dà

$$CD : AC :: \operatorname{sen} CAD : R;$$

donde si trae

$$CD = \frac{AC \times \operatorname{sen} CAD}{R}.$$

Sostituendo in questo valore di CD quello di AC avuto di sopra, si otterrà

$$CD = \frac{AB \times \operatorname{sen} ABC \times \operatorname{sen} CAD}{R \times \operatorname{sen} ACB},$$

espressione che si può facilmente calcolare coi logaritmi, poichè allora diviene

$$\log CD = \log AB + \log \operatorname{sen} ABC + \log \operatorname{sen} CAD - \log \operatorname{sen} ACB - \log R,$$

e riflettendo che il raggio nelle tavole logaritmiche è eguale all'unità, e quindi $\log R = 0$, avremo in fine

$$\log CD = \log AB + \log \operatorname{sen} ABC + \log \operatorname{sen} CAD - \log \operatorname{sen} ACB.$$

Aggiungendo adesso al valore trovato di CD l'altezza dello strumento, si avrà l'altezza totale CE.

PROBLEMA VI. *Misurare l'altezza di un oggetto inaccessibile MN, da tre stazioni A, B, C, prese sopra una medesima linea retta AC (Tav. XVII, fig. 1).*

Si misureranno i tre angoli d'elevazione MAN, MBN ed MCN, egualmente che le distanze AB e BC; e l'altezza MN sarà data dalla formula

$$MN = \sqrt{\left(\frac{Dd'}{d' \cot^2 a + d \cot^2 c - D \cot^2 b} \right)},$$

nella quale si ha $D = AC$, $d = AB$, $d' = BC$; l'angolo $MAN = a$, l'angolo $MBN = b$, e l'angolo $MCN = c$.

Infatti, essendo i triangoli MAN, MBN, MCN rettangoli in N, avremo dalla trigonometria

$$AN = MN \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a} = MN \cot a$$

$$BN = MN \frac{\cos b}{\operatorname{sen} b} = MN \cot b$$

$$CN = MN \frac{\cos c}{\operatorname{sen} c} = MN \cot c$$

Abbassando adesso da N una perpendicolare NP sopra AC, avremo dalla geometria per il triangolo BNC

$$\overline{CN}^2 = \overline{BN}^2 + d'^2 - 2d' \times BP,$$

e pel triangolo ANB

$$\overline{AN}^2 = \overline{BN}^2 + d^2 + 2d \times BP,$$

equazioni che, dopo la sostituzione dei valori di sopra notati di AN, BN, e CN, divengono

$$\overline{MN}^2 \cot^2 c = \overline{MN}^2 \cot^2 b + d'^2 - 2d' \times BP$$

$$\overline{MN}^2 \cot^2 a = \overline{MN}^2 \cot^2 b + d^2 + 2d \times BP.$$

Moltiplicando ora la prima di queste equazioni per d e la seconda per d' , all'oggetto di eliminare BP avremo

$$\overline{MN}^2 d \cot^2 c = \overline{MN}^2 d \cot^2 b + dd'^2 - 2dd' \times BP,$$

$$\overline{MN}^2 d' \cot^2 a = \overline{MN}^2 d' \cot^2 b + d'^2 d + 2dd' \times BP;$$

sommando adesso queste equazioni e mettendo fuori i fattori comuni, si ha

$$\overline{MN}^2 (d' \cot^2 a + d \cot^2 c) = \overline{MN}^2 \cot^2 b (d + d') + dd' (d + d'),$$

ed essendo $d+d' = D$ otterremo

$$\overline{MN}^2 (d'^2 \cot^2 a + d \cot^2 c) = \overline{MN}^2 D \cot^2 b + d d' D;$$

donde, trasportando ed estraendo la radice,

$$MN = \sqrt{\left(\frac{D d d'}{d'^2 \cot^2 a + d \cot^2 c - D \cot^2 b} \right)}.$$

Se le tre stazioni fossero equidistanti, cioèchè si avesse $d = d'$, l'espressione di MN si cangerebbe nella seguente,

$$MN = \frac{d}{\sqrt{\left(\frac{1}{2} \cot^2 a + \frac{1}{2} \cot^2 c - \cot^2 b \right)}}.$$

E se finalmente le tre stazioni si facessero in un medesimo punto, ossia se non si facesse che una sola osservazione, nel qual caso si avrebbe $d=0$, ed $a=b=c$, si otterrebbe pel valore dell'altezza MN il simbolo d'indeterminazione $\frac{0}{0}$, il quale ci fa conoscere che essendo dato semplicemente l'angolo d'elevazione di un oggetto, non se ne può determinare l'altezza, risultato conforme al principio di geometria che ci insegna che, conoscinti soltanto i tre angoli di un triangolo, la lunghezza assoluta dei lati rimane ignota.

Quando gli oggetti che si misurano si trovano ad una gran distanza, i calcoli hanno bisogno di alcune piccole correzioni (*Vedi COAZIONE*). In pratica, non si considera come errore che quello che dipende dalla differenza tra il livello vero e il livello apparente (*Vedi LIVELLAZIONE*); ma quest'errore è piccola cosa comparativamente a quelli che possono risultare dalla misura degli angoli, quando il grafometro è troppo piccolo o mal diviso. Non possiamo contare sull'esattezza delle operazioni che servendoci di buoni stromenti, e tuttavia, trattandosi di grandi altezze, l'uso del barometro è sovente preferibile.

Misura delle altezze per mezzo del barometro. L'applicazione del barometro alla misura delle altezze si è presentata alla mente dei matematici poco dopo la famosa esperienza del Puy-de-Dôme, eseguita per confermare la scoperta di Torricelli; nondimeno la prima idea precisa di questo metodo è dovuta ad Halley, come può vedersi nelle *Transazioni filosofiche*, n° 181. Da quel tempo è divenuto esso l'oggetto di un gran numero di lavori, dei quali daremo i risultati. Frattanto cominceremo da esporre i principj sui quali è fondato.

Se noi immaginiamo l'atmosfera divisa in strati di eguali altezze, le densità di questi strati formeranno una progressione geometrica decrescente (*Vedi ARIA*); dimanierachè indicando con l'unità l'altezza del primo strato, con 2 quella del secondo, con 3 quella del terzo, ec.; con l'unità la densità dell'aria all'altezza zero, ossia alla superficie della terra, con $\frac{1}{a}$ la densità all'altezza 1, con $\frac{1}{a^2}$

la densità all'altezza 2, ec. ec., e facendo per maggior semplicità $\frac{1}{a} = d$, dove d sarà un numero minore dell'unità, avremo le due serie seguenti:

Altezze 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , ec.

Densità cor. 1 , d^1 , d^2 , d^3 , d^4 , d^5 , d^6 , d^7 , d^8 , ec.

la prima delle quali forma una progressione aritmetica, e la seconda una pro-

gressione geometrica. I termini della prima si possono dunque considerare come i logaritmi dei termini corrispondenti della seconda, in un sistema particolare di logaritmi (*Vedi* LOGARITMI). Noi indicheremo i logaritmi di questo sistema colla caratteristica L .

Sè dunque H ed H' sono due altezze qualunque, ed $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$ le densità atmosferiche corrispondenti a queste altezze, si avrà $H = L \frac{1}{m}$, $H' = L \frac{1}{n}$, e per conseguenza

$$H - H' = L \frac{1}{m} - L \frac{1}{n} = L \frac{n}{m}.$$

Ma le altezze del mercurio nel barometro essendo proporzionali ai pesi delle colonne d'aria che gravitano sopra di esso, e questi pesi essendo proporzionali alle densità degli strati nei quali si trova il barometro, così le altezze del barometro stanno fra loro come le densità. Indicando dunque con h l'altezza del barometro nella densità $\frac{1}{m}$, e con h' la sua altezza nella densità $\frac{1}{n}$, avremo

$$\frac{h}{h'} = \frac{n}{m},$$

e per conseguenza

$$H - H' = L \frac{h}{h'} = Lh - Lh'.$$

La differenza di livello delle altezze H , H' è dunque eguale alla differenza dei logaritmi delle altezze del mercurio; e così, per misurare un'altezza qualunque, basta prendere le altezze del barometro alla sua base e alla sua sommità, e togliere il logaritmo della prima altezza osservata da quello della seconda.

Ma questi logaritmi non sono quelli che si trovano nelle tavole; perciò bisogna ridurveli per potere effettuare i calcoli. Ora, per passare da un sistema qualunque di logaritmi a quello delle tavole ordinarie, bisogna determinare il suo modulo (*Vedi* MODULO), e moltiplicare ciascun logaritmo per questo modulo. Ma nel nostro caso bisogna riflettere che trattandosi di passare da un sistema la di cui base è minore dell'unità ad un altro la di cui base è maggiore dell'unità il modulo è negativo, perciò rappresentandolo con $-\frac{1}{M}$ avremo in generale

$$-\frac{1}{M} LA = \log A, \text{ o } LA = -M \log A,$$

e nel nostro caso

$$H - H' = M (\log h' - \log h),$$

formula nella quale tutto è determinato, eccettuato il fattore costante M .

Ma da questa espressione si deduce

$$M = \frac{H - H'}{\log h' - \log h},$$

il che ci fa conoscere che, per determinare M , bastano due osservazioni fatte ad altezze delle quali si conosce la differenza di livello.

Così essendosi trovata, ad una prima stazione, l'altezza del mercurio eguale a 348 linee di Parigi, e, ad una seconda stazione più elevata della prima di 12 tese e 497 millesimi, essendosi trovata una tale altezza eguale a 347 linee, se n'è concluso

$$M = \frac{10797,408}{\log 348 - \log 347} = 8640000;$$

essendo 10797,408 il numero delle linee contenute in 12 tese e 497 millesimi di tesa.

In tal maniera, essendo le altezze del barometro espresse in linee, la formula

$$H - H' = 8640000 [\log h' - \log h]$$

darà egualmente in linee la differenza delle due altezze H, H' . Ma, osservando che la tesa contiene 864 linee, possiamo ridurre quest'ultima formula alla seguente, che dà immediatamente la tesa di Parigi le differenze di livello domandate

$$H - H' = 10000 [\log h' - \log h].$$

ESEMPIO. Il barometro segnando 28 pollici e 4 linee al piede di una montagna, e 18 pollici e 10 linee alla sua sommità, si ricerca l'altezza di questa montagna, e la differenza del livello della sua base da quello della sua sommità.

Riducendo in linee le altezze barometriche, si ha per queste altezze 340 linee e 226 linee, i di cui logaritmi datici dalle tavole ordinarie sono 2,5314789 e 2,3541084. La differenza 0,1773705 di questi logaritmi, moltiplicata per 10000, dà per prodotto 1773,705. L'altezza della montagna è dunque eguale a 1773 tese e 705 millesimi di tesa.

Sarebbe questo il metodo estremamente semplice che dovrebbe seguirsi se la temperatura fosse dappertutto la stessa; ma siccome essa varia nelle due stazioni in cui il barometro si trova collocato, le dilatazioni del mercurio variano egualmente, e quindi influiscono sensibilmente sulle sue altezze nel tubo. Per correggere l'errore che può esser cagionato da questa influenza, si cerca la temperatura media fra le temperature delle due stazioni, il che si fa prendendo la metà della somma delle altezze del termometro osservate a ciascuna stazione. Se questa

temperatura media è precisamente di $16^{\circ} \frac{3}{4}$ del termometro di Réaumur, che da Deluc vien chiamata *temperatura normale*, non occorre di fare nessuna riduzione; ma se è maggiore o minore, bisogna aggiungere o sottrarre dall'altezza; calcolata secondo il metodo precedente, tante volte $\frac{1}{215}$ di questa medesima

altezza quanti gradi vi sono di più o di meno di $16^{\circ} \frac{3}{4}$. La formula diviene dunque, indicando con t il numero dei gradi di cui la temperatura media differisce dalla temperatura normale, e con x la differenza dei livelli,

$$x = 10000 [\log h' - \log h] \left(1 \pm \frac{t}{215} \right).$$

Si prende il segno + quando la temperatura media è maggiore della temperatura normale, ed il segno - quando è minore.

Trembley ha trovato, mediante una lunga serie di osservazioni, che si avrebbe una maggiore approssimazione al vero, prendendo $11^{\circ} \frac{1}{2}$ per temperatura normale, ed aggiungendo o togliendo $\frac{1}{192}$ dell'altezza, per ogni grado al di sopra o al di sotto di questa temperatura.

Laplace ha trattato questo soggetto nel tomo IV della sua *Meccanica Celeste* con tutta la generalità di cui è suscettibile. Se si esprime con T la temperatura dell'aria in gradi del termometro centigrado, e con H l'altezza del barometro nella stazione inferiore; con t ed h i valori analoghi nella stazione superiore, e finalmente con x la differenza dei livelli, si avrà, secondo questo geometra,

$$x = 18336 \left(1 + \frac{T+t}{1000} \right) \log \left[\frac{H}{h \left(1 + \frac{T-t}{5412} \right)} \right].$$

Questa formula dà il valore di x in metri.

Il coefficiente costante 18336 porta il nome di coefficiente di *Ramond*, per essere stato determinato da questo fisico per mezzo di un grandissimo numero di osservazioni fatte sulle montagne dei Pirenei. Dipende esso dal rapporto tra il peso di un volume determinato di mercurio e quello di un volume eguale d'aria alla temperatura del ghiaccio che si fonde, e all'altezza media del barometro, che è quella del livello del mare, e che è presso a poco di 28 pollici, o di 0^m,76. I sigg. Biot e Arago, mediante una serie di esperienze sulle densità dell'aria e del mercurio, hanno trovato questo medesimo coefficiente eguale a 18332, risultato che si accorda in un modo assai notevole con quello del sig. Ramond.

La formula di Laplace ammette un'altra correzione pel cangiamento del peso, che ha luogo nei punti molto elevati al di sopra del livello del mare; ma questa correzione è poco sensibile. Si veda intorno a ciò la *Mécanique céleste* di Laplace, Parigi 1799-1827, 5 vol. in-4 con varj supplementi; o la seconda edizione dell'*Astronomie physique* di Biot, Parigi 1810, 3 vol. in-8.

Dobbiamo qui notare che le osservazioni barometriche e termometriche debbono esser fatte alle due stazioni nel medesimo momento. Sono dunque necessari due osservatori forniti di stromenti perfettamente simili. Si veda in questo argomento la memoria interessantissima pubblicata dal sig. Ramond nell'anno XIII (1804). Si veda ancora: Deluc, *Recherches sur les modifications de l'atmosphère*; Horseley e Maskelyne, *Transazioni filosofiche*, vol. LXIV; Trembley e Saussure, vol. II; Roy, *Transazioni filosofiche*, per l'anno 1777; Laplace, *Mécanique céleste*, vol. III, pag. 189; *Annales de chimie et de physique*, vol. 8 e 19. Il sig. Prony ha dato, nella *Connaissance des temps* per l'anno 1816 una formula che dispensa dal far uso dei logaritmi. Si trova pure, nell'*Annuaire du bureau des longitudes*, una tavola, dovuta al sig. Oltmanns, di un uso estremamente facile.

Chiuderemo il presente articolo citando le montagne più notabili del globo terrestre, e la loro elevazione in metri sopra il livello del mare.

Dhawaladgiri (la più alta cima dei monti dell'Himalaya in Asia)	Metri 8381
Javahir (altro picco dell' Himalaya)	" 7847
Nevado de Sorata (Perù)	" 7696
Nevado de Illimani (Perù)	" 7315

Serga-Ruenir (uno dei picchi dell'Himalaya)	Metri 6980
Monte S. Patrick (altro picco dell' Himalaya)	" 6946
Monte S. Giorgio (altro picco dell' Himalaya)	" 6903
Chimborazn (Perù)	" 6532
Cayambé (Perù)	" 5954
Antisana (Vulcano del Perù)	" 5833
Chipicani (America)	" 5762
Cotopaxi (Vulcano del Perù)	" 5753
Pichu-Pichu (Perù)	" 5670
Arequipa (Vulcano del Perù)	" 5600
Monte S. Elia (America russa)	" 5513
Elbruz (la più alta cima della catena del Caucaso)	" 5424
Popocatepec (Vulcano del Messico)	" 5400
Picco d' Orizaba (Messico)	" 5295
Montagna d' Inehocain (America)	" 5240
Picco della frontiera della Cina e della Russia	" 5135
Cerro di Potosì (Perù)	" 4888
Munna-Roa (Isole Sandwich)	" 4838
Monte Bianco (Alpi)	" 4810
Sierra Nevada (Messico)	" 4786
Monte Rosa (Alpi)	" 4736
Montagna del Bel Tempo (America)	" 4549
Finsteraarhorn (Alpi)	" 4362
Monte Atlante (Africa)	" 4288
Jung-Frau (Alpi)	" 4180
Monch (Alpi)	" 4182
Casa di Perote (Messico)	" 4088
Gnolia d' Argentièr (Alpi)	" 4081
Schreckhorn (Alpi)	" 4079
Eiger (Alpi)	" 3984
Ophir (Sumatra)	" 3950
Ortler (Alpi)	" 3908
Picco di Teneriffa (Africa)	" 3712
Iseran (Alpi)	" 3709
Monte di Ginevra (Alpi)	" 3592
Mulahasan (Spagna)	" 3555
Montagna d' Ambohimene (Madagascar)	" 3507
Picco di Nethou (Pirenei)	" 3481
Gran S. Bernard (Alpi)	" 3469
Picco di Posets (Pirenei)	" 3438
Mont-Perdu (Pirenei)	" 3410
Il Cilindro (Pirenei)	" 3369
La Maladetta (Pirenei)	" 3355
Vignemale (Pirenei)	" 3354
Monte Cervino (Alpi)	" 3346

Montagna d' Otaiti (Mare del Sud)	Matri	3325
Monte Sabuzzo (Isola Borboue).	"	3313
Etna (Vulcano in Sicilia).	"	3237
S. Gottardo (Alpi).	"	3225
Piccolo S. Bernardo (Alpi).	"	3089
Picco del Mezzodì di Bagaères (Pirenei)	"	2935
Budosh (Transilvania).	"	2924
Picco del Mezzodì di Pau (Pirenei).	"	2910
Monte Libano (Asia).	"	2906
Gran Sasso d'Italia (Appennini).	"	2904
Monte Cenasio (Alpi).	"	2816
Legnone (Italia).	"	2806
Canigou (Pirenei).	"	2781
Monte Viso (Alpi).	"	2740
Picco di Lomnitz (Karpazi).	"	2704
Monte Rotondo (Corsica).	"	2672
Monte d'Oro (Corsica).	"	2652
Il gran Krivan (Karpazi).	"	2540
Sneebaten (Norvegia).	"	2500
Montagna del Picco (Azzore).	"	2412
Monte Velino (Appennini).	"	2393
Monti Azzurri (Giamaica).	"	2218
Piccolo Altai (Siberia).	"	2202
Monte della Sililla (Appennini).	"	2196
Monte Athos (Grecia).	"	2066
Monte Cimone (Appennini).	"	2045
Alpe di Camporagheua (Appennini).	"	2034
Olimpo (Grecia).	"	1988
Mont-d'Or (Francia).	"	1884
Monte Orsajo (Appennini).	"	1881
Cantal (Francia).	"	1857
Il Mezen (Ceyenne).	"	1766
Monte Amiata (Toscana).	"	1752
Sierra d'Estre (Portogallo).	"	1700
Puy-Mary (Francia).	"	1658
Warnside (Yorkshire).	"	1627
Hussoko (Moravia).	"	1624
Schneckoppe (Boemia).	"	1608
Adelat (Svezia).	"	1578
Suefiata-Jokull (Islanda).	"	1559
Vulcano della Solfatara (Guadalupa).	"	1557
Monte dei Giganti (Boemia).	"	1512
Puy-de-Dôme (Francia).	"	1467
Ballon d'Alsazia (Vosgi).	"	1403
Punta Nera (Spitzberg).	"	1372

Ben-Nevis (Scozia)	n	1325
Fichtelberg (Baviera)	n	1212
Vesuvio (Napoli)	n	1198
Monte Parnaso (Spitzberg)	n	1194
Monte Erice o di Trapani (Sicilia)	n	1187
Montagna della Tavola (Capo di Buona Speranza)	n	1163
Brocken (Sassonia)	n	1140
Sierra de Foja (Portogallo)	n	1100
Snowden (Inghilterra)	n	1089
Shehalien (Scozia)	n	1039
Hecla (Vulcano in Islanda)	n	1013

ALZATA. Le oscillazioni di un pendolo fanno **alternativamente alzare ed abbassare** le braccia dell'ancora, per lasciar passare ogni volta un solo dente della ruota di scappamento: gli oriuolai pertanto danno il nome di *arco d'alzata* all'estensione percorsa dall'estremità della leva dell'ancora, che arresta momentaneamente il movimento generale.

ALZATE Y RAMIREZ (GIUSEPPE ANTONIO), distinto astronomo e geografo messicano, illustrò la sua patria nel XVIII secolo, fece un gran numero di osservazioni astronomiche, soprattutto relativamente agli eclissi dei satelliti di Giove. Era un osservatore attivissimo ma sovente impetuoso; così gli viene rimproverato di essere stato poco esatto, e di essersi dedicato a troppi oggetti ad un tempo. Era corrispondente dell'accademia delle scienze di Parigi, ed oltre i suoi lavori astronomici ha composto parecchie opere riguardanti la geografia dell'America.

ALZO. Diceasi così un piccolo paletto mobile che si pone dietro la culatta dei cannoni all'oggetto di puntarli con maggior esattezza e facilità. Scorre questo in una incanalatura, e si fissa ove si vuole per mezzo di una vite di pressione; nella sua cima superiore è praticato un incavo pel verso della lunghezza del cannone che serve di mira. Coll'abbassarlo o coll'alzarlo si viene a diminuire o aumentare la differenza di grossezza dalla culatta all'orlo; ed una volta che l'alzo sia stato definitivamente fissato, mediante la cognizione delle distanze e della portata del cannone, non occorre di dover far in seguito nuovi riscontri. L'invenzione di questo pezzo è stata ritrovata utilissima dagli artiglieri italiani nelle ultime guerre. Per ulteriori notizie si veda il *Dizionario d'Artiglieria* di ARDÈ e CARBONE, Torino, 1835 in-4.

AMBIGENA (Geom.). Curva iperbolica del terz'ordine, di cui uno dei rami infiniti è situato fuori degli asintoti. La curva DEF (Tav. XVIII, fig. 1) è appunto una curva di questo genere: il suo ramo DE è inscritto all'asintoto AB, e l'altro suo ramo EF è circoscritto all'asintoto AC. Newton è il primo che si sia servito della parola ambigena per indicare questa specie particolare d'iperbola. *Vedi* IPERBOLA.

AMBLIGONO (Geom.). Chiamasi triangolo *ambligono* quel triangolo che ha un angolo ottuso. Più comunemente vien chiamato triangolo *ottusiangolo* (*Vedi* NOTIZIONI PRELIMINARI N.º 39).

AMBOTRACIO. È uno strumento d'invenzione moderna per mezzo del quale si scrivono due lettere ad un tempo. In principio fu detto *poligrafo*, ma essendo stato molto perfezionato e ridotto a maggior semplicità fu detto *ambotracio*. Una minuta descrizione di questo strumento si trova nel *Dizionario Tecnologico* pubblicato a Parigi, e di cui si stampa presentemente a Venezia una traduzione arricchita di numerose aggiunte.

AMICABILI (Aritm.). Diconsi numeri *amicabili* due numeri, ognuno dei quali è eguale alla somma delle parti aliquote dell'altro. Tali sono, per esempio, i numeri 220 e 284. *Di. di Mat. Vol. I.*

meri 284 e 220. Le parti aliquote del primo sono: 1, 2, 4, 71, 142; quelle del secondo sono: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, e si ha

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110,$$

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142.$$

Fino al presente non si conoscono che tre coppie di numeri amicabili, cioè:

$$284, \text{ e } \dots\dots\dots 220$$

$$17296, \text{ e } \dots\dots\dots 18416$$

$$9363584, \text{ e } \dots\dots\dots 9437056$$

Essi sono stati pubblicati da Schooten nelle sue *Exercitationes mathematicae*, Lugd. Batav. 1657, lib. V, sect. 9. Questo matematico pare che sia stato il primo a servirsi del termine *amicabile* per indicare questi numeri, quantunque Stifelio, Descartes ed altri gli avessero trattati prima di lui.

AMONTONS (GUGLIELMO), membro dell'accademia delle scienze di Parigi, nacque in questa città il 31 Agosto 1663, e vi morì il dì 11 Ottobre 1705. Essendo ancora giovane fu assalito da una fiera malattia, che lo rese quasi affatto sordo. Una tal circostanza, togliendoli molte distrazioni ed obbligandolo a cercare in sé medesimo le possibili consolazioni, sviluppò in lui la naturale inclinazione che aveva per lo studio della meccanica.

Egli ha reso celebre il suo nome nella meccanica per la scoperta di parecchi processi importanti, e soprattutto per la regola che dette per calcolare l'attrito. Si sa che in qualunque macchina l'attrito è ordinariamente una parte molto considerabile del peso da muoversi: ma questa teoria non era stata spiegata prima di Amontons. Non può calcolarsi *a priori* il peso equivalente all'azione dell'attrito, poichè quest'azione è una resistenza occasionata dalla scabrosità delle superficie che gravitano l'una sull'altra, per cui le prominenze dell'una ingranano nelle ineguaglianze dell'altra. Ora la potenza che agisce non può trascinare il peso, o la superficie che lo sostiene, senza sollevarlo un poco: ma per far ciò si rende necessaria una forza proporzionale al sollevamento; dunque bisognerebbe conoscere la natura delle ineguaglianze delle superficie per calcolare rigorosamente l'attrito. Amontons ricorse all'esperienza per risolvere questo problema, e per stabilirne la teoria in due proposizioni fondamentali. La prima è che la resistenza prodotta dall'attrito è presso a poco il terzo della forza che spinge le superficie l'una contro l'altra; la seconda, che l'attrito non segue, come potrebbe forse supporvi, il rapporto delle superficie, ma solamente quello delle pressioni. Dietro questi principj Amontons dà le regole per calcolare la quantità dell'attrito, e la quantità di potenza necessaria per vincerlo. In questo proposito si possono vedere le *Memorie* dell'accademia delle scienze di Parigi per l'anno 1699.

Si debbono ancora ad Amontons molte curiose esperienze sul barometro, sul termometro, e sull'igrometro, che formano il soggetto dell'opera che pubblicò col seguente titolo: *Remarques, et expériences physiques sur la construction d'une nouvelle clepsydre, sur les baromètres, les thermomètres, et les igromètres*, Parigi, 1695. Altre esperienze sui medesimi soggetti si trovano riputate nelle *Memorie* dell'accademia delle scienze di Parigi per gli anni 1698, 1699, 1702, 1703, 1704 e 1705.

Amontons può dirsi il vero inventore dell'arte *telegrafica* come è usata oggidì, e della quale fece due volte l'esperienza avanti gl'individui della famiglia reale. « Il segreto, dice l'ontenelle, consisteva nel disporre in parecchi posti consecutivi alcune persone, le quali mediante dei canocchiali vedendo certi segni dal posto precedente gli trasmettevano al susseguente, e così di seguito. Questi dif-

«ferenti segni erano altrettante lettere di un alfabeto in cifra, di cui non si sa-
«peva il significato che a Parigi e a Roma. La maggior forza dei canocchiali
«regolava la distanza dei posti, di cui esservene doveva il minor numero che fosse
«possibile; e siccome il secondo posto faceva i segni al terzo, di mano in mano che
«gli vedeva fatti dal primo, la nuova veniva trasmessa da Parigi a Roma
«in un tempo quasi tanto breve, quanto era quello che abbisognava per fare
«i segnali a Parigi». L'invenzione dei telegrafi non poteva essere, né più chia-
ramente spiegata, né l'utilità loro meglio espressa; pure non fu posta in esecu-
zione che molto tempo dopo. Per maggiori particolarità vedasi l'*Histoire de la
telegraphie* di Chappe, Parigi, 1825 a vol. in-8.

AMPLIFICAZIONE (Optica). Questa parola significa in ottica l'aumento del diametro di un oggetto veduto in un telescopio. L'amplificazione di un canoc-
chiale astronomico semplice a due lenti è eguale al numero delle volte che il raggio di sfericità, o la lunghezza del fuoco dell'obbiettivo, contiene il raggio di sfericità dell'oculare. Infatti, sia A (Tav. XVIII, fig. 2) il centro e B l'estre-
mità di un oggetto, il punto A sarà veduto dall'occhio O mediante il rag-
gio AoO, che attraversa le due lenti senza soffrire refrazione, facendo noi adesso
astrazione da tutti gli altri raggi emanati dal punto A, i quali vanno a riunirsi
nel fuoco per le refrazioni dell'obbiettivo e dell'oculare. L'estremità B manda
egualmente un raggio principale Bb al fuoco ab dell'obbiettivo; questo raggio,
proseguendo il suo cammino, prova una refrazione entrando nella seconda lente, ne
prova un'altra in uscendo da questa lente, e si dirige al fuoco O, in modo
che Oe è parallela ad Eb. L'immagine è veduta dunque sotto l'angolo OE=
Ea, o più semplicemente sotto l'angolo O, mentre il suo angolo primitivo è
ADB, o D: l'amplificazione è dunque nel rapporto degli angoli D e O. Ora i
triangoli rettangoli Eba, Dab danno

$$ab = Ea \times \tan E, \quad ab = Da \times \tan D,$$

e da queste eguaglianze si trae

$$\tan E = \frac{ab}{Ea} = \frac{Da}{Ea} \times \tan D.$$

Indicando dunque con R il raggio di sfericità Da dell'obbiettivo, e con r il rag-
gio Ea dell'oculare, avremo

$$\tan E = \frac{R}{r} \times \tan D,$$

ovvero

$$E = \frac{R}{r} \times D,$$

poiché trattandosi di angoli piccoli le tangenti possono essere considerate come
proporzionali agli archi.

L'angolo sotto il quale è veduta l'immagine dell'oggetto è dunque aumentato
nel rapporto dei due raggi di sfericità, e per conseguenza il diametro dell'im-
magine sarà aumentato nello stesso rapporto. L'ingrandimento sarà dunque tanto
maggiore, quanto il raggio di sfericità dell'oculare sarà più corto in paragone di
quello dell'obbiettivo. Così, per esempio, un obbiettivo di 2 metri di fuoco, com-
binato con un oculare di 5 centimetri, ingrandirà il diametro di un oggetto 40
volte, perchè 5 centimetri sono contenuti 40 volte in 2 metri.

I canocchiali astronomici ingrandiscono ordinariamente da 70 a 100 volte; al-
cuni ingrandiscono ancora 300 volte. Non bisogna però dare un senso troppo ri-

goroso a quest' amplificazione, poichè s' ingannerebbe d' assai chi credesse, per esempio, di trovare la luna 100 volte più grande in un canocchiale, che fosse dato per ingrandire gli oggetti 100 volte. Trattasi qui unicamente dell' angolo di visione; ma non è solamente quest' angolo che determina la grandezza che si attribuisce agli oggetti; la distanza alla quale gli supponiamo v' influisce ancora moltissimo (*Vedi OTTICA*).

AMPLITUDINE (*Astron.*). È l'arco dell'orizzonte compreso tra il punto in cui un astro si alza o tramonta, e in veri punti dell'oriente o dell'occidente. L'amplitudine si chiama *ortiva* quando si conta dal punto dell'oriente, per un astro che si alza; e dicesi *occidentale* quando si conta dal punto dell'occidente, per un astro che tramonta.

L'amplitudine tanto ortiva quanto occidentale è sempre *setentrionale* per gli astri che sono tra l'equatore celeste e il polo nord, ed è *meridionale* per quelli che sono tra l'equatore e il polo sud. Così l'amplitudine del sole è settentrionale dall'equinozio di primavera fino a quello d'autunno, ed è meridionale dall'ultimo di questi due punti fino al primo.

Siano: ROAH (*Tav. XVII, fig. 3*) il circolo dell'orizzonte vero, RZPH il meridiano del luogo, Z lo zenit, P il polo, O il punto dell'oriente o dell'occidente, ed A il luogo di un astro che si leva o tramonta: l'arco OA sarà l'amplitudine di quest'astro. Per calcolare un tale arco, fatta astrazione dalla refrazione e dall'altezza dell'occhio sopra il livello del mare, due cause che concorrono a rendere l'amplitudine *apparente* differente dalla *vera*, si considera il triangolo sferico APH rettangolo in H, nel quale si ha PA eguale al complemento della declinazione dell'astro nel momento dato, e PH eguale alla latitudine del luogo: questo triangolo dà (*Vedi TRIGONOMETRIA*) la proporzione

$$\cos PH : R :: \cos PA : \cos AH,$$

dalla quale si trae

$$\cos AH = \frac{R \times \cos PA}{\cos PH}.$$

Ma $AH = OH - OA = 90^\circ - OA$; dunque $\cos AH = \sin OA$. Così, indicando con d la declinazione dell'astro, con l la latitudine del luogo, ed omettendo R , che in tutte le formule si suppone eguale all'unità, avremo

$$\text{seno dell'amplitudine} = \frac{\sin d}{\cos l}.$$

Esempio. Trovare l'amplitudine del sole a una latitudine di $48^\circ 30' 15''$, essendo la sua declinazione di $21^\circ 54'$. Noi abbiamo adesso $d = 21^\circ 54'$, $l = 48^\circ 30' 15''$; operando coi logaritmi, troveremo

$$\begin{aligned} \log \sin d &= 9,5716946 \\ - \log \cos l &= 9,8212289 \end{aligned}$$

$$\log \sin \text{amplitudine} = 9,7504657 = \log \sin 34^\circ 15' 35''.$$

L'amplitudine cercata sarà dunque eguale a $34^\circ 15' 35''$.

Quando si tratta di calcolare l'amplitudine apparente, di cui si ha specialmente bisogno in mare, bisogna immaginare che ROAH sia un circolo parallelo all'orizzonte, e che ne sia distante al di sotto di $37'$, valore della refrazione, compresi l'abbassamento dell'orizzonte cagionato dall'altezza dell'occhio al di sopra del livello del mare; allora il triangolo sferico ZAP, di cui si conoscono i tre lati, cioè ZP complemento dell'altezza del polo o della latitudine, PA com-

plemento della declinazione dell' astro, e ZA eguale a $90^{\circ} 37'$, dà, indicando con S la semisomma dei lati ZA, ZP, PA,

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \angle ZA = \sqrt{\left(\frac{\operatorname{sen} (S-ZP) \operatorname{sen} (S-ZA)}{\operatorname{sen} ZP \operatorname{sen} ZA} \right)}.$$

Ora l'angolo PZA è il complemento dell' angolo di amplitudine OZA, e dell' arco OA; avendolo dunque calcolato per mezzo di questa formula, basta toglierlo da 90° per avere l' amplitudine cercata.

Esempio. Supponendo i medesimi dati dell' esempio precedente, avremo $ZP = 90^{\circ} - 48^{\circ} 30' 15'' = 41^{\circ} 29' 45''$, $PA = 90^{\circ} - 21^{\circ} 54' = 68^{\circ} 6'$, $ZA = 90^{\circ} 37'$. Dalla semisomma $100^{\circ} 6' 22''$ dei tre lati togliendo successivamente ZP, e ZA, otterremo

$$S-ZP = 58^{\circ} 36' 37''.$$

$$S-ZA = 9^{\circ} 29' 22''.$$

Eseguito i calcoli troveremo

$$\begin{array}{rcl} \log \operatorname{sen} 58^{\circ} 36' 37'' & = & 9,9312769 \\ + \log \operatorname{sen} 9^{\circ} 29' 22'' & = & 9,2171308 \\ \hline \text{somma} & = & 19,1484077 \\ \log \operatorname{sen} 41^{\circ} 29' 45'' & = & 9,8212289 \\ + \log \operatorname{sen} 90^{\circ} 37' 0'' & = & 9,9999748 \\ \hline \text{somma} & = & 19,8212037 \end{array}$$

Togliendo adesso la seconda somma dalla prima, e prendendo, per estrarre la radice quadrata, la metà della differenza $19,3272040$, avremo

$$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2} \angle PZA = 9,6636220,$$

e quindi $\frac{1}{2} \angle PZA = 27^{\circ} 26' 42''$. Togliendo il doppio di questo numero da 90° avremo in fine $35^{\circ} 6' 36''$ per l' amplitudine apparente domandata.

Quest' amplitudine è quella del centro del sole; se si volesse l' amplitudine apparente d' uno degli orli, invece d' impiegare nel calcolo $90^{\circ} 37'$ per ZA, si aggiungerebbe o si toglierebbe a questo numero il semidiametro del sole, secondo che si trattasse dell' orlo inferiore o dell' orlo superiore.

I navigatori si servono dell' amplitudine per trovare la declinazione dell' ago magnetico o la variazione del compasso. A tale effetto osservano mediante il compasso di variazione (*Vedi questa parola*), l' amplitudine dell' orlo inferiore del sole al momento del suo nascere o del suo tramontare; quindi calcolano, come abbiamo fatto di sopra, l' amplitudine apparente di questo medesimo orlo, e la differenza tra l' amplitudine calcolata e l' amplitudine osservata dà loro la variazione dell' ago calamitato. *Vedi Bussola.*

L' amplitudine è differente dall' azimut, primieramente perchè l' azimut si conta dal punto in cui il meridiano taglia l' orizzonte, ed è sempre il complemento dell' amplitudine, cosicchè non di questi due archi determina immediatamente l' altro. Differisce in secondo luogo l' azimut dall' amplitudine, in quanto che la parola amplitudine si applica unicamente alla stella che trovasi nell' orizzonte, mentre l' azimut si applica ancora alla stella che è già alzata, e viene determinato sull' orizzonte dal circolo verticale che passa per lo zenit dell' osservatore e per la stella di cui si tratta.

AMPLITUDINE (*Geom.*). Si chiama *amplitudine* di un arco di parabola la linea retta orizzontale che misura la distanza del punto in cui l'arco parabolico comincia da quello in cui termina. Questa parola si usa particolarmente parlando del getto delle bombe; e l'*amplitudine della parabola* chiamasi allora *amplitudine del getto*. *Vedi* PARABOLA, e PROIETTO.

AMPOLLETTA. Con tal nome le genti di mare indicano un piccolo orologio a polvere destinato a misurare la durata di un mezzo minuto. Questo orologio si forma di un tubo di vetro, alla metà del quale si fa alla lucerna un restringimento, in modo da imitare due piccole bocce sovrapposte, le quali comunichino insieme per un piccolo foro. In una di queste bocce si pone una quantità di polvere che stia mezzo minuto a cadere nell'altra boccia. Verificato con replicati esperimenti che, tenendo verticale il tubo, la polvere passa da qualunque delle due parti nell'altra nello spazio di un mezzo minuto, si chiudono alla lucerna ambedue le estremità del tubo, e quindi si pone lo strumento fra due dischi di legno che gli servono di base.

L'ampolletta serve in mare a valutare la velocità del cammino di un naviglio. Si getta nell'acqua una piccola tavoletta legata ad una sottile cordicella, e caricata in modo da poter galleggiare verticalmente con una punta in aria. Questa tavoletta, che si chiama *locche*, partecipa in principio dell'agitazione cagionata dal moto del vascello, ma ben presto se ne trova abbastanza lontana da poterla considerare quasi come stazionaria. La funicella, che si svolge da un mulinello, porta allora un indice, alla comparsa del quale si rovescia subito l'ampolletta. Intanto la corda tirata dal *locche*, che si suppone restare immobile, continua a svolgersi a misura che il vascello cammina: questa funicella porta varj nodi di panno rosso alla distanza di 47 piedi e 6 pollici. Allorché tutta la polvere dell'ampolletta è passata, si ferma la corda del *locche*, e si conta quanti nodi sono scorsi, il loro numero indica il numero delle miglia marine che il vascello percorre in un'ora. Così quando dicesi che un vascello *fa tre, quattro, cinque . . . nodi*, s'intende dire che nello spazio d'un'ora percorre 3, 4, 5. . . miglia marine.

Questa operazione si ripete tutte le volte che nel cammino del vascello si osserva una variazione di direzione o di velocità. L'uomo di mare segna sulla carta una retta, che, partendo dal punto in cui egli è, prende la direzione stessa del vascello indicata dalla bussola. Porta quindi su questa linea una lunghezza eguale allo spazio percorso, misurato sulla scala della carta, ed il punto così indicato manifesta quello ove è giunto. Questa operazione dicesi *puntare la carta*, e quantunque, come facilmente si compende, somministri valutazioni poco esatte, è molto praticata dai navigatori a motivo della sua semplicità.

ANABIBAZON (*Astron.*). Nome dato alla testa del Dragone, o al nodo ascendente della luna, cioè al punto in cui essa taglia l'eclittica per passare dalla latitudine meridionale alla settentrionale. Deriva questa parola dalla voce greca ἀναβιβάζω, *io ascendo*. Il nodo che è opposto al nodo ascendente dicesi *Catabibazon* dalla parola καταβιβάζω, *io discendo*. *Vedi* NODO.

ANACANTICO (*Acust.*). (Da ἀνακάντω, *io rifletto*). È questo il nome che si dà ai suoni riflessi, come quelli dell'eco, che diconsi appunto essere *suoni anacantici*. *Vedi* RIFLESSIONE, ECO, SUONO. Per analogia alcuni dicono *Anacantica* la scienza che ha per oggetto i raggi riflessi, e che in altro modo dicesi *Catottica*. *Vedi* CATOTTICA, e FONICA.

ANACLASTICA (*Ottica*). (Da ἀνά, *a traverso*, e da κλάω, *io rompo*). Nome antico di quella parte dell'ottica che oggi si chiama *Diottrica*, e che ha per oggetto la propagazione della luce per refrazione. *Vedi* DIOTTRICA.

Questa parola prendesi pure aggettivamente; così *punto anaclastico* dicesi il punto in cui un raggio si rompe, cioè il punto in cui incontra la superficie refrangente.

Mairan ha dato il nome di *curve anaclastiche* alle curve apparenti che forma il fondo di un vaso pieno d'acqua all'occhio posto nell'aria. Si vedano su questo soggetto le Memorie dell'Accademia delle scienze di Parigi per l'anno 1740.

Vetri anaclastici. Specie di bocce sonore, fabbricate particolarmente in Germania, le quali hanno la proprietà di esser flessibili, e di emettere un romore violento quando si aspira colla bocca l'aria che esse contengono.

ANACRONISMO. È questo, in cronologia, un errore nel calcolo del tempo, pel quale un avvenimento è posto prima dell'epoca reale nella quale è accaduto.

ANAGRAMMA. È la trasposizione delle lettere di una o più parole date, in modo che ne resulti un'altra o altre parole, le quali abbiano un qualche senso: tali sono: *logica, caligo; mulier, i, lemur*; ec. Sebbene l'anagramma non fosse affatto sconosciuto agli antichi, il gusto di tale scherzo non si è introdotto nella letteratura moderna che verso il secolo decimo quinto. Fra i più belli anagrammi è da rammentarsi quello fatto verso la metà del XVI secolo colla parola: *Divus Marcus Evangelista*, dalle quali si rilevò: *Sum vigil ad Venetas curas*. Col nome dell'assassino di Eurico III, re di Francia, il quale chiamavasi *Frère Jacques Clément*, si formò l'anagramma: *C'est l'enfer qui m'a créé*. Da molto tempo però è passata la moda di questi giuochi di parole, che richiedono più fatica e pazienza che ingegno.

La ricerca del numero dei diversi anagrammi che possono farsi con varie lettere, ossia delle diverse disposizioni in cui possono esse venir collocate, appartiene alla teoria delle Permutazioni (Vedi PERMUTAZIONE). Essendo *m* il numero delle lettere da anagrammarsi, il numero degli anagrammi, o permutazioni differenti è

$$x = 1.2.3.4.5. \dots m. \dots (a).$$

Se fra le lettere da permutarsi ve ne fossero delle simili, il numero delle permutazioni differenti scemerebbe: ed indicando con *m* il numero totale delle lettere, con *a, b, c*, ec. i numeri che esprimono quante volte si trova ripetuta una medesima lettera, avremo pel numero *x* degli anagrammi differenti la seguente espressione:

$$x = \frac{1.2.3.4.5. \dots m. \dots}{1.2. \dots a \times 1.2. \dots b \times 1.2. \dots c. \dots} (b).$$

Per esempio, le nove lettere della parola *anagramma* sarebbero suscettibili secondo la formula (a) di 362880 permutazioni differenti, se tali lettere fossero tutte diverse; essendovi però quattro *a* e due *m*, queste permutazioni si riducono a sole 7560, dividendo, come prescrive la formula (b), il numero 362880 pel prodotto 1.2.3.4.1.2.

ANALEMMA (*Asiron.*). L'*analemma* è una proiezione ortografica della sfera sul piano del meridiano, l'occhio essendo supposto ad una distanza infinita, e collocato sul punto orientale o occidentale dell'orizzonte. In questa proiezione l'orizzonte, e l'equatore sono rappresentati da linee rette, come lo sarebbe pure l'eclittica, se il piano su cui cade la proiezione fosse il colore dei solstizi. *Analemma* viene dal greco *ανaleμμα*, che significa *altezza*, poichè serve a trovare, mediante una semplice operazione grafica, l'altezza del sole in un'ora qualunque. Esso serve ancora a determinare il tempo del levare e del tramontare del sole in una latitudine e in un giorno determinato, e l'ora, del giorno conoscendo l'altezza del sole.

Sia (Tav. XVIII, fig. 3) OR l'orizzonte, OEPR il meridiano, CE l'equatore, e P il polo. Prendiamo ED eguale alla declinazione del sole, e conduciamo DA perpendicolare sopra CP; DA sarà il raggio del parallelo diurno DMEN descritto

dal sole; si prenda ancora FG eguale al seno dell'altezza del sole nel momento del quale si vuol conoscere l'ora, e dal punto F si conduca FM perpendicolare sopra DA; il punto M, in cui questa perpendicolare incontra il parallelo DMBN, determina l'arco DM eguale all'arco orario del sole, ossia alla sua distanza dal meridiano. Questa distanza, convertita in tempo a ragione di 15° per ora, fa conoscere l'ora corrispondente all'altezza di cui FG è il seno. Se invece fosse stata data l'ora, e si fosse cercata l'altezza del sole, si sarebbe tenuto un metodo inverso; cioè, descritto il parallelo DMBN, si sarebbe preso su di esso un arco DM eguale alla data ora convertita in gradi, dal punto M si sarebbe abbassata la perpendicolare MF sopra DA, e la perpendicolare FG, abbassata dal punto F sopra OR, avrebbe rappresentato il seno dell'altezza del sole. *Vedi PROIEZIONE.*

La ricerca dell'ora in cui il sole si alza o tramonta ad una data latitudine è affatto simile alla precedente, ed è egualmente facile.

ANALEMMATICO. *Vedi QUADRANTE.*

ANALISI. (Da *ανάλυσις*, *decompongo*). I matematici moderni indicano col nome di *analisi* il metodo di risolvere i problemi con calcoli generali. Alcuni fra essi hanno talmente esteso la significazione di questa parola, che le hanno fatto abbracciare tutti i rami della scienza dei numeri: e perciò hanno chiamato l'algebra, *analisi finita*; il calcolo differenziale, *analisi infinitesimale*, ec. ec. Queste diverse denominazioni sono tanto più mal fondate in quanto che la scienza dei numeri, al pari della geometria, lungi dal procedere sempre per *analisi*, fa uso della *sintesi*, per la generazione degli oggetti dei quali essa si occupa.

L'*analisi*, nel senso rigoroso della parola, è un metodo di ragionamento il quale procede per via di decomposizione o dall'ignoto al noto; in questo senso, è l'opposto della *sintesi*, metodo di ragionamento che procede per via di composizione o dal noto all'ignoto. Questi due metodi si applicano egualmente a tutti i rami delle matematiche, e se le scoperte dei moderni hanno lasciato all'indietro i lavori degli antichi, ciò non dipende perchè questi ultimi ignorassero il metodo analitico, ma bensì perchè la scienza dei numeri non esisteva ancora per essi, o per lo meno non ne conoscevano che i primi elementi. È l'uso dei segni generali, per rappresentare le quantità, che ha facilitato ai moderni la scoperta delle leggi dei numeri; e soltanto a questa scoperta essi devono la loro superiorità incontestabile, poichè tutte le considerazioni matematiche le più elevate possono ridursi a semplici considerazioni di numeri.

La distinzione che si è preteso di stabilire fra l'*analisi* antica e l'*analisi* moderna non riposa dunque in sostanza sopra nulla di reale. Non vi è infatti che un solo e medesimo metodo analitico; solamente esso si esercita oggi sopra una moltitudine di creazioni nuove della scienza, ignote per conseguenza agli antichi, e i suoi mezzi sono tanto più pronti e più sicuri, quanto i suoi strumenti sono più perfetti.

A Platone viene attribuita l'invenzione dell'*analisi* geometrica, o, per parlare più esattamente, l'invenzione dell'applicazione del metodo analitico alle costruzioni della geometria, poichè l'*analisi*, come forma logica di ragionamento, era conosciuta prima di questo filosofo. Questa applicazione ha avuto delle conseguenze tanto felici per la perfezione della geometria, che si rende essenziale il darne un'esatta idea. Essa consiste in supporre vero ciò che è in questione, in supporre trovato ciò che si cerca: da tali supposizioni si deducono le conseguenze che ne derivano, e da queste delle nuove, fintantochè si arrivi a qualche proposizione evidentemente vera o falsa, evidentemente possibile o impossibile. La natura di quest'ultima conseguenza decide della verità o della possibilità della proposizione che si esamina. Per far meglio sentire la differenza che passa tra l'*analisi* e la *sintesi* aggiungeremo che col primo metodo si decompone una pro-

posizione ancora incerta nelle sue parti, le quali debbono trovarsi vere ed insieme collegate se la proposizione è vera, e false e senza connessione possibile se la proposizione è falsa; mentre nel secondo metodo si riuniscono, si congiungono in certo modo più verità, dalla connessione delle quali risultano nuove verità. In una parola, nell'analisi si va dai rami al tronco, e nella sintesi si va dal tronco ai rami. Alcuni esempj renderanno anco più evidente la diversa indole de' due metodi.

PROBLEMA I. Trovare un punto C (*Tav. XVII, fig. 6.*), sul segmento di circolo dato ACB, tale che condotte le rette CA e CB alle estremità della corda AB, queste stiano tra loro nel rapporto delle rette date M ed N.

ANALISI

Supponiamo conosciuto il punto C, e condnciamo AC e BC: si avrà

$$AC : BC :: M : N.$$

Se si conduce la retta AD in modo che l'angolo BAD sia eguale all'angolo ACB, e quindi si prolunga BC fino in D, si avranno i due triangoli ACB ed ABD, i quali sono equiangoli, e perciò simili (*Vedi TRIANGOLI SIMILI*). Si ha dunque la proporzione

$$AC : BC :: AD : AB;$$

ma si aveva

$$AC : BC :: M : N;$$

dunque, a motivo del rapporto comune AC : BC, si deduce

$$AD : AB :: M : N.$$

Ora in quest'ultima proporzione AB essendo conosciuto, AD si trova pienamente determinato, ed è facile con esso giungere alla soluzione del problema.

SINTESI

Costruzione. Si conduca pel punto A la retta AD, la quale faccia con la corda AB un angolo BAD eguale a quello di cui è capace il dato segmento ACB. Si determini la lunghezza di questa retta in modo che sia quarta proporzionale dopo le rette date AB, M ed N, vale a dire che si abbia

$$N : M :: AB : AD.$$

Si conduca la retta BD, e dal punto C ove essa incontra la circonferenza si condnea AC: in tal modo il problema sarà sciolto, e si avrà come veniva richiesto la proporzione

$$AC : BC :: M : N.$$

Dimostrazione. I triangoli ABC, ABD sono equiangoli; poichè l'angolo B è comune, e l'angolo BAD è per costruzione eguale a tutti gli angoli di cui il segmento ACB è capace, e conseguentemente anco all'angolo ACB. Questi due triangoli sono dunque simili e danno

$$AC : BC :: AD : AB :: M : N;$$

le due rette AC e BC hanno dunque il rapporto domandato.

PROBLEMA II. Inscrivere un quadrato in un triangolo dato.

Dis. di Mat. Vol. I.

ANALISI

Sia ABC (Tov. XVII, fig. a) il triangolo dato. Supponiamo il problema risoluto, e sia DEFG il quadrato inscritto. Per i punti A ed E si conduca la retta AE prolungata fintantochè incontri in O la linea CO parallela alla base AB, e da O si abbassi la perpendicolare OI sopra questa base, prolungata se è necessario: si abbassi egualmente la perpendicolare CH, la quale sarà l'altezza del triangolo. Essendo simili i triangoli CAO e DAE, come pure i triangoli OAI ed EAF, si hanno le due proporzioni

$$AE : AO :: DE : CO,$$

$$AE : AO :: EF : OI;$$

ma i tre primi termini della prima sono eguali ai tre primi termini della seconda, poichè $EF = DE$; dunque i quarti termini sono necessariamente eguali, e si ha

$$OI = CO = CH;$$

onde la figura CHIO è un quadrato il di cui lato è eguale all'altezza del triangolo dato, e basta costruire questo quadrato per ottenere il punto E, e quindi per risolvere il problema.

SINTESI

Costruzione. Sopra l'altezza CH del triangolo dato si costruisca il quadrato CHIO; si uniscano i punti A ed O con una retta; dal punto E, ove questa retta incontra il lato CB del triangolo, si abbassi la perpendicolare EF sopra la base, si conduca da questo stesso punto E la retta ED parallela alla base, si abbassi finalmente la perpendicolare DG, e la figura DGFE sarà il quadrato inscritto domandato.

Dimostrazione. I triangoli ACO e ADE, come pure i triangoli AOI ed AEF, sono simili per costruzione, essi danno dunque

$$AO : AE :: CO : DE,$$

$$AO : AE :: OI : EF;$$

ma CO è eguale ad OI, dunque $DE = EF = DG = GF$; così la figura DGFE avendo i suoi quattro lati eguali è un quadrato, poichè i suoi angoli sono retti.

Questi esempj sono sufficienti per far conoscere la differenza tra il metodo analitico e il metodo sintetico, e per dare un'idea della maniera con la quale venivano impiegati dagli antichi. Tratteremo all'articolo APPLICAZIONE dei nuovi metodi d'analisi geometrica. Quanto all'analisi algebrica, i suoi processi saranno successivamente descritti nei diversi articoli, i quali si riferiscono alla scienza dei numeri.

ANALISTA. In matematica chiamasi così colui che è versato nell'analisi matematica. Vedi ANALISI.

ANALITICO. Ciò che appartiene all'analisi. Lagrange ha voluto sostituire al calcolo differenziale un metodo artificiale, al quale ha dato il nome di *Calcolo delle funzioni analitiche*. Lo scopo di questo geometra, sì illustre d'altronde per le sue brillanti scoperte, era quello di evitare la considerazione dell'infinito, da cui il calcolo differenziale riceve la sua significazione, e di ridurre così i principj di questo ramo della scienza dei numeri ai principj elementari dell'algebra. Ed è con questa intenzione che esso indica coi nomi di *funzione prima*, *funzione*

seconda, funzione terza, ec., le derivate differenziali di una funzione qualunque $f(x)$ di una variabile x , le quali entrano nella serie di Taylor:

$$f(x+i) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \frac{i}{1} + \frac{d^2f(x)}{dx^2} \frac{i^2}{1.2} + \frac{d^3f(x)}{dx^3} \frac{i^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Le funzioni prima, seconda ec., non essendo altra cosa che i coefficienti differenziali di questo sviluppo, cioè:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}, \text{ ec.}$$

Prescindendo dalla considerazione che i processi del calcolo delle funzioni analitiche sono lontani dall' avere la semplicità di quelli del calcolo differenziale, il metodo di Lagrange non è evidentemente che una trasformazione, un uso indiretto di quest' ultimo calcolo, e le sue funzioni derivate non hanno per sé stesse alcuna significazione, come lo proveremo agli articoli *Calcolo differenziale*, e *Calcolo delle funzioni analitiche*.

Le diverse specie di quantità che formano l' oggetto della scienza dei numeri sono tanti enti intellettuali, i quali presentano ordini differenti, e sono sottoposti a diverse leggi. Voler ridurre tutte queste quantità alle medesime considerazioni elementari, non solamente è un non comprendere nello stesso tempo la natura della scienza e i suoi immensi progressi, ma è ancora un materializzare lo spirito umano, toglierli le sue più nobili facoltà, ed imitare il grossolano anatomista, il quale, collo scalpello alla mano, crede trovare nella morte i segreti della vita.

ANALOGIA. Questa parola, presa nel suo significato matematico, è il sinonimo di **Proporzione**.

Nella trigonometria sferica si hanno diverse analogie, le quali servono a facilitare la risoluzione dei triangoli obliquangoli: fra le altre si trovano le seguenti, conosciute sotto il nome di *analogie di Gauss* dal nome del celebre matematico che il primo le ha trovate:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}(A+B) : \cos \frac{1}{2}(a-b) &:: \cos \frac{1}{2}C : \cos \frac{1}{2}c \\ \cos \frac{1}{2}(A+B) : \cos \frac{1}{2}(a+b) &:: \sin \frac{1}{2}C : \cos \frac{1}{2}c \\ \sin \frac{1}{2}(A-B) : \sin \frac{1}{2}(a-b) &:: \cos \frac{1}{2}C : \sin \frac{1}{2}c \\ \cos \frac{1}{2}(A-B) : \sin \frac{1}{2}(a+b) &:: \sin \frac{1}{2}C : \sin \frac{1}{2}c \end{aligned}$$

In queste formole, A, B, C indicano i tre angoli di un triangolo sferico, e a, b, c , i lati rispettivamente opposti. Eccone la dimostrazione.

Si prenda dalla Trigonometria rettilinea il valore di $\sin \frac{1}{2}(A+B)$, vale a dire

$$\sin \frac{1}{2}(A+B) = \sin \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B + \sin \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}A,$$

ed in esso si sostituiscano i valori

$$\sin \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}$$

$$\cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\sin \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a \sin c}}$$

$$\cos \frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin a \sin c}}.$$

presi dalle formule della trigonometria sferica (*Vedi TRIGONOMETRIA SFERICA*),

e nei quali $p = \frac{a+b+c}{2}$: si troverà

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}^2(p-b) \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen}^2 c}} + \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}^2(p-a) \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen}^2 c}}, \text{ o}$$

quindi

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\operatorname{sen}(p-b)}{\operatorname{sen} c} \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}} + \frac{\operatorname{sen}(p-a)}{\operatorname{sen} c} \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}};$$

e mettendo fuori il fattor comune $\frac{1}{\operatorname{sen} c} \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}$ si avrà

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) = \left\{ \operatorname{sen}(p-b) + \operatorname{sen}(p-a) \right\} \frac{1}{\operatorname{sen} c} \sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}.$$

Paragonando adesso $\sqrt{\frac{\operatorname{sen} p \operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}}$ con i valori presi di sopra, si vede che esso è eguale a $\cos \frac{1}{2}C$, e così si ottiene

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) = \left\{ \operatorname{sen}(p-b) + \operatorname{sen}(p-a) \right\} \frac{\cos \frac{1}{2}C}{\operatorname{sen} c}.$$

Ma dalla trigonometria rettilinea si ha

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y),$$

dunque, facendo $x = p-b$, e $y = p-a$, avremo

$$\operatorname{sen}(p-b) + \operatorname{sen}(p-a) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(2p-a-b) \cos \frac{1}{2}(a-b),$$

e quindi, riflettendo che $2p-a-b=c$,

$$\operatorname{sen}(p-b) + \operatorname{sen}(p-a) = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}c \cos \frac{1}{2}(a-b).$$

Da un'altra formula di trigonometria rettilinea si ha

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}q \cos \frac{1}{2}q = \operatorname{sen} q,$$

dunque si dedurrà

$$2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}c = \frac{\operatorname{sen} c}{\cos \frac{1}{2}c},$$

e quindi, sostituendo,

$$\operatorname{sen}(p-b) + \operatorname{sen}(p-a) = \frac{\operatorname{sen} c \cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}c},$$

valore che sostituito in quello di sopra trovato di $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)$ dà in fine

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos \frac{1}{2}C}{\cos \frac{1}{2}c} \cos \frac{1}{2}(a-b).$$

Con lo stesso metodo troveremo valori simili per $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)$, $\cos \frac{1}{2}(A+B)$ e

$\cos \frac{1}{2}(A-B)$, e con ciò si avranno le quattro analogie di Gauss di sopra riportate, le quali possono mettersi sotto la seguente forma:

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}(a-b) \dots\dots (a)$$

$$\cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}c = \operatorname{sen} \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}(a+b) \dots\dots (b)$$

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}c = \cos \frac{1}{2}C \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b) \dots\dots (c)$$

$$\cos \frac{1}{2}(A-B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}c = \operatorname{sen} \frac{1}{2}C \operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b) \dots\dots (d)$$

Se ora si divide (a) per (b), (c) per (d), e quindi (d) per (b), e (c) per (a), si ottengono le quattro seguenti formule, che sono di un grand'uso nella risoluzione dei triangoli sferici, e che si chiamano ordinariamente *Analogie di Nepero*, perchè scoperte da questo geometra:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A+B) = \cot \frac{1}{2}C \frac{\cos \frac{1}{2}(a-b)}{\cos \frac{1}{2}(a+b)} \dots\dots (e)$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B) = \cot \frac{1}{2}C \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(a+b)} \dots\dots (f)$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a+b) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}c \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)} \dots\dots (g)$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b) = \operatorname{tang} \frac{1}{2}c \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(A+B)} \dots\dots (h)$$

Queste formule furono date da Neper senza dimostrazione, e s'ignora come vi arrivasse. Si trovano indicate nella sua opera postuma intitolata: *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, Lione, 1620. Fu Enrico Briggs che le sviluppò, e che diede loro la forma sotto la quale le abbiamo presentate. Wallis è il primo che le abbia dimostrate. In seguito lo sono state in più e differenti maniere, e indipendentemente ancora dal metodo da noi seguito.

ANALOGIE DIFFERENZIALI. Facendo variare infinitamente poco gli angoli e i lati di un triangolo sferico, i rapporti che ne risultano tra i loro differenziali diconsi *analogie differenziali*, e sono di un'uso frequente presso gli Astronomi.

Accade spesso volte che siasi già eseguita la soluzione esatta di un triangolo sferico, di cui erano dati tre elementi, e che si cerchi la soluzione di un altro triangolo sferico, i di cui elementi differiscano pochissimo da quelli del precedente già risoluto. In tal caso è facile il prevedere, che, risolvendo il nuovo triangolo, i valori che si troveranno per gli elementi incogniti differiranno pochissimo da quelli già trovati nel primo triangolo. Quindi se le differenze date tra gli elementi corrispondenti dei due triangoli siano talmente piccole da poterne senza errore sensibile trascurare le seconde dimensioni, potranno esse considerarsi come differenziali, ed alle formule trigonometriche saranno applicabili le regole della differenziazione, in modo da dedurne i valori dei differenziali degli elementi incogniti, che aggiunti agli elementi calcolati del primo triangolo daranno senz'altro calcolo gli elementi incogniti del secondo. Questo metodo ha il vantaggio di far conoscere immediatamente l'influenza che sopra alcuni elementi del triangolo può avere la variazione piccolissima di alcuni altri elementi; ed è poi quasi sempre preferibile alla soluzione diretta per la maggior semplicità del calcolo.

Si prendano pertanto le note formule trigonometriche (*Vedi TRIGONOMETRIA SFERICA*)

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A \dots\dots (1)$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c \cos B \dots\dots (2)$$

$$\cos c = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos C \dots\dots (3)$$

Differenziando ora la prima equazione si avrà

$$da \operatorname{sen} a = \left\{ \begin{array}{l} (\cos c \operatorname{sen} b - \cos b \operatorname{sen} c \cos A) db \\ + (\operatorname{sen} c \cos b - \cos c \operatorname{sen} b \cos A) dc \\ + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c dA \end{array} \right\}$$

Adesso ai coefficienti di db e di dc può darsi una forma più comoda; infatti dalla formula (1) si ha

$$\operatorname{sen} c \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\operatorname{sen} b},$$

ed in questa ponendo in luogo di $\cos c$ il suo valore dato dalla (3), e riflettendo che $\cos^2 b = 1 - \operatorname{sen}^2 b$, avremo

$$\operatorname{sen} c \cos A = \cos a \operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \cos b \cos C.$$

Sostituito adesso questo valore e quello di $\cos c$ nel coefficiente di db , esso si ridurrà a $\operatorname{sen} a \cos C$, come con analoghe operazioni si ridurrà a $\operatorname{sen} a \cos B$ quello di dc . Ciò fatto, si divida tutta l'equazione differenziata per $\operatorname{sen} a$, e si avrà

$$da = \cos C db + \cos B dc + \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} a} dA \dots (a)$$

Differenziando in egual modo le equazioni (2) e (3), e facendo le medesime riduzioni si troveranno senza difficoltà le altre relazioni

$$db = \cos C da + \cos A dc + \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} b} dB \dots (b)$$

$$dc = \cos B da + \cos A db + \frac{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} c} dC \dots (c)$$

Combinando queste tre equazioni potranno sempre trovarsi tre delle sei variazioni da , db , dc , dA , dB , dC , conoscendo le altre tre, ed osservando che se qualche elemento del triangolo rimane costante la sua variazione diviene nulla, e le formule precedenti divengono più semplici.

Per dare un'applicazione di queste formule, supponiamo che si domandi il valore di dB in un triangolo in cui sia costante l'angolo A e il lato c , e si conosca la variazione db . In questo caso si dovrà trovare il valore di dB dato per dc , dA , e db , e fare $dc = dA = 0$; il che equivale ad eliminare fra le tre equazioni (a), (b), (c) i due differenziali da e dC , dopo avere annullato dc e dA . Una tale eliminazione è facile poichè dC non si trova che nella equazione (c); fatto dunque nelle altre due $dc = 0$, e $dA = 0$, esse si cangeranno nelle seguenti

$$da = \cos C db,$$

$$db = \cos C da + \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} b} dB;$$

ed eliminato da , si avrà con facile riduzione

$$\operatorname{sen} b \operatorname{sen}^2 C db = \operatorname{sen} B \operatorname{sen} a \operatorname{sen} c dB.$$

Osservando ora che nei triangoli sferici si ha generalmente $\frac{\text{sen } A}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } C}{\text{sen } c}$

(Vedi TRIGONOMETRIA SFERICA), donde $\text{sen } B \text{ sen } c \text{ sen } a = \text{sen } C \text{ sen } a \text{ sen } b$, perciò facendo l'opportuna sostituzione nel secondo membro dell'ultima equazione trovata avremo

$$\text{sen } b \text{ sen}^2 C \, db = \text{sen } C \text{ sen } a \text{ sen } b \, d\theta,$$

ossia

$$\text{sen } C \, db = \text{sen } a \, d\theta,$$

donde la proporzione o analogia differenziale

$$db : d\theta :: \text{sen } a : \text{sen } C.$$

Cioè: La variazione del lato adiacente all'angolo costante

Sta alla variazione dell'angolo adiacente al lato costante,

Come il seno del lato opposto all'angolo costante

Sta al seno dell'angolo opposto al lato costante.

Non ri estenderemo maggiormente sulla ricerca delle molte analogie differenziali che potrebbero facilmente dedursi dai principj di sopra stabiliti; perciò rimanderemo per maggiori particolarità all'eccellente trattato di *Trigonometria piana e sferica* di Cagnoli, Bologna, 1804, in-4, nel quale lo studioso troverà diffusamente trattata questa materia, e dove potrà riscontrare un'estesissima tavola di analogie differenziali.

ANAMORFOSI (*Prosp.*). Proiezione mostruosa, o immagine di una figura deformata, sopra un piano o sopra una superficie curva, la quale non ostante, veduta da un certo punto, comparisce regolare e fatta con le debite proporzioni. *Vedi* PROIEZIONE.

Per esempio, si disegni una figura regolare in un quadrato ABCD (*Tav. XVIII, fig. 4*), che si dividerà in piccole caselle o quadrati eguali, per mezzo di linee parallele ai lati del quadrato grande, ed equidistanti fra loro. Ciò fatto, si tiri una linea *ab* (*Tav. XVIII, fig. 5*) eguale ad AB, e divisa in altrettante parti eguali: sulla metà E di questa linea s'innalzi una perpendicolare indefinita PEQ, e su di essa si prenda una lunghezza EP, eguale alla distanza dalla quale vuol guardarsi il quadro. Dal punto P si conducano ai punti di divisione della linea *ab* altrettante rette, che si prolungheranno indefinitamente al di là di *ab*. Da P si alzerà una perpendicolare PO sopra PQ, e la lunghezza di questa perpendicolare si farà eguale all'altezza, della quale si suppone che l'occhio dello spettatore sia elevato sopra il punto P. Da O si condurrà a *b* una retta Ob, la quale si prolungherà fino all'incontro in M colla linea PaM, e dal punto M, come pure da tutti gli altri punti in cui la trasversale ObM taglia le oblique che partono da P, si condurranno tante parallele alla linea *ab*. Adesso il trapezio *aObNM* si troverà diviso in tante caselle di forme differenti, quanti sono i piccoli quadrati in cui è stato diviso il quadrato della figura 4 della stessa tavola. Si disegnerà pertanto sopra ogni casella della *fig. 5* una figura simile a quella che trovasi nel piccolo quadrato corrispondente della *fig. 4*, alterando però i tratti secondo la diversa alterazione delle caselle in confronto dei piccoli quadrati. Questa descrizione ajutata dalla vista della figura può comprendersi senza che faccia d'uopo diffondersi maggiormente.

Con tal mezzo si avrà una figura deforme, la quale tuttavia avrà un'apparenza regolare, se l'occhio sarà collocato al di sopra di P ad un'altezza eguale

a PO. In tal punto si vedrà la figura colle stesse apparenze e proporzioni, colle quali comparirebbe il quadro della fig. 4, se fosse collocato verticalmente in modo che il lato AB posasse sulla linea *ab* della fig. 5.

Se la figura di cui si vuol fare un' anamorfose fosse rinchiusa in un rettangolo in luogo che in un quadrato, come di sopra abbiamo supposto, la lunghezza PO non dovrà prendersi eguale all'altezza dalla quale si vuole che l'occhio os-

servi la figura, ma dovrà farsi $= \frac{lm}{a}$, indicando con *m* l'altezza dell'occhio so-

pra il punto P, con *l* la larghezza AB del quadro, e con *a* la sua altezza AD.

Siccome poi l'illusione è maggiore quando non si può giudicare dagli oggetti vicini della distanza delle varie parti dell'immagine mostruosa, così tali figure non si guardano che per un piccolo foro, che, celando gli oggetti circostanti, non lasci vedere che la sola anamorfose. È inutile poi avvertire che quanto maggiore sarà il numero delle caselle in cui si divide la figura, tanto più esatta riuscirà l'anamorfose.

In generale in questo scherzo di prospettiva si cerca di dare all'immagine deformata una tale irregolarità che riesca impossibile di riconoscerla, quantunque divenga regolare e distinta, veduta dal punto conveniente. Alcuni artisti giunsero pure a dare all'anamorfose un aspetto ingannevole di un'immagine che cangiasi in un'altra del tutto diversa: ma per far ciò non si possono dar regole, dipendendo tutto dall'industria e dall'abilità dell'artista. Si citano alcuni effetti curiosi di questo genere. Nel chiostro dei Minimi, presso la Piazza Reale, in Parigi, vedevasi sul muro una pittura, che osservata di fronte compariva un paesaggio, e veduta da un certo punto si trasformava in due figure umane, una delle quali rappresentava la Maddalena, e l'altra S. Giovanni in atto di scrivere il Vangelo. Questo disegno era stato fatto dal P. Nicéron, minimo, che su questo argomento ha scritto un trattato latino intitolato: *Thaumaturgus opticus*, Parigi, 1666, in-folio. Il P. Maignan, minimo, ha trattato anch'esso lo stesso soggetto nella sua opera: *Perspectiva horaria, sive de horographia gnomonica tum theoretica tum practica libri quatuor*, Roma, 1668 in-folio.

Le anamorfose possono farsi non solamente sopra superficie piane, ma ancora sopra superficie cilindriche, prismatiche, coniche ec., adattando ad ogni caso particolare le regole della prospettiva. Si è ancora fatto uso della proprietà che hanno gli specchi e i vetri di varie forme, di alterare e rendere deformi gli oggetti che si mirano in essi o a traverso di essi, per disegnare delle figure mostruose, che vedute in uno specchio o a traverso di un vetro compariscano regolari.

Le regole da osservarsi in tal genere di anamorfose riposano sulle leggi della catottrica e della diottrica. La natura di questo Dizionario non ci permette di estenderci maggiormente su questo soggetto, che d'altronde non presenta nessuna difficoltà particolare, essendo una semplice applicazione dei principi della prospettiva e dell'ottica: rimanderemo perciò il curioso alle due opere di sopra citate, non meno che alle seguenti: Guyot: *Nonvelles récréations physiques et mathématiques*, Parigi, anno VII, 3 vol, in-8; *Dictionnaire des amusemens des sciences* (formante parte dell'Enciclopedia metodica), Parigi, 1792 in-4; Wolfio, *Catoptrica, et Dioptrica*; le Memorie dell'accademia di Pietroburgo vol. IV; e gli *Acta Eruditorum* di Lipsia per l'anno 1712. In quest'ultimo libro trovasi la descrizione di una macchina anamorfotica di Leupold, per mezzo della quale si possono descrivere meccanicamente e con molta esattezza delle immagini deformi, che vengono ristabilite nello stato loro naturale col mezzo di specchi cilindrici o conici.

ANASSAGORA, uno dei successori di Talete nella direzione della scuola ionica fondata da questo celebre filosofo, nacque a Clazomene, nella Ionia, il primo anno della LXX olimpiade, 500 anni avanti G. C. Sebbene richissimamente abbonò la cura de' suoi beni per dedicarsi allo studio della filosofia sotto Anassimene di Mileto. Di venti anni viaggiò per istruirsi, visitò l'Egitto, e quel popoli che in quel tempo coltivavano le scienze, ed in fine fermò stanza in Atene nel tempo in cui Pericle era alla testa dei pubblici affari. Strinse particolare amicizia con quel grand'uomo, ed ebbe fra i suoi discepoli i principali cittadini d'Atene, come Archelao ed il poeta Euripide. Pare che siasi occupato principalmente della geometria e dell'astronomia. I suoi libri, che si reputano come i più antichi della dotta Grecia, non sono giunti fino a noi; nè possiamo formarci nè idea de' suoi studj, che per mezzo delle opere di Plutarco e di Platone che ne hanno accidentalmente fatto menzione.

Si attribuisce ad Anassagora la scoperta della causa degli eclissi della luna: è almeno certo che le sue opinioni su questo fenomeno sembrarono sì ardite e sì poco conformi alla cosmogonia del suo tempo, che gli attizzarono ingiuste persecuzioni ed il nome di empio. Per molto tempo l'amicizia di Pericle li difese dall'odio pubblico, ma finalmente non potè questo essere più contenuto. Anassagora venne tratto in giudicio per delitto di empietà. Le opinioni sono discordi sulle conseguenze di tale accusa. Gli uni, ma in piccolo numero, asseriscono che fu assoluto, gli altri che fuggì prima della sentenza, ed altri che fu condannato all'esilio, e ad un'amenda di cinque talenti. Comunque sia, è certo che Anassagora in quell'epoca partì da Atene, e andò a stabilirsi in Lampsaco, dove cessò di vivere tre anni dopo, verso l'anno 428 avanti G. C., in età di 72 anni. Galileo dovè soffrire persecuzioni simili a quelle del saggio di Clazomene. E' dolorosa cosa il pensare che in ogni tempo gli uomini hanno respinto i lumi, e sono stati inclinati a condannare ciò che non hanno potuto comprendere.

È probabile che Anassagora abbia partecipato alle opinioni erronee della scuola ionica sulla maggior parte dei grandi fenomeni, le leggi dei quali ei sono oggi meglio conscinte; ma ciò non prova nulla contro il suo genio, nè contro quello dei filosofi dell'antichità, i lavori dei quali, segnando il punto di partenza della scienza, ispireranno sempre sotto questo rapporto un vivo interesse. Del resto non è ben certo che noi interpretiamo con esattezza il senso delle loro proposizioni scientifiche; e d'altronde tutte le idee che in esse si contengono non sono state distrutte dall'esperienza e dai progressi della scienza.

Come i suoi predecessori, e come il celebre fondatore della scuola ionica, Anassagora considerava il sole come una massa infuocata, ma densa e simile alla terra, opinione che è conforme alle leggi della gravitazione universale: se non che ei credeva che fosse poco più grande del Peloponneso. Quando questo filosofo sosteneva che i cieli erano di pietra, voleva evidentemente dire che tutti i corpi celesti erano di una materia pesante, e presso a poco simile a quella della terra. Veniva domandato ad Anassagora, contro questa opinione sulla materialità degli astri, come accadeva che tali corpi pesanti non cadessero. A tal'obiezione rispondeva che n'era causa il loro moto circolare, e che la loro caduta sarebbe immediata se questo moto cessasse. Questa opinione notevole è la più antica traccia, che si trovi nella storia della scienza, della cognizione della forza centrifuga, che ritiene i corpi celesti nella loro orbita. Secondo Anassagora, la via lactea, come pure l'arco baleno, non era che una riflessione dei raggi solari; la terra era piana; la luna, un corpo opaco, abitabile, che riceveva la sua luce dal sole; le comete, astri erranti. Ei sosteneva ancora che la nave era nera, perchè tale era la tinta dell'acqua, della quale la neve non è che una modificazione. Gli vengono pure attribuite dalle ricerche sulla soluzione del problema della quadratura del circolo.

Per i dettagli storici relativi alla scuola jonica rimanderemo il lettore all'articolo *TALETE*.

ANASSIMANDRO, discepolo e successore di Talete nella direzione della scuola jonica, ha associato il suo nome coi primi progressi delle scienze. Del pari che il suo maestro nacque a Mileto, il terzo anno della XLII olimpiade, 610 anni avanti G. C. Alcuni autori l'hanno collocato, dietro documenti storici poco certi, tra i filosofi che hanno conosciuto il moto della terra. Ma è probabile che le opinioni di Anassimandro, in questo proposito, non avessero nulla di più decisivo di quelle del fondatore della scuola jonica. Questo geometra si persuase nulladimeno, in quei giorni d'influenza dell'astronomia, che il sole fosse una massa infuocata, grande quanto la terra; e sebbene quest'opinione non fosse in lui che semplicemente congetturale, essa ci deve far concepire un'idea vantaggiosa del suo genio, poichè ci prova che parecchi secoli dopo gli sarebbe costata poca fatica l'elevarsi fino a quelle verità di cui la scienza è oggi in possesso.

Vengono attribuite ad Anassimandro diverse ingegnose invenzioni che ebbero luogo in quell'epoca, a che furono il risultato degli studj della scuola jonica. Pare che sia stato l'inventore della sfera, poichè costruì uno strumento che rappresentava il sistema celeste come veniva immaginato al suo tempo. Ma l'invenzione che ha maggiormente contribuito ad illustrare il nome di Anassimandro è quella dello gnomone. Ei se ne servì per osservare i solstizj, e fu il primo scopritore dell'obliquità dell'eclittica, o almeno il primo la fece conoscere ai Greci. Le scienze matematiche, alle quali si era specialmente dedicato, debbono finalmente ad Anassimandro l'invenzione delle carte geografiche e degli orologi solari. Morì alcun tempo innanzi il secondo anno della LVIII olimpiade, verso l'anno 547 avanti l'era cristiana, in età di 64 anni.

ANASSIMENE, di Mileto, figlio di Furistrato, fiorì verso la LVI olimpiade (circa 555 anni av. G. C.). Ei fu discepolo d'Anassimandro e suo successore nella scuola jonica, e seguì con splendore le tracce de' suoi predecessori. Plinio gli attribuisce l'invenzione dei quadranti solari, che appartiene evidentemente al suo maestro Anassimandro. L'incertezza che regna nella cronologia di quell'epoca, e i pochi documenti storici che ci sono rimasti di quell'età remote non permettono che di fare delle congetture sui fatti che maggiormente interessano la storia della scienza. Anassimene si occupò specialmente della gnomonica, e della geografia, e la sua posizione nella scuola di Talete ha fatto sì che il suo nome si trovi congiunto coi primi progressi di tali scienze. S'ignora la data precisa della sua nascita; ma successe ad Anassimandro verso l'anno 547 avanti G. C., ed è probabile che allora fosse già in età matura. Si crede che morisse verso l'anno 480 avanti G. C., nel tempo della presa di Atene fatta dai Persiani.

ANATOCISMO. (Da *ana* che nei composti significa allora *ripetizione, duplicazione*, e *τόκος, usura*). Diceasi quel contratto in cui gl'interessi provenienti dalla somma principale si aggiungono al capitale stesso, perchè anch'essi producano un nuovo interesse al pari del capitale. Questo è ciò che diceasi *interesse sopra interesse, frutto doppio, interesse doppio*. Vedi *INTERESSE*, *FRUTTO*, *ANNUITA*, ec.

ANATOLIO, d'Alessandria, fioriva verso l'anno 290 di G. C. Nato da genitori cristiani, fu inalzato, per merito, al vescovado di Laodicea. Compose parecchie opere, tra le altre dieci libri d'*Istituzioni aritmetiche*, delle quali Fabricio ci ha conservato alcuni frammenti nel secondo tomo della sua *Bibliotheca graeca*. Si ha di lui ancora un *Trattato sul tempo di celebrare la Pasqua*, pubblicato in latino da Egidio Bucherio nella sua *Doctrina temporum*, Anversa, 1634, in fol.

ANCORA. È così chiamato un gran pezzo di ferro, che legato ad una gomema

gettasi nell'acqua o sulla spiaggia per fermare un vascello. I limiti di questo Dizionario non permettendoci di entrare in particolarità sul modo di costruirlo, sulla forma che deve darsi loro per ottenerne il maggiore effetto possibile, sul modo di provarle ec, rimandiamo il lettore all' *Enciclopedia Britannica*; all' *Enciclopedia Metropolitana*; al *Treatise on the Anchor* di Pering, Londra, 1819 in-8; al *Dictionnaire de Marine* d'Aubin, Parigi in-4; al *Dictionnaire de Marine*, formante parte dell' *Enciclopedia Metodica*, Parigi, 3 vol. in-4; al *Nuovo Dizionario Tecnologico*, Venezia 1833 e segg. in-8, ec.

ANDERSON (ALESSANDRO), nato in Aberdeen, in Scozia, professava le matematiche a Parigi nei primi anni del XVII secolo. Era, per quanto sembra, amico o discepolo del celebre Viète; ed ha reso un importante servizio alle scienze matematiche pubblicando a Parigi nel 1615 in-4 i due trattati: *De aequationum recognitione et emendatione*, lasciati inediti da quel matematico; la dedica, la prefazione, e l'appendice sono di Anderson. Ei possedeva assai bene, dice Montucla, l'analisi antica, e ne ha data la prova nel suo *Supplementum Apollonii Redivivi*, Parigi 1612 in-4, nel quale supplisce infatti tutto ciò che Ghiardi aveva lasciato non compiuto nella sua opera. Le altre opere di Anderson sono le seguenti: I. *Axiomata, pro Zeteticis Apollonionum Problematis* o *se jam pridem edita, in Supplementum Apollonii Redivivi*, Parigi, 1615 in-4; II. *Ad Angulorum Sectionum Analyticarum Theorematum Resolutionem a Francisco Vieta Fontenacensi primum excogitata, et absque ullo demonstratione ad nos transmissa, jam tandem demonstrationibus confirmata*, Parigi, 1615 in-4; III. *Vindiciae Archimedis*, Parigi, 1616 in-4; IV. *Exercitationum mathematicarum decus primo*, Parigi 1619 in-4. Tutte le opere di Anderson sono estremamente rare.

ANDERSON (ROSAAR), semplice fabbricatore di drappi di seta in Londra, nella metà del XVII secolo, pubblicò in inglese due opere più che elementari, dice Montucla, sulla stereometria e sulla perfetta maniera di stazzare. Eccone i titoli: I. *Proposizioni stereometriche, applicabili a diversi oggetti, ma specialmente destinate alla misura dei liquidi (stazzatura)*, Londra, 1668 in-8; II. *La misura dei liquidi perfezionata, per servire di supplemento alle Proposizioni stereometriche*, Londra, 1669 in-8.

ANDROIDE (Mecc.) (Dal greco *άνθρωπος*, *άνθρωπος*, uomo, e da *μορφή*, *μορφή*, forma umana, rassomiglianza). Automa che ha la forma umana, e che, per mezzo di molle connegate nel suo interno, eseguisce diversi movimenti e diverse funzioni proprie dell'uomo. Alberto Magno costruì, diceasi, una di tali macchine, le quali, nonostante l'ingegno grande che fanno supporre nei loro autori, offrono maggiore interesse alla curiosità, che reale utilità ai progressi della scienza. Nel secolo decorso, Vaucanson si acquistò, con un'opera di questo genere, una celebrità che in seguito non è stata superata da verun altro. L'automa sonatore di flauto, che costruì nel 1736 quest'ingegnoso meccanico, eccitò in Parigi la più viva ammirazione: si corse in folla per vedere questo capo-lavoro di meccanica, eseguito con una rara perfezione. L'automa sonava parecchie arie sul flauto, ed imitava perfettamente tutti i moti di un sonatore. L'Accademia delle scienze, di cui Vaucanson era membro, nominò fra i suoi soci una commissione per esaminare l'androide, che la pubblica fama esaltava oltremodo, e a cui si attribuivano molte facoltà, che non è in potere della scienza di dare alla materia. Questa commissione si assicurò che il meccanismo impiegato per fare emettere dei suoni al flauto eseguiva rigorosamente le medesime operazioni di un vero sonatore, e che il meccanico aveva nel tempo stesso imitato gli effetti e i mezzi della natura, con un'esattezza ed una precisione, a cui non si era immaginato che fosse possibile di giungere. Vaucanson ha pubblicato una memoria che ha riscosso gli elogi dell'Accademia, e nella quale si trova la descrizione del suo sonatore di flauto.

Si vedano in tal proposito le *Memorie* dell'Accademia delle scienze di Parigi per l'anno 1738, e il *Dictionnaire des mathématiques*, formante parte dell'Enciclopedia Métopica, alla parola *Androïde*. Alcuni anni dopo, Vaucanson costruì un altro automa di figura umana, che non ebbe minor successo del primo: rappresentava questo un sonatore di tamburo di provincia, che nel tempo stesso sonava il flauto e batteva sul tamburo.

L'androïde non è che una specie di automa. Si dà generalmente quest'ultimo nome a qualunque macchina che racchiude in sé stessa il principio del suo moto, e soprattutto a quelle che imitano i movimenti dei corpi animati. Tale parola viene dalla voce greca *αὐτόματος*, *spontaneo*, da *σὲ stesso*, composta di *αὐτός*, *σὲ stesso*, e di *μαίω*, *io voglio*, *io desidero*. La storia fa menzione di un gran numero di automi, ma le relazioni che si hanno, per la maggior parte molto dubbie, non danno veruna idea dei mezzi di esecuzione impiegati dagli autori di tali macchine. Archita costruì, si dice, un piccione che poteva volare, ma il celebre Vaucanson formò un'anatra, il di cui meccanismo le faceva eseguire tutte le funzioni del bere, del mangiare, e della digestione, o almeno della triturazione degli alimenti.

Gli sviluppi che potrebbero darsi alla descrizione di tali macchine ingegnose non possono entrare in quest'opera: ma si troveranno nelle opere di sopra citate. Nulladimeno non possiamo passare sotto silenzio una scoperta che fece Vaucanson nel costruire il suo sonatore di flauto, e che può interessare la scienza. Questo celebre meccanico, combinando i venti dei quali aveva bisogno per produrre l'effetto ch'ei cercava, riconobbe che il piccolo flauto è uno degli strumenti che maggiormente affaticano il petto dei sonatori. Fu d'uopo che i muscoli di questo viatore facciano uno sforzo equivalente a un peso di 28 kilogrammi, perchè appunto hanno bisogno di questa forza o di questo peso per produrre il sì alto, nota la più elevata a cui giunga questo strumento. *Vedi Vaucanson.*

ANDROMEDA (*Astron.*). Costellazione situata nell'emisfero boreale al nord dei Pesci e dell'Ariete: talvolta in latino chiamasi *Persea*, *Mulier catenata*, *Virgo devota*: gli Arabi in sua vece dipingono una foca, o vitello marino, incatenata con uno dei Pesci. Questa costellazione ha rapporto colla storia di Andromeda, che suo padre Cefeo fu costretto a sacrificare ad un mostro marino per salvare il suo regno dalla peste, e che fu liberata da Perseo. Questa costellazione comprende nel catalogo britannico 63 stelle, delle quali le principali sono le seguenti: α alla testa di Andromeda; questa stella è ancora comune colla costellazione di Pegasus, ed è allora chiamata *umbilicus Pegasi*; β alla cintura di Andromeda, detta ancora *mirach* o *mizar*; e γ al piede australe di Andromeda, detta anche *alamack*, e talvolta *alamec*. Per altre notizie allegoriche su questa costellazione si veda il *Trattato d'Astronomia* di Lalande lib. IV, n°. 490.

ANELAR, o **ANHELAR** (*Astron.*). Nome della stella segnata α alla testa di Castore, nella costellazione dei Gemelli.

ANELLO di SATURNO (*Astron.*). È questo un corpo solido, opaco e circolare, che circonda ad una certa distanza il pianeta di Saturno, e che mostra di esser situato nel piano del suo equatore. Quest'anello veduto obliquamente si mostra sotto una forma ovale o ellittica (*Tav. XIX, fig. 1*), ed apparisce come una sola sottilissima linea retta quando non ei presenta che la sua grossezza (*Tav. XIX, fig. 2*). È composto di due fasce schiacciate, larghe e sottili, situate in uno stesso piano, e presso a poco concentriche. La prima di queste fasce, o l'anello interno, è separata dal globo da un intervallo di 6912 leghe; la seconda fascia, o l'anello esterno, è separata dalla prima da un intervallo di sole 618 leghe; la loro grossezza è tutto al più di 35 leghe; finalmente il diametro esterno dell'insieme delle tre parti che compongono questo pianeta singolare è di 63,880 leghe. Noi qui da-

reng le misure che dietro diligentissime osservazioni ha ottenute il sig. STRUWE astronomo all'Osservatorio di Dorpat in Russia, e che si trovano registrate nei N. 97 e 130 dell'*Astronomische Nachrichten* (Notizie astronomiche) del Professore SCHUMACHER.

Diametro esterno dell' anello esteriore	40", 095
interno.	35 ,289
Diametro esterno dell' anello interno	34 ,475
interno.	16 ,668
Diametro equatoriale di Saturno	17 ,991
Larghezza dell' anello esterno	2 ,403
del vacuo fra gli anelli	0 ,408
dell' anello interno	3 ,003
Distanza dell' anello da Saturno.	4 ,339
Raggio equatoriale di Saturno.	8 ,095

L'esistenza di questa meravigliosa appendice di Saturno, che eccita il nostro stupore e la nostra meraviglia, era ignota agli antichi; la sua osservazione è dovuta alla perfezione recente degli strumenti astronomici. Una rapida scorsa sulla storia di tale scoperta faciliterà necessariamente l'intelligenza del fenomeno che essa ci ha rivelato.

Fu verso l'anno 1612 che l'illustre Galileo, coll'ajuto di un telescopio di una forza limitata, e di una costruzione incompleta, credè di vedere Saturno accompagnato da due globi, ch'ei giudicò esser due satelliti immobili di questo pianeta, al quale gli suppose aderenti, poichè questa scoperta gli fece dare a Saturno l'epiteto di *Triformis*, composto di tre parti. Il vivo stupore che gli cagionò questo fenomeno non fu eguagliato che da quello ch'ei provò quando, dopo due anni di osservazioni, vide sparire questi pretesi satelliti. Sebbene non fosse possibile a Galileo di congetturare la causa di tali apparenze, non ostante osò di prevedere il ritorno dei due pretesi globi che averan cessato di esser visibili. Ma la loro riapparizione, che in questo rapporto confermò le sue previsioni, non servì per lungo tempo che a somministrare tanto a lui, quanto agli altri astronomi del suo tempo, il testo ad un gran numero di congetture, che le ipotesi di Gassendi, di Evelio, e dello stesso Cassini lasciarono senza soluzione scientifica (Vedasi Weidler, *Historia Astronomiae*, Wittemberg, 1741, in-4^{to}, pag. 500). In seguito il celebre Huygens per mezzo di strumenti perfezionati, e dei quali egli stesso era l'autore, scoprì le vere cagioni di questo fenomeno, e ne stabilì la teoria, ch'ei pubblicò nel 1659, tale presso a poco quale è ammessa anche al presente. Infatti i due globi di Galileo comparvero a quel dotto osservatore come una lunga e sottile striscia di luce quasi aderente a Saturno. A misura che questo pianeta passò in altre situazioni rapporto al sole e alla terra, osservò che la striscia di luce andava allargandosi, e prendeva la forma di un'ellisse molto allungata; continuando il moto del pianeta, quest'ellisse si allargava sempre di più e prendeva l'apparenza di un circolo veduto obliquamente. Questa osservazione lo determinò a pensare che il fenomeno fosse prodotto da un corpo schiacciato e circolare, simile ad un anello. Dopo questa scoperta di Huygens, che la perfezione sempre crescente degli strumenti ha permesso di verificare, diverse particolarità di Saturno, che doverono sfuggirgli, sono state determinate; ma le osservazioni le più recenti, e che abbiamo fondamento di credere le più esatte, non hanno apportato che pochi cambiamenti nella spiegazione del fenomeno che presenta l'*Anello di Saturno* propriamente detto.

Domènico Cassini osservò che la larghezza dell'anello era divisa in due parti eguali da una striscia oscura, la di cui curvatura era simile a quella dell'anello.

Short assicurò di aver veduto più strisce nere concentriche, il che faceva supporre che l'anello fosse composto di più strati o di più anelli situati in uno stesso piano. Herschel avendo osservato per lungo tempo e attentamente l'anello, non solo scoprì delle strisce nere, ma avendo veduto che esse avevano la loro maggior larghezza verso l'estremità dell'asse maggiore, e quindi andavano stringendosi a misura che si avvicinavano all'asse minore, dove avevano la minima larghezza, giudicò che l'anello di Saturno fosse composto di due anelli concentrici e distinti.

È dovuta pure ad Herschel la scoperta del moto rotatorio dell'anello. Avendo egli infatti osservato alcuni punti più luminosi sull'anello esteriore, vide che essi avevano un moto di rotazione intorno ad un asse perpendicolare al piano dell'anello, nello spazio di dieci ore e 3a minuti. Una tal rotazione, qualunque impugnata da alcuni, si trova perfettamente d'accordo colle teorie dal celebre Laplace stabilite nella sua *Meccanica Celeste*, in forza delle quali vien dimostrata necessaria la rotazione negli anelli di Saturno, perchè le loro molecole possano stare in equilibrio a motivo delle attrazioni scambievoli e di quelle provenienti da Saturno: cosicchè sebbene gli strumenti ottici non siano giunti ancora a farci scoprire il moto rotatorio dell'anello interno, possiamo essere accertati che esso deve esistere. Ed è questo il più bel trionfo della scienza, di scoprire cioè in anticipazione i risultamenti dell'osservazione.

L'ombra che questo anello, o piuttosto questi anelli proiettano sul corpo del pianeta dalla parte più vicina al sole, e l'ombra che il pianeta stesso proietta sopra di essi dalla parte opposta dimostra che sono un corpo *solido e opaco*. L'asse di rotazione di Saturno è perpendicolare al piano degli anelli, e durante il giro del pianeta nella sua orbita conserva sempre il suo parallelismo. Il piano degli anelli conserva pure presso a poco la stessa inclinazione sul piano dell'orbita. L'inclinazione di esso sull'eclittica è di $28^{\circ} 34' 6''$, e i nodi degli anelli corrispondono a 167° , e 347° di longitudine. L'equazione del nodi trovata da Bessel, e riportata da Piana nelle *Effemeridi* di Milano per l'anno 1819, in una sua interessantissima memoria sull'apparenze dell'anello di Saturno, è la seguente:

$$\text{Longitudine del Nodi} = 166^{\circ} 52' 1'' + (t - 1800) 40'',57,$$

ove t indica l'anno e la frazione d'anno corrispondente al giorno pel quale si cerca la longitudine del nodo; ed il numero $40'',57$ esprime l'annua variazione di questa longitudine. Così quando il pianeta si trova nell'uno o nell'altro dei suoi nodi, il piano degli anelli passa pel sole che ne illumina soltanto la grossezza; e questa essendo, come di sopra abbiamo detto, di sole 36 leghe non è grande abbastanza da potere esser veduta dalla terra. Allora Saturno apparisce rotondo come tutti gli altri pianeti, e sebbene l'anello sia illuminato nella sua grossezza non può esso scorgersi che nei telescopi più forti, come quelli di Herschel, nei quali comparisce come una sottile linea luminosa che taglia il pianeta, e l'oltrepassa da ambedue le parti. Questo potrebbe spiegare la prima osservazione di Galileo.

L'anello sparisce ancora quando il suo piano passa pel nostro occhio, poichè allora non vediamo, come nel caso precedente, che la sua grossezza; e sparisce pure quando il suo piano passa tra il sole e la terra, poichè in questo caso la sua faccia illuminata non è rivolta verso di noi.

Il fenomeno della sparizione dell'anello si riproduce due volte in una stessa rivoluzione di Saturno, cioè ad intervalli di circa 15 anni, compendosi il giro di Saturno nella sua orbita nello spazio di 29 anni, 161 giorni, e 19 ore; ma a motivo della lentezza di questo immenso pianeta, la terra avendo il tempo di incontrare due altre volte il piano degli anelli, la loro disparizione in generale è doppia.

Essi per lungo tempo creduto che l'anello di Saturno fosse esattamente concentrico rispetto al pianeta, quando nel presente secolo Harding a Gottinga e Schwabé a Dessau, osservando con forti telescopj, vi rimarcarono un'eccentricità, in modo che il pianeta si accostava alcun poco alla parte occidentale dell'anello. Il sig. Struve di sopra rammentato si accinse nel 1828 a verificare con un eccellente rifrattore di Fraunhofer le osservazioni dei detti astronomi, e trovò infatti un'eccentricità nel senso medesimo da essi indicato. I risultamenti ottenuti da Struve, ridotti alla distanza media 9,53877 (preso per unità il raggio medio dell'orbita terrestre) di Saturno dal Sole, si trovano nel N.º 139 delle *Notizie Astronomiche* del Professore Schumacher, e sono i seguenti:

Distanza del limite esterno occid. dell'anello da Saturno . . . = 11",073

del limite esterno orient. dell'anello da Saturno . . . = 11",288

Differenza (risultante dal medio di 15 osservazioni) . . . = 0",215

La scienza che ha potuto determinare i movimenti degli astri, e le leggi colle quali tali movimenti si osservano, è ancora impotente a spiegare le cause della costruzione maravigliosa di molti di essi. Nonostante, descrivendo Saturno e il sistema completo di questo pianeta, noi renderemo conto con maggiore estensione delle altre particolarità che gli sono comuni coi suoi anelli (*Vedi SATURNO*). Frattanto rimanderemo il lettore ai diversi trattati di astronomia, fra i quali raccomandiamo quelli di Lalande, di Delambre, e di Santini.

ANELLO solare o orario. È questo una specie di piccolo quadrante portatile, che consiste in un anello o cerchio di rame, di due pollici circa di diametro, e di un terzo di pollice di larghezza.

In un punto del contorno dell'anello vi è un foro, pel quale si fa passare un raggio del sole, che fa un piccolo segno luminoso nella circonferenza interna del semicerchio opposto; e il punto sul quale cade questo piccolo segno indica l'ora che si cerca. Uno strumento così fatto non è buono che nei tempi dell'equinozio, e, perchè possa servire tutto il tempo dell'anno, conviene che il foro possa cangiarsi di sito, e che i segni dello zodiaco o i giorni del mese siano indicati sulla convessità dell'anello. In tal modo il quadrante potrà dare l'ora in qualunque giorno dell'anno.

Per servirsene basterà mettere il foro sul giorno del mese, o sul grado dello zodiaco che il sole occupa in quel giorno, e sospendere quindi il quadrante in faccia al sole: il raggio che passerà pel foro segnerà l'ora nella parte opposta della circonferenza.

ANELLO astronomico o universale. È uno strumento composto di due o tre cerchi, il quale serve a trovare l'ora del giorno in qualunque sito luogo della terra, mentre l'anello solare, del quale abbiamo parlato di sopra, non serve che per una sola latitudine. La figura 3 della tavola XIX rappresenta quest'anello nella sua costruzione più semplice. Esso si orizzonta come i quadranti equinoziali portatili (*Vedi GNOMONICA, e QUADRANTE*).

L'anello astronomico di cui parliamo è composto di due anelli o cerchi sptili del diametro di due a sei pollici. Il circolo esteriore AMPE (*Tab. XIX, fig. 3*) rappresenta il meridiano del luogo dove si fa l'osservazione; sul suo lembo si trovano due divisioni, ciascuna di 90°, diametralmente opposte, e che servono l'una per l'emisfero boreale e l'altra per l'emisfero australe. L'anello interno FG rappresenta l'equatore, e gira nel di dentro del primo per mezzo di due perni situati in F e in G. Dentro i due cerchi vi è una stretta e sottile lastra AP, che gira sui due perni DD, e che porta un piccolo foro che si può fare scorrere e fermare a piacere in qualunque punto della lastra. Essa si può considerare come l'asse del mondo, e le sue estremità come i due poli; da una

parte della medesima si notano i segni dello zodiaco, e dall'altra i giorni del mese. Sul meridiano vi è un pezzo pel quale sta sospeso lo strumento, e che può scorrere sulla circonferenza: questo pezzo termina in un anello H, al quale è unita una campanella K per tenere sospeso lo strumento.

Uso di questo strumento. Si pone il punto di sospensione dello strumento al grado di latitudine del luogo ove si eseguisce l'osservazione, per esempio a $48^{\circ} 50'$ per Parigi: si pone il foro mobile della lastra AP al grado del segno in cui si trova il sole al giorno del mese nel quale si è: si aprono quindi i due anelli finchè facciano tra loro un angolo retto, e si sospendono per la campanella K in modo che la lastra AP sia parallela all'asse del mondo, cioè che abbia le sue estremità rivolte ai poli. Ciò fatto, si gira il lato schiacciato della lastra AP fin tanto che il raggio del sole, che passa pel foro di essa, vada a battere sulla superficie dell'anello interno FG, sul quale sono notate le ore. Il punto dove cadrà il raggio solare indicherà l'ora dell'osservazione.

Per dividere la riga AP secondo i segni o i giorni, si pongono nel mezzo N gli equinozi 21 Marzo e 21 Settembre, e quindi tanto da una parte quanto dall'altra della riga si segnano le tangenti delle declinazioni progressive del sole per ciascun giorno, osservando che per le declinazioni boreali le divisioni dovranno farsi dal mezzo N della riga verso il polo nord, e per le declinazioni australi le divisioni dovranno farsi verso il polo sud.

Dobbiamo qui notare che l'ora di mezzodì non viene indicata da quest'anello, poichè trovandosi allora il sole sul meridiano, il circolo esteriore, che è nel piano del meridiano, impedisce che il raggio solare vada a cadere sul circolo interno. Un tale anello non potrà nemmeno indicare l'ora quando il sole si troverà sull'equatore, poichè in questo caso i suoi raggi essendo paralleli al piano del circolo interno verranno interamente intercettati dalla parte superiore di questo circolo. Per ovviare a tali inconvenienti è stato aggiunto all'anello astronomico un altro circolo munito di un'alidada. Noi non entreremo in ulteriori particolarità sulla costruzione di questo strumento, che non dà mai l'ora con una somma esattezza, e che è andato in oggi quasi affatto in disuso a motivo della perfezione, a cui sono giunti attualmente gli orologi.

ANELLO astronomico. Strumento di ottone in forma di anello, del quale si fa uso in mare per prendere le altezze del sole. Ha esso un piccolo foro alla distanza di 45 gradi dal punto di sospensione, e nella parte concava opposta del circolo ha varie divisioni, le quali segnano le altezze del sole di grado in grado, allorchando il raggio solare passando pel piccolo foro cade sulle medesime.

ANENOMETRO (*Mecc.*). (Da *anemos* vento e da *metron*, misura). Macchina per misurare la forza del vento. Il primo strumento di questo genere pare che fosse inventato da Wolf nel 1708, e perfezionato in seguito da Martin (*l'edi Wolfii, Elementa Mathematica*, Ginevra 1746, 5 vol. in-4, vol. II, pag. 319).

Nelle *Transazioni filosofiche* per l'anno 1766 il sig. A. Brice espone un metodo da lui praticato con successo per misurare le velocità del vento, per mezzo dell'ombra delle nuvole che passano sulla superficie della terra.

Il sig. Onu-en-Bray ha dato, nelle *Memorie dell'Accademia delle scienze di Parigi* dell'anno 1734, la descrizione di un anemometro di sua invenzione, ehe indica sopra una carta i differenti venti che hanno spirato nel corso di ventiquattro ore, coi tempi della loro durata e colle loro direzioni.

Il dott. Lind inventò nel secolo passato l'anemometro che è rappresentato dalla figura 4 della Tavola XIX. Consiste questo in un tubo ricurvo di vetro ABCDE che contiene dell'acqua o altro liquido. Il diametro del tubo è più piccolo nel fondo verso la piegatura C, all'oggetto di diminuire le oscillazioni, a cui va soggetta la colonna dell'acqua per le piccole variazioni nella forza del vento. Il

vento agisce sull'apertura A del tubo, e deprime il liquido che è nel braccio ABC, fintantochè la colonna d'acqua DE, differenza fra i due livelli B ed E, non faccia equilibrio alla forza del vento. Questa differenza si misura sopra una scala graduata appesa allo strumento. Quindi, conosciuta l'area della superficie B dell'acqua, ed osservata l'altezza DE, è facile il vedere che il peso di una colonna d'acqua di queste stesse dimensioni fa contrappeso ed equivale alla forza del vento. La velocità del vento può averli osservando che le velocità stanno fra loro prossimamente come le radici quadrate delle resistenze, e che la forza di un vento che fa 20 piedi inglesi in un secondo, agendo sopra una superficie di un piede quadrato, solleva un peso di dodici once inglesi.

Si trova la descrizione di molti strumenti di questo genere nell' *Enciclopedia Britannica*. Il lettore potrà ancora consultare con profitto il *Dictionnaire de Physique* di Libes, Parigi, 1806, 3 vol. in-8, il *Mathematical Dictionary* di Hutton, Londra, 1790, 2 vol. in-4, e il *Nuovo Dizionario Tecnologico*, Venezia 1833 e segg. in-8.

ANEMOSCOPIO (*Mecc.*). (Dal greco *anemos*, vento, e *skopia*, osservo). Macchina che indica le variazioni del vento.

Ottone di Guericke diede impropriamente il nome di *anemoscopio* ad una macchina di sua invenzione, che si assomigliava ai così detti *Diavoli di Cartesio*, e che serviva a indicare i cambiamenti del tempo.

Lomiers dimostrò che un tale anemoscopio non era in sostanza che una ingegnosa applicazione del barometro (Vedi gli *Acta Eruditorum* an. 1684).

ANFISCI (*Astron. e Geogr.*). Con questo nome si indicano quei popoli, che a mezzogiorno vedono le loro ombre talvolta verso uno dei poli, e talvolta verso l'altro. Luciano osserva con ragione che nella zona temperata boreale, essendo rivolti a ponente, si ha sempre l'ombra a destra, ossia al nord; mentre nella zona torrida, in alcuni tempi dell'anno, si vede l'ombra a sinistra, ossia verso il sud, essendo sempre rivolti a ponente.

*Ignotum vobis, Arabes, venistis in orbem,
Umbras mirati nemorum non ire sinistras.*

LUC. PHARS. III. vers. 247.

Ei si dice pure che a Siene, città di Egitto, situata sotto il tropico del Cancro, l'ombra del sole spariva a mezzodì il giorno del solstizio, e non si stendeva né a destra né a sinistra.

..... *Umbras nusquam flectente Syene.*

LUC. PHARS. II. vers. 587.

Le diverse direzioni delle ombre a mezzogiorno hanno dato luogo ad una divisione geografica degli abitanti della terra in *Eterosci*, *Perisci*, e *Anfisci*. Gli *Eterosci* sono quelli che hanno l'ombra meridiana costantemente rivolta verso il medesimo polo. Tali sono gli abitanti delle zone temperate: così nelle nostre regioni l'ombra verticale all'ora di mezzodì si dirige sempre verso il nord, perchè è sempre opposta al sole che si trova al sud. I *Perisci* sono quelli le di cui ombre girano nello spazio di ventiquattro ore verso tutti i punti dell'orizzonte. Tali sono gli abitanti delle zone frigide: pei quali il sole non tramonta per un certo tempo dell'anno: quando il sole è al sud le ombre si dirigono verso il nord, e quando è al nord le ombre si proiettano verso il sud. Gli *Anfisci* sono quelli la cui ombre meridiane si trovano talvolta al nord e talvolta al sud, ed in questa circostanza si trovano gli abitanti della zona torrida: ma, affinchè questa definizione comprendesse pure quelli che abitano i tropici stessi, Varenio, nella sua *Geographia generalis*, Amsterdam 1650 in-24° pag. 558, sostituì la parola *Asci* per indicare quei popoli, pei quali in qualche giorno dell'anno l'ombra diviene nulla; quindi divise gli *Asci* in *Asci-Anfisci* ed in *Asci-Eterosci*.

Dix. di Mat. l'ol. I.

I primi sono quelli pei quali l'ombra meridiana qualche volta si proietta verso il nord e qualche volta verso il sud, e diviene nulla due volte l'anno; i secondi sono quelli le di cui ombre sono costantemente rivolte verso una medesima parte, e spariscono soltanto una volta l'anno, cioè nel giorno in cui il sole giunge al tropico sotto il quale questi popoli sono situati. Queste differenti parole sono formate dalla parola greca *αἴα*, *umbra*, colle preposizioni relative a ciascun significato, come *ἀπὸ*, *ex utraque parte*, ec.

ANFORA (*Astron.*). Si dà qualche volta questo nome alla costellazione più comunemente conosciuta sotto il nome di Aquario. Vedi **AQUARIO**.

ANGELI (STEFANO DELLA), illustre matematico italiano, nacque in Venezia il 21 settembre 1623. Entrato giovanissimo nella religione dei PP. Gesuiti, vi fece tali progressi negli studj religiosi, che all'età di soli anni 21 fu fatto lettore di filosofia e teologia nel convento di quell'ordine in Ferrara; ma avendo trovata pregiudicevole l'aria di quella città si recò a Bologna, dove si applicò allo studio, delle matematiche sotto la direzione del celebre P. Bonaventura Cavalieri della stessa sua religione. Furono tali gli avanzamenti che fece in questo studio, che alla morte del Cavalieri gli venne offerta la cattedra di matematiche che questi occupava, e che egli per modestia ricusò. Si portò allora a Roma, dove per altri cinque anni si occupò con ardore dello studio delle matematiche. In seguito insignito venne di molte cariche nella sua religione, cui egli disimpegnò con molta lode. Non avendo per altro giammai lasciati in abbandono gli studj suoi matematici, gli venne conferita nel 1662 la cattedra di matematiche nella università di Padova con uno stipendio di 260 fiorini, che gli fu successivamente in più volte accresciuto fino a 3100. Egli pubblicò molte opere concernenti la geometria, trascendente, ed occupò con lustro la cattedra fino alla sua morte avvenuta agli 11 d'Ottobre 1697. Per maggiori particolarità sulla vita di questo dotto matematico si potrà consultare il Mazzuchelli, *Gli Scrittori d'Italia*, Brescia, 1753-63, 2 tom. in 6 part. in fol., ed il Montucla, *Histoire des mathématiques*, Parigi, 1799, 4 vol. in-4.

Le sue opere sono le seguenti: I. *De infinitis parabolis, de infinitisque solidis ex variis rotationibus ipsarum, partiumque earundem genitis ec.*, libri IV, Venezia, 1654, in-4; II. *Problemata geometrica sexaginta*, Venezia, 1658 in-4; III. *Miscellaneum hyperbolicum et parabolicum*, Venezia, 1659 in-4; IV. *Miscellaneum geometricum*, Venezia, 1660, in-4; V. *De infinitorum spirallium spatiorum mensura*, Venezia 1660 in-4; VI. *De superficie unguulae, et de quartis litorum parabolicorum, et cycloidum tractatus duo*, Venezia 1661 in-4; VII. *De infinitarum cochlearum mensuris, ac centrīs gravitatis*, Venezia 1661 in-4; VIII. *Accessio ad stereometriam et mechanicam, pars prima*, Venezia, 1662, in-4; IX. *De infinitis parabolis, liber quintus*, Venezia 1663 in-4; X. *De infinitis spiralibus inversis, de infinitisque hyperbolis*, Padova, 1669 in-4; XI. *Considerazioni sopra la forza di alcune ragioni fisiche matematiche addotte dal M. R. P. Gio. Batista Riccioli della Compagnia di Gesù nel suo Almagesto Nuovo, ed Astronomia riformata, contro il sistema Copernicano; Dialoghi due*, Venezia 1667 in-4; XII. *Seconde considerazioni sopra ec.*, Padova 1668 in-4; XIII. *Terze considerazioni sopra ec.*, Venezia 1668 in-4; XIV. *Quarte considerazioni sopra ec.*, Padova 1669 in-4; XV. *Della Gravità dell'Aria e fluidi ec., dialoghi primo e secondo*, Padova 1671 in-4; XVI. *Della Gravità dell'Aria e fluidi ec., dialoghi terzo, quarto e quinto*, Padova 1672 in-4.

ANGOLARE (*Geom.*). Dicesi *angolare* tutto ciò che forma degli angoli o che è relativo agli angoli.

Moto Angolare. Chiamasi così quel moto che viene eseguito da un corpo gi-

rando intorno ad un centro, essendo il vertice dell'angolo al centro del moto. Così i pianeti descrivono un moto *angolare* intorno al sole, un pendolo descrive un moto *angolare* intorno al suo punto di sospensione, ec. Il moto angolare di un corpo è tanto maggiore, quanto è maggiore l'angolo che esso descrive in un tempo dato. Due corpi possono avere lo stesso moto angolare, quantunque i loro moti reali siano differenti. Infatti tutti i punti di un pendolo, messo in oscillazione, descrivono lo stesso angolo, e tuttavia i movimenti reali o assoluti di ciascuno di questi punti sono tanto maggiori, quanto essi sono più lontani dal punto di sospensione.

Sezioni Angolari. Termine usato da Viète per indicare gli archi multipli della circonferenza. Viète ha scoperto la legge di accrescimento delle corde di questi archi, e P ha indicata nel 1579, nel suo *Canone mathematico*, il quale non è altro che una tavola di seni costruita secondo questa legge. Quest'opera è estremamente rara, poichè l'autore, avendovi scoperto un gran numero di errori tipografici, ha distrutto tutti gli esemplari che ha potuto procurarsi.

Viète trovò che, se una semicirconferenza AJIB (Tab. XIX, fig. 7) è divisa in archi eguali BC, CD, DE, EF, ec., indicando il raggio coll'unità, e la corda supplementaria AC con x , si hanno i seguenti valori:

$$AB = 2$$

$$AC = x$$

$$AD = x^2 - 2$$

$$AE = x^3 - 3x$$

$$AF = x^4 - 4x^2 + 2$$

$$AG = x^5 - 5x^3 + 5x$$

$$AH = x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2$$

$$AJ = x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x$$

$$AK = x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2$$

$$AL = x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x$$

$$\text{ec. ec.}$$

nei quali le potenze di x decrescono di 2 in 2, ed i coefficienti numerici sono: l'unità, per i primi termini; i numeri della serie 2, 3, 4, 5 ec. per i secondi termini; i numeri triangolari, formati dalla serie precedente, per i terzi termini; i numeri piramidali, per i quarti termini; i numeri triangolo-triangolari per i quinti termini, ec., ec.

Cercando il rapporto delle stesse corde Viète trova ancora, indicando la corda BC con y ,

$$2 = AB$$

$$y = BC$$

$$2 - y^2 = AD$$

$$3y - y^3 = BE$$

$$2 - 4y^2 + y^4 = AF$$

$$5y - 5y^3 + y^5 = AG$$

$$2 - 9y^2 + 6y^4 - y^6 = AH$$

$$7y - 14y^3 + 7y^5 - y^7 = BI$$

$$2 - 16y^2 + 20y^4 - 8y^6 + y^8 = AK$$

$$9y - 30y^3 + 27y^5 - 9y^7 + y^9 = BL$$

$$\text{ec. ec.}$$

La legge dei coefficienti è la stessa di quella della precedente serie.

Queste formule si dimostrano oggi facilmente: ma nello stato della scienza all'epoca in cui scriverà Viète, esse sono una prova incontestabile del genio superiore di quell'uomo celebre. Si consultino le *Opere matematiche* di Viète raccolte da Schooten, e stampate a Leida nel 1646 in fol. pag. 287 e segg.

Per dimostrare le due serie di valori di sopra riportate, basterà osservare che per la prima noi abbiamo dalla Trigonometria i seguenti valori, chiamando α l'angolo BAC, e 2α , 3α , 4α ec. gli angoli multipli BAD, BAE, BAF ec.,

$$AB = AB$$

$$AC = AB \cos \alpha$$

$$AD = AB \cos 2\alpha$$

$$AE = AB \cos 3\alpha$$

$$AF = AB \cos 4\alpha$$

ec. ec.

Facendo adesso $AB = 1$, e $2 \cos \alpha = x$, ed invece delle funzioni di archi multipli $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$ ec. ponendo i loro valori dati per mezzo delle varie potenze delle funzioni di archi semplici, dalla formula seguente (*Vedi Sisto*)

$$\cos m\alpha = \cos^m \alpha - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} \alpha \sin^2 \alpha + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos^{m-4} \alpha \sin^4 \alpha - \text{ec.}$$

si otterranno senza difficoltà tutti i valori di sopra indicati nella prima serie.

In quanto alla seconda serie di valori, si ha parimente dalla Trigonometria, ritenendo le stesse denominazioni di sopra adottate per gli angoli che hanno il vertice comune in A,

$$BC = AB \sin \alpha$$

$$AD = AB \cos 2\alpha$$

$$BE = AB \sin 3\alpha$$

$$AF = AB \cos 4\alpha$$

ec. ec.

Facendo ora in queste formule $AB = 1$, $2 \sin \alpha = y$, e ponendo in vece dei seni e coseni di archi multipli i loro valori dati per i seni e coseni degli archi semplici dalla espressione di $\cos m\alpha$ già riportata, e dalla seguente di $\sin m\alpha$ (*Vedi Sisto*)

$$\begin{aligned} \sin m\alpha = m \cos^{m-1} \alpha \sin \alpha - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos^{m-3} \alpha \sin^3 \alpha \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5} \cos^{m-5} \alpha \sin^5 \alpha - \text{ec.} \end{aligned}$$

si troveranno dopo facili riduzioni tutti i valori indicati nella seconda serie.

Per maggiori cognizioni sulle sezioni angolari, il lettore potrà consultare l'opera di Lagrange intitolata *Leçons sur le calcul des fonctions*, Parigi 1806 in-8. Lez. X e XI.

ANGOLO (*Geom.*). Si chiama *angolo* l'inclinazione di una retta AB (*Tav. I, fig. 5*) verso un'altra CB, che essa incontra in un punto qualunque B. Il punto d'incontro B si chiama il *vertice* dell'angolo, e le rette stesse AB e CB ne sono i *lati*. Siccome possiamo prolungare indefinitamente queste due rette, senza che venga alterata la loro scambievolmente inclinazione, cost è evidente che la grandezza di un angolo non dipende dalla lunghezza dei suoi lati, ma soltanto dalla differenza delle loro direzioni.

Un angolo è quindi tanto più grande, quanto la differenza delle direzioni dei

suoi lati è maggiore, ed il suo *maximum* di grandezza ha luogo quando questi lati, avendo direzioni opposte, non formano che una sola linea retta (Nozioni PRELIMINARI, 29.). Da questa sola osservazione possiamo facilmente dedurre tutti i rapporti degli angoli fra loro. Quanto di loro nomi particolari, per evitare le ripetizioni, rimandiamo alle Nozioni PRELIMINARI.

1. *TEOREMA.* La somma di due angoli adiacenti è equivalente a quella di due angoli retti.

La somma di due angoli adiacenti è eguale al *maximum* di grandezza degli angoli: infatti, siccome l'angolo DAC (Tav. I, fig. 12) non è altro che la differenza della direzione di AD dalla direzione di AC, e l'angolo BAD è pure la differenza della direzione di BA da quella di AD; dunque la somma di questi angoli, o di queste differenze, è eguale alla differenza della direzione di BA da quella di AC, vale a dire ad un *maximum*.

Da ciò si deduce che la somma di due angoli adiacenti è eguale alla somma di due altri angoli adiacenti qualunque. Ora gli angoli retti (Tav. I, fig. 15) sono due angoli adiacenti; dunque la somma di due angoli adiacenti è equivalente a quella di due angoli retti.

2. *Corollario.* Tutti gli angoli retti sono eguali fra loro; poichè un angolo retto è la metà della somma di due angoli adiacenti.

3. *TEOREMA.* Se due linee rette s'incontrano in un punto, e se a questo punto si conduce un'altra linea retta, qualora gli angoli adiacenti che ne risultano equivalgano insieme a due angoli retti, le due rette date non formeranno che una sola e medesima linea retta.

Siano (Tav. XIX, fig. 6) AB e BC le rette le quali s'incontrano nel punto B, e sia BD l'altra retta che condotta allo stesso punto B forma con esse i due angoli adiacenti ABD, DBC, la di cui somma è eguale a due angoli retti: in tal caso le rette AB e BC formeranno una sola linea retta.

Infatti, se BC non è il prolungamento di AB, lo sia BE, ed allora si avranno i due angoli adiacenti ABD, DBE, i quali, per ciò che è stato dimostrato di sopra (1), daranno l'eguaglianza

$$ABD + DBE = 2 \text{ retti};$$

ma per supposizione si ha

$$ABD + DBC = 2 \text{ retti},$$

e d'altronde due cose eguali ad una terza sono eguali fra loro, così si concluderà

$$ABD + DBE = ABD + DBC,$$

dalla quale eguaglianza si trae

$$DBE = DBC,$$

il che è impossibile; dunque tutte le volte che due linee rette AB e BC s'incontrano in un punto B, e formano con una terza BD due angoli adiacenti tali che si abbia

$$ABD + DBC = 2 \text{ retti},$$

la linea ABC non forma che una sola e medesima linea retta.

4. *TEOREMA.* Gli angoli opposti al vertice formati da due rette AC, DE, (Tav. I, fig. 17), le quali si tagliano in un punto O, sono eguali.

La somma dei due angoli adiacenti AOD, DOC è equivalente a quella degli altri due angoli adiacenti DOB, COB; onde si ha l'eguaglianza

$$AOD + DOC = DOB + COB,$$

e togliendo DOC da una parte e dall'altra si ha

$$AOD = COB.$$

Con un ragionamento simile si troverebbe pure $AOB = DOC$.

Si vede immediatamente, dall'ispezione della figura, che la somma dei quattro angoli AOD, AOB, COB, DOC è equivalente a quella di quattro angoli retti; ed è pure evidente che si avrebbe la medesima somma, dividendo questi angoli con un numero qualunque di rette condotte al punto O; come non si avrebbe egualmente che una somma equivalente a due angoli retti, dividendo due angoli adiacenti con un numero qualunque di rette condotte al vertice comune. Si esprimono queste proprietà nella seguente maniera.

5. Tutti gli angoli formati intorno ad un punto preso sopra una retta, e situati da una medesima parte di questa retta, hanno per somma due angoli retti.

6. Tutti gli angoli formati intorno ad un punto, e situati in tutte le direzioni, tanto da una parte quanto dall'altra di una retta che passa pel punto dato, hanno per somma quattro angoli retti.

7. **TEOREMA.** Se gli angoli opposti formati da quattro linee rette che s'incontrano in un punto sono eguali, queste linee formeranno due sole linee rette.

S'incontrino le quattro linee AO, BO, CO, DO (Tav. I, fig. 17.) nel punto O, in modo che gli angoli opposti AOD, BOC siano eguali, e che siano pure eguali gli altri angoli opposti AOB, COD; allora AOC, e BOD saranno due linee rette.

Infatti, siccome la somma degli angoli AOB ed AOD è per ipotesi eguale alla somma degli angoli BOC, COD, e la somma di tutti e quattro è (6) eguale a quattro angoli retti, ne segue che ciascuna delle dette somme deve essere eguale a due angoli retti, e quindi che la linea retta AO fa con le due BO, e DO due angoli adiacenti, i quali sono insieme eguali a due angoli retti; perciò (3) BOD è una linea retta. In egual maniera può essere evidentemente provato che AOC è pure una linea retta; da ciò dunque si deduce che le quattro linee formano due sole linee rette.

8. **Corollario.** Se AO e CO, per esempio, siano in linea retta, e gli angoli AOD, BOC siano eguali, BO e DO saranno pure in linea retta, poichè in virtù dell'ipotesi essendo gli angoli BOC, AOB eguali alla somma di due angoli retti, saranno pure eguali alla somma di due angoli retti gli altri due angoli AOB, AOD; dunque la retta AO fa colle due rette BO, OD due angoli adiacenti eguali a due retti, dunque (3) BO, e OD formano una sola linea retta.

9. **TEOREMA.** Gli angoli corrispondenti formati dall'incontro di due parallele (Tav. X, fig. 8.) AB, CD, e da una secante EH, sono eguali.

Le rette AB e CD, essendo parallele, hanno una medesima direzione; per conseguenza la differenza della direzione di AB da quella di EH è identicamente la stessa della differenza della direzione di CD da quella della stessa retta EH. In altri termini, i due angoli corrispondenti AFG, CGH sono eguali. Accade evidentemente lo stesso degli altri angoli corrispondenti AFE e CGF, EFB e FGD, BFG e DGH.

10. **Corollario.** L'eguaglianza degli angoli corrispondenti produce necessariamente quella degli angoli alterni interni, come pure quella degli angoli alterni esterni.

Infatti, gli angoli opposti al vertice FGD, CGH essendo eguali (4), si hanno nel medesimo tempo le due eguaglianze

$$FGD = CGH, \text{ e } AFG = CGH;$$

donde si conclude

$$FGD = AFG,$$

così ancora per gli altri angoli alterni interni.

Quanto ai angoli alterni esterni, abbiamo ancora le due eguaglianze:

$$EFB = FGD, \text{ e } FGD = CGH,$$

dalle quali si ricava

$$EFB = CGH;$$

cioè l'eguaglianza dei due angoli alterni esterni EFB e CGH : ragionamento che si applica egualmente agli altri angoli alterni esterni.

11. **TEOREMA.** *La somma dei tre angoli di un triangolo qualunque ABC (Tav. XIX, fig. 5) è equivalente a due angoli retti.*

Si prolunghi la base BC di una lunghezza qualunque CD , e per il punto C si conduca la retta CM parallela al lato AB . Avremo intorno al punto C i tre angoli ACB , ACM , e MCD , la di cui somma è eguale a due angoli retti (5), eguaglianza che esprimeremo così

$$ACB + ACM + MCD = 2 \text{ retti.}$$

Ma gli angoli BAC e ACM sono alterni interni rapporto alla secante AC , e gli angoli ABC ed MCD sono corrispondenti rapporto alla secante ED ; si ha dunque (9 e 10)

$$BAC = ACM, \text{ e } ABC = MCD.$$

Sostituendo BAC ed ABC in luogo di ACM e di MCD nella prima eguaglianza, essa diverrà

$$ACB + BAC + ABC = 2 \text{ retti.}$$

Dunque la somma dei tre angoli del triangolo ABC è eguale alla somma di due angoli retti.

12. **COROLLARIO.** *L'angolo esterno ACD formato dal lato AC di un triangolo, e dal prolungamento del lato adiacente BC , è eguale alla somma dei due angoli interni opposti CAB , ABC .*

Poichè $CAB = ACM$, e $ABC = MCD$; dunque

$$CAB + ABC = ACM + MCD = ACD.$$

13. **COROLLARIO.** *Un triangolo non può avere che un solo angolo retto, ed a più forte ragione non può avere che un solo angolo ottuso.*

14. **COROLLARIO.** *In un triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è eguale ad un angolo retto.*

15. **TEOREMA.** *In un medesimo circolo, o in circoli eguali, gli angoli eguali che hanno i loro vertici al centro intercettano sopra la circonferenza archi eguali.*

Siano i due circoli eguali (Tav. XIX, fig. 8.) B e b , e gli angoli eguali ABC , abc , i quali hanno i loro vertici ai centri di questi circoli. Gli archi AC ed oc intercetti tra i lati di questi angoli sono eguali.

Infatti, se si suppone il circolo b trasportato sopra il circolo B , in modo che i centri coincidano, e che il raggio ab cada sopra il raggio AB , questi due circoli, essendo eguali, coincideranno perfettamente in tutte le loro parti; ma allora, siccome l'angolo abc è eguale all'angolo ABC , il lato bc cadrà sopra il lato BC ; e poichè questi lati sono raggi eguali, il punto c si troverà sopra il punto C , e per conseguenza gli archi oc ed AC coincideranno perfettamente. Questi archi sono dunque eguali.

Reciprocamente, gli angoli che hanno i loro vertici al centro, e che intercettano archi eguali sopra la circonferenza, sono eguali.

Siano i due archi eguali AC , ac ; gli angoli ABC , abc , i di cui lati intercet-

tano questi archi, sono eguali; poichè, se non lo fossero, si potrebbe sempre costruire un angolo $\widehat{abd}$ maggiore o minore di $\widehat{abc}$, e che fosse eguale ad $\widehat{ABC}$; ma allora, per la proposizione diretta, gli archi AC ed ad sarebbero eguali. Ora abbiamo supposto $AC = oc$; dunque si avrebbe pure $oc = od$, il che è assurdo. Dunque, poichè non si può essere un angolo maggiore o minore di $\widehat{abc}$, il quale sia eguale ad $\widehat{ABC}$, questi due angoli sono necessariamente eguali.

16. **TEOREMA.** *Gli angoli che hanno i loro vertici al centro di un medesimo circolo o di circoli eguali stanno fra loro come gli archi intercetti tra i loro lati.*

Siano i due angoli MBN , $m\widehat{bn}$ (Tav. XIX, fig. 9), i quali hanno i loro vertici ai centri dei due circoli eguali B e b , e i di cui lati intercettano gli archi MN ed mn ; si avrà la proporzione

$$MBN : m\widehat{bn} :: MN : mn.$$

Infatti, gli archi MN e mn essendo misurati con un arco qualunque M_1 , preso per unità di misura, possiamo supporre che il primo contenga m volte la misura M_1 , e che il secondo contenga n volte questa medesima misura, vale a dire che il rapporto di questi due archi sia lo stesso di quello dei numeri m , n , e che perciò si abbia la proporzione

$$MN : mn :: m : n.$$

Ora i numeri m ed n possono essere *razionali* o *irrazionali*, ossia, il che è lo stesso, i due archi MN ed mn possono essere commensurabili o incommensurabili. Nel primo caso, dividendo l'arco MN in m parti eguali, M_1 , $1a$, $2a$, $3a$, $4a$, ec., l'arco mn conterrà n di queste parti m_1 , $1a$, $2a$, $3a$, $4a$, ec. Se dai punti di divisione si conducono le rette B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , ec., b_1 , b_2 , b_3 , b_4 , ec., l'angolo MBN sarà diviso in m angoli eguali (15), e l'angolo $m\widehat{bn}$ sarà diviso in n angoli eguali; il rapporto di questi due angoli sarà dunque quello di $m:n$, cioè lo stesso di quello degli archi MN ed mn . Si ha dunque effettivamente

$$MBN : m\widehat{bn} :: MN : mn.$$

Se i due archi MN ed mn fossero incommensurabili, vale a dire se non esistesse alcun arco M_1 , per quanto piccolo si possa supporre, il quale fosse capace di essere contenuto un numero esatto di volte in MN e in mn , il rapporto di questi archi sarebbe anche in questo caso lo stesso di quello degli angoli

MBN ed $m\widehat{bn}$, poichè il rapporto $\frac{MN}{mn}$ sarebbe allora eguale ad una quantità irrazionale, che per far meglio comprendere lo spirito della dimostrazione supporremo per ora eguale a $\sqrt{3}$: si avrebbe dunque

$$MN : mn :: 1 : \sqrt{3}$$

$\sqrt{3}$ è eguale alla frazione $1,73205080756$ ec., la serie delle cifre decimali essendo infinita.

Ora si potrebbe prendere 1 , o $1,7$, o $1,73$, o $1,732$ ec., per valori approssimati di $\sqrt{3}$; ed è evidente, che quanto maggiore sarà il numero delle cifre decimali che si prenderanno, tanto più ci avvicineremo al vero valore. Prendendo dunque

$1,7$ per una prima approssimazione, il rapporto $\frac{MN}{mn}$ sarà presso a poco $\frac{1}{1,7}$ o $\frac{10}{17}$;

e dividendo MN in 10 parti eguali, l'arco mn conterrà 17 di queste parti, più un resto qualunque on ; allora, condotta la retta bo , avremo per quello che abbiamo dimostrato precedentemente

$$MBN \hat{=} m\widehat{bo} :: MN : mo.$$

Prendiamo adesso $1,73$, per valore approssimato di $\sqrt{3}$, il rapporto $\frac{MN}{mn}$

sarà presso a poco $\frac{1}{1,73}$ o $\frac{100}{173}$; dividendo l'arco MN in 100 parti, l'arco mn conterrà 173 di queste parti, più un resto $d'n$ evidentemente più piccolo di on . Supponiamo ancora condotta la retta bo' , avremo pure

$$MBN : mbo' :: MN : mo'$$

Prendendo $1,732$ per valore approssimato di $\sqrt{3}$, troveremo egualmente un arco mo'' , il quale darebbe

$$MBN : mbo'' :: MN : mo'',$$

e così di seguito.

Si vede facilmente che gli archi mo , mo' , mo'' , ec., aumentano successivamente, e differiscono sempre meno dall'arco proposto mn , e che prendendo per valori approssimati di $\sqrt{3}$ le quantità $1,7$; $1,73$; $1,732$; ec., abbiamo trovato degli angoli mbo , mbo' , mbo'' , ec., i di cui rapporti con l'angolo MBN sono gli stessi di quelli dei loro archi rispettivi mo , mo' , mo'' , ec., con l'arco MN . È evidente che prendendo un maggior numero di decimali per il valore di $\sqrt{3}$ si troverebbero sempre degli angoli, i quali avrebbero la stessa proprietà. Dunque ciò avrà luogo per un numero qualunque di cifre della serie $1,732050$ ec., e per conseguenza anco per la totalità di queste cifre, ossia per la quantità $\sqrt{3}$, che esse rappresentano. Così in tutti i casi si ha

$$MBN : mbo :: MN : mo.$$

Per generalizzare questa dimostrazione, fondata interamente sopra la natura delle quantità incommensurabili o irrazionali (si vedano queste parole nel Dizionario),

basta osservare che quando il rapporto $\frac{MN}{mn}$ è incommensurabile, esso è eguale ad

una quantità la di cui forma generale è $\sqrt[n]{A}$, e il di cui sviluppo, composto di un numero infinito di termini, è della forma

$$B+C+D+E+F+G+ec.$$

Così, i rapporti

$$1 : B,$$

$$1 : B+C,$$

$$1 : B+C+D,$$

$$ec., ec.,$$

si avvicinano sempre più al vero rapporto $\frac{MN}{mn}$. Ora, ragionando ed operando

come abbiamo fatto di sopra, si vede che ciascuna somma B , $B+C$, $B+C+D$, ec., corrisponde ad un angolo, il di cui rapporto con l'angolo MBN preso per unità è eguale a quello degli angoli intercetti; succede necessariamente lo stesso per la somma di un numero qualunque di termini della serie

$$B+C+D+E+F+G+ec.,$$

e conseguentemente ancora per la somma di tutti i termini, ossia per il numero

$\sqrt[n]{A}$, che è rappresentato da questa somma.

17. TEOREMA. Due angoli, che hanno il vertice al centro di due circoli differenti, stanno fra loro come gli archi intercetti divisi per i loro raggi.

Supponendo che si abbiano i due angoli al centro ACB, e DOE (Tav. XIX, fig. 10) nei circoli ABM, DEN, si avrà la proporzione

$$ACB : DOE :: \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$$

Infatti, sopra uno dei lati DO, prolungato se bisogna, si prenda FO = AC, e fatto centro in O, e col raggio FO, si descriva l'arco FG; i due angoli ACB, FOG (= DOE) daranno (16)

$$ACB : DOE :: AB : FG,$$

e dividendo i due termini del secondo rapporto per le quantità eguali AC ed FO, si otterrà,

$$ACB : DOE :: \frac{AB}{AC} : \frac{FG}{FO}$$

D'altronde dagli archi simili DE ed FG si ha la proporzione (l'edi Anco)

$$FG : DE :: FO : DO,$$

ossia, alternando,

$$FG : FO :: DE : DO,$$

donde $\frac{FG}{FO} = \frac{DE}{DO}$; per conseguenza facendo l'opportuna sostituzione si ottiene in fine

$$ACB : DOE :: \frac{AB}{AC} : \frac{DE}{DO}$$

18. TEOREMA. Essendo dato un angolo qualunque, se si suppone descritto un circolo che abbia il suo centro al vertice di quest'angolo, l'arco intercetto tra i suoi lati potrà servirgli di misura.

Sia l'angolo ABC (Tav. XIX, fig. 11), il di cui vertice è situato al centro B di un circolo. Quest'angolo avrà per misura l'arco AC.

Un angolo non può essere misurato che da un altro angolo preso per unità di misura, poichè non si possono paragonare insieme che quantità della stessa natura:

supposto che MBN sia quest'unità, la misura di ABC sarà $\frac{ABC}{MBN}$, e dalle cose dette di sopra si avrà la proporzione

$$ABC : MBN :: AC : MN.$$

Ora, se prendiamo MN per unità di misura degli archi, il numero che esprimerà la

misura di AC sarà $\frac{AC}{MN}$; ma per la proporzione precedente $\frac{AC}{MN} = \frac{ABC}{MBN}$, dunque

la misura di un angolo qualunque è eguale alla misura dell'arco intercetto tra i suoi lati, prendendo per unità di misura di questo l'arco intercetto tra i lati dell'angolo che ha servito di unità di misura per quello; per conseguenza sarà indifferente il misurare direttamente un angolo o l'arco intercetto tra i suoi lati, ottenendosi in ambedue i modi un medesimo risultato, se non che, essendo

molto più comodo il misurare un arco, è stato ormai universalmente convenuto di prendere per misura di un angolo l'arco intercetto tra i suoi lati.

19. *Scolio.* Nell'antico sistema metrico, seguito anco al presente in tutta l'Europa, si prende per unità di misura l'angolo i di cui lati intercettano la 360^{ma} parte della circonferenza descritta dal suo vertice; e questa parte si chiama *grado*. Così, quando si dice, per esempio, che un angolo è di 30 gradi, si vuole

indicare che quest'angolo intercetterebbe, fra i suoi lati, $\frac{30}{360}$ della circon-

ferenza. Il grado si suddivide in 60 parti, che si chiamano *minuti*; il minuto in 60 parti, che si chiamano *secondi*; il secondo in 60 *terzi*, ec., ec. L'angolo retto in questo sistema è di 90 gradi.

Nel sistema metrico francese, si prende l'angolo retto per unità di misura: questo si divide in 100 *gradi*; il grado in 100 *minuti*; il minuto in 100 *secondi* ec., ec. La circonferenza intera è allora divisa in 400 gradi.

La prima divisione chiamasi *divisione sessagesimale*, e la seconda, *divisione centesimale*. Gli strumenti in uso essendo per la maggior parte divisi in 360 gradi, ci serviremo ordinariamente, in quest'opera, della divisione sessagesimale, a meno che non si avverta il contrario in alcuni casi particolari. Del resto, è facile passare da una di queste divisioni all'altra, il loro rapporto essendo quello di 360:400.

20. *TEOREMA.* L'angolo formato da una tangente e da una corda ha per misura la metà dell'arco sotteso dalla corda.

Sia l'angolo BAC (Tav. XX, fig. 1) formato dalla tangente AC e dalla corda AB; quest'angolo ha per misura la metà dell'arco ANB.

Poiché, se si conducono i raggi AD e BD, l'angolo DAC sarà retto (Vedi CIRCOLO). Ma nel triangolo isoscele ADB gli angoli alla base sono eguali (Vedi TRIANGOLO ISOSCELE); dunque l'angolo al vertice ADB è eguale a due retti meno due volte l'angolo DAB. Ora, l'angolo proposto BAC è eguale ad un retto meno l'angolo DAB; dunque quest'angolo è la metà di ADB. Così, la misura dell'angolo ADB essendo l'arco ANB (18), la misura dell'angolo BAC sarà la metà di quest'arco.

21. *TEOREMA.* Un angolo che ha il suo vertice alla circonferenza di un circolo ha per misura la metà dell'arco intercetto tra i suoi lati.

... Sia quest'angolo ACB (Tav. XX, fig. 2). Se si conduce la tangente CD, si avranno i due angoli DCA e DCB, le di cui misure saranno le metà degli archi CNA, e CAB; ma l'angolo proposto è la differenza di questi due angoli, dunque la sua misura sarà la differenza delle loro misure, ossia la metà dell'arco AB compreso tra i suoi lati.

22. *Corollario I.* Tutti gli angoli che hanno il loro vertice alla circonferenza di un medesimo circolo, e i di cui lati passano per le estremità di una medesima corda, sono eguali fra loro, poiché tutti hanno per misura la metà del medesimo arco.

23. *Corollario II.* Un angolo che ha il suo vertice alla circonferenza di un circolo, e i di cui lati passano per le estremità del diametro, è retto, poiché ha per misura il quarto della circonferenza.

24. *TEOREMA.* Un angolo che ha il suo vertice nell'interno di un circolo ha per misura la metà della somma degli archi intercetti tra i suoi lati e tra il prolungamento di questi medesimi lati.

Sia l'angolo APB (Tav. XX, fig. 3): se si prolungano i suoi lati fintantochè incontrino la circonferenza nei punti C ed E, la misura di quest'angolo sarà $\frac{1}{2}(AB+CE)$; poichè, se si conduce la corda AC, l'angolo APB, esterno rapporto al

triangolo APC, sarà eguale alla somma dei due angoli interni opposti CAE, ACB(12). La sua misura sarà dunque eguale alla somma delle misure di questi angoli, vale a dire ad $\frac{AB}{2} + \frac{CE}{2} = \frac{1}{2}(AB+CE)$.

25. TEOREMA. L'angolo formato da due secanti che s'incontrano fuori di un circolo ha per misura la metà della differenza degli archi intercetti tra i suoi lati.

Sia ABC (Tav. XX, fig. 3) quest'angolo; la sua misura sarà $\frac{1}{2}(AC-DE)$.

Poichè, se si conduce la corda AE, l'angolo AEC, esterno al triangolo AEB, sarà eguale alla somma dei due angoli ABC, BAE; si ha dunque

$$ABC = AEC - BAE,$$

e, per conseguenza, la misura dell'angolo ABC sarà eguale alla differenza delle misure degli angoli AEC, BAE, vale a dire ad $\frac{AC}{2} - \frac{DE}{2}$, o, il che è lo stesso, a $\frac{1}{2}(AC-DE)$.

26. Se la secante BA divenisse tangente in a, l'angolo aBC avrebbe ancora per misura la metà della differenza degli archi aAC, aDE.

27. Si dimostrerebbe ancora nella stessa maniera che se i due lati dell'angolo, il di cui vertice è fuori del circolo, sono due tangenti, come MP e PN, quest'angolo ha per misura la metà della differenza degli archi MEDACN, e MMN.

28. Quanto agli angoli ABI e aBI (Tav. XX, fig. 3), supplementi, l'uno di ABC e l'altro di aBC, è facile concludere da ciò che precede che il primo ha per misura $DE + \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}EC$, ed il secondo $aE + \frac{1}{2}EC$.

Infatti, in quanto all'angolo ABI, siccome la somma dei due angoli ABI e ABC è eguale a due angoli retti, così essi hanno per misura la metà della circonferenza ADECA, cioè

$$\frac{1}{2}(AD+DE+EC+AC).$$

Ora se da questa si toglie la misura dell'angolo ABC, eguale (25) a $\frac{1}{2}(AC-DE)$, è evidente che risulterà per la misura dell'angolo ABI

$$DE + \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}EC.$$

Con lo stesso metodo si troverà $aE + \frac{1}{2}EC$ per la misura dell'angolo aBI.

29. Corollario. L'angolo inscritto in un segmento è acuto, retto, o ottuso, secondo che il segmento è maggiore, eguale, o minore della semicirconferenza.

30. PROBLEMA I. Costruire sopra una linea data AB (Tav. XX, fig. 4) un angolo eguale ad un angolo dato D.

Dal punto D si descriva, con un raggio qualunque, l'arco FE, il quale incontri i due lati dell'angolo dato D. Dal punto A, con lo stesso raggio, si descriva un arco ma, e si prenda mn eguale ad FE; per il punto m si conduca la retta AC; l'angolo CAB sarà eguale all'angolo D.

31. PROBLEMA II. Dividere un angolo dato BAC (Tav. XX, fig. 5) in due angoli eguali.

Si prenda Am eguale ad An, e dai due punti m ed n si descrivano, con uno stesso raggio, due archi che si taglino in un punto O; si conduca da questo punto la linea OA; essa dividerà l'angolo BAC in due angoli eguali. Vedi PERPENDICOLARE.

32. PROBLEMA III. Sopra una data linea retta PQ (Tav. XX, fig. 6) descrivere un segmento capace dell'angolo dato A, ossia un segmento tale che

tutti gli angoli che vi si possono inscrivere siano eguali all'angolo dato A. Si prolunghi PQ di una lunghezza a piacere QB, si faccia nel punto Q l'angolo CQB eguale all'angolo dato A, dal punto Q si elevi sopra CD la perpendicolare QO, e dal mezzo di PQ si alzi sopra PQ la perpendicolare MO; quindi fatto centro in O, punto d'incontro delle due perpendicolari, e con un raggio OQ, si descriva una circonferenza; il segmento cercato, sarà PRQ.

Infatti, siccome QO è un raggio perpendicolare alla retta CD nel punto Q, così CD è una tangente, e perciò (20) l'angolo PQD ha per misura la metà dell'arco PNQ: ma l'angolo inscritto PRQ ha pure per misura la metà di PNQ, dunque l'angolo $PRQ = PQD = CQB = A$; dunque tutti gli angoli inscritti nel segmento PRQ sono eguali all'angolo dato A.

33. PROBLEMA IV. *Dal vertice A (Tav. XX, fig. 7) di un angolo dato BAC, condurre una retta AD tale, che tirando per uno qualunque dei suoi punti le rette MP, MQ, le quali facciano degli angoli conosciuti a e b, con i lati AC, AB, queste rette stiano fra loro nel rapporto costante di due linee conosciute, m, n.*

Da due punti E, F, presi arbitrariamente sopra i lati AC, AB, si conducano le rette ES, FR, le quali formino con AC ed AB, gli angoli $AES = a$, $AFR = b$; si prenda $EG = m$, $FR = n$; si tirino GK e HK rispettivamente parallele a CA ed a BA; queste linee si taglieranno in un punto K; la retta AK indefinitamente prolungata avrà la proprietà domandata. Infatti, si conducano KL e KN rispettivamente parallele alle linee GE, HF; si avrà

$$KE = GE = m, \quad KN = HF = n, \quad \text{angolo } ALK = a, \quad \text{angolo } ANK = b.$$

Da un punto qualunque M di AD, si conducano delle parallele MP, MQ, a KL e a KN; queste parallele formeranno con AC ed AB degli angoli eguali agli angoli dati a, b; e le proprietà dei triangoli simili daranno

$$AM : AK :: MP : KL :: MQ : KN,$$

dunque

$$MP : MQ :: KL : KN : m : n.$$

La retta AD ha perciò le proprietà domandate.

Questo problema è sempre possibile, poichè tagliandosi le rette AB, AC, le parallele HK, GK a queste linee si debbono pure tagliare necessariamente.

34. La misura degli angoli per mezzo di strumenti i quali facciano conoscere il numero dei gradi, minuti, secondi, ec., dei loro archi, è un'operazione di un grande uso nella Navigazione, nell'Agrimensura, nell'Astronomia, ec., (*Vedi queste parole*). Quando sono sopra la carta si adopra il QUADRANTE o il COMPASSO M PROPORZIONALE. *Vedi* questa parola nel Dizionario.

35. Finqui non abbiamo considerato che gli angoli formati da rette situate sopra uno stesso piano: passiamo adesso a parlare delle altre specie di angoli.

Si chiamano angoli *curvilinei* quelli formati da due linee curve.

Si dicono angoli *mistilinei* quelli formati da una linea retta e da una linea curva.

Si chiamano angoli *piano-lineari* quelli formati dall'inclinazione di una retta sopra un piano; tale è per esempio l'angolo formato dall'obliqua NB (Tav. XX, fig. 9), che cade sopra il piano GE e lo incontra in un punto B, formando con esso l'angolo piano-lineare MBD.

36. TEOREMA. *Se da un punto qualunque M (Tav. XX, fig. 9) di un'obliqua BM al piano GE, si conduce una perpendicolare MD sopra questo piano, e se per il piede dell'obliqua e della perpendicolare si tiri la retta BD, l'an-*

golo MBD sarà il più piccolo di tutti gli angoli formati dall'obliqua BM con le rette condotte per il suo piede nel piano GE.

Si conduca una retta qualunque BK nel piano GE, si prenda $BC=BD$, e si tiri MC. La perpendicolare MD al piano GE sarà più corta dell'obliqua MC; ma i lati MB, BD del triangolo MBD sono rispettivamente eguali ai lati MB, BC del triangolo MBC, ed MD è minore di MC; dunque l'angolo MBD è pure minore dell'angolo MBC.

Osservazione. L'angolo MBD è quello che si prende per misura dell'inclinazione dell'obliqua BM sopra il piano GE; e il triangolo rettangolo MBD prova che l'angolo formato da una retta con un piano è il complemento dell'angolo formato da questa retta con la perpendicolare condotta da uno dei suoi punti sopra il piano.

37. **TEOREMA.** Quando due rette che si tagliano sono parallele a due altre rette, che pure si tagliano, gli angoli formati dalle due prime rette sono rispettivamente eguali agli angoli formati dalle altre due.

Per due punti qualunque A, A' (Tav. XXI, fig. 4), si condurrà a piacere delle rette BD, CE, B'D', C'E', rispettivamente parallele a due a due. Si prenda $AB=A'B'$ e $AC=A'C'$, e si condurrà le rette AA', BB', CC', BC, B'C'. Le linee AB, A'B', essendo eguali e parallele, fanno sì che BB' sia eguale e parallela ad AA'; per la stessa ragione, AC essendo eguale e parallela ad A'C', le rette CC', AA' sono eguali e parallele; dunque BB' è eguale e parallela a CC'; dunque BC è eguale a B'C'; i triangoli ABC, A'B'C' sono conseguentemente eguali, e quindi sono pure eguali gli angoli BAC, B'A'C', il che dimostra il teorema enunciato.

38. **TEOREMA.** Gli angoli formati da una retta qualunque GC (Tav. XX, fig. 8.), con piani paralleli DN, PQ, sono eguali.

Infatti, si conduca da un punto qualunque G di CG una perpendicolare GB al piano DN; per le proprietà dei piani paralleli, essa sarà pure perpendicolare al piano PQ; per le rette GC, GB si condurrà un piano CGB, che, per le stesse proprietà dei piani paralleli, taglierà i piani DN e PQ, facendo due intersezioni AH ed MK, che saranno parallele; dunque gli angoli GAH, GMK, che la linea GC forma coi piani paralleli DN, e PQ, saranno eguali.

39. **TEOREMA.** Quando più rette condotte da un punto dato nello spazio fanno degli angoli eguali con un piano, esse incontrano questo piano nei punti di una circonferenza che ha per centro il piede della perpendicolare abbassata dal punto dato sopra il piano.

Dal punto dato A (Tav. XX, fig. 12), si tirino delle oblique AI, AM, AN, ec., che formino degli angoli eguali col piano GE, e che incontrino questo piano in I, M, N, ec. Si conduca AB perpendicolare al piano GE; per il piede B di questa perpendicolare, e per punti I, M, N, ec., si tirino le rette BI, BM, BN, ec.; gli angoli AIB, AMB, ANB, ec., che formano le oblique col piano GE sono per ipotesi eguali; dunque i triangoli rettangoli ABI, ABM, ABN, ec., sono eguali, e le rette BI, BM, BN, ec., lo sono pure: i punti I, M, N, ec., sono perciò situati sopra la circonferenza descritta dal punto B come centro, col raggio BI.

40. **TEOREMA.** Allorchè più rette eguali AI, AM, AN, ec., (Tav. XX, fig. 12) fanno degli angoli eguali con una retta AD, le estremità I, M, N, ec., di queste rette sono situate sopra una circonferenza, il di cui piano GE è perpendicolare ad AD; e il punto d'incontro di AD col piano GE è il centro B della circonferenza.

Per il punto I, si conduca un piano GE perpendicolare ad AD; questo piano incontrerà AD in un punto B. Si tirino le rette BI, BM, BN, ec.; i triangoli ABI, ABM, ABN, ec., saranno eguali, come aventi un angolo acuto eguale, compreso fra

lati eguali; gli angoli ABI , ABM , ec., saranno dunque eguali; ma l'angolo ABI è retto, perciò le linee BI , BM , BN , ec., sono perpendicolari ad AD ; tutte queste linee sono dunque nel piano GE perpendicolare ad AD ; ma le rette BI , BM , BN , ec., sono eguali, dunque le loro estremità si trovano sopra una circonferenza che ha per centro B , come voleva dimostrarsi.

41. Per comprendere che cosa sia un angolo formato da due piani $ABCD$, $ABEF$ (*Tav. XX, fig. 10.*), che si tagliano lungo la retta AB , supponiamo che essendo in principio questi due piani applicati l'uno sull'altro si lasci fisso il primo AC , e si faccia girare l'altro intorno alla intersezione AB ; la quantità di cui il secondo piano si allontana dal primo chiamasi l'*angolo diedro* formato dai due piani, angolo che può in altro modo definirsi l'*inclinazione* di un piano sopra un altro. Nell'angolo diedro i lati sono costituiti dai due piani $ABCD$, $ABEF$, che si dicono le *facce* dell'angolo; e il vertice dell'angolo diedro vien formato dall'intersezione AB dei due piani, la quale si chiama lo *spigolo* o la *costola* dell'angolo diedro.

L'angolo diedro si enuncia colle lettere AB , della costola quando è imatto, e, quando trovasi unito con altri angoli che hanno la medesima costola, s'indica con quattro lettere, osservando di porre nel mezzo le lettere della costola, ed alle estremità le lettere dei due piani, prendendone una per piano. Così l'angolo formato dai due piani AC , AD (*Tav. XXI, fig. 1.*) s'indica $CBAD$, quello formato dai due piani AE , AD s'indica $EBAD$.

Si chiama *piano bisettore* di un angolo diedro, il piano che passando per la sua costola lo divide in due angoli diedri soprapponibili, ossia eguali.

La grandezza di un angolo diedro non dipende dall'estensione dei piani che lo contengono, ma bensì dall'apertura più o meno grande che fanno fra di loro questi piani.

42. Dobbiamo adesso vedere come possa misurarsi un angolo diedro. La misura di quest'angolo si fa dipendere dall'angolo rettilineo o piano formato da due rette AD , AF (*Tav. XXI, fig. 2.*), condotte nei due piani ad un medesimo punto A dell'intersezione preso a piacere. Ma, affinché l'angolo rettilineo DAF possa servire di misura all'angolo dei piani, è necessario ed è sufficiente che questi due angoli siano nulli nello stesso tempo, e crescano e decrescano nello stesso rapporto.

La prima condizione esige che le rette AD , AF formino degli angoli eguali coll'intersezione AB ; poichè altrimenti l'angolo DAF di queste rette non diverrebbe nullo quando il piano mobile AE venisse a coincidere col piano fisso. Supporremo dunque che gli angoli BAD , BAF siano eguali.

La seconda condizione non potrebbe aver luogo se gli angoli BAD , BAF non fossero retti. Infatti, se il piano AE , applicato in principio sul piano AC , fa una mezza rivoluzione intorno ad AB in modo da venire a distendersi sul prolungamento AG del piano AC , i due piani, prolungati indefinitamente, coincidano in tutta la loro estensione, la retta AF prenderà la posizione AK , e bisognerà che AK sia il prolungamento di AD , poichè altrimenti l'*inclinazione* di due piani che coincidono sarebbe misurata da un angolo rettilineo KAD che sarebbe acuto, o retto, o ottuso, il che non può essere. Ma gli angoli BAK , BAD sono eguali, dunque questi angoli sono retti.

Per conseguenza, affinché l'angolo diedro di due piani che si tagliano possa esser misurato dall'angolo piano o rettilineo di due rette condotte nei due piani ad uno stesso punto dell'intersezione dei piani, è necessario che queste due rette siano perpendicolari all'intersezione dei piani.

Veduta la qualità necessaria dell'angolo piano che vuole assumersi come misura dell'angolo diedro, il seguente teorema serve a far vedere che questa qualità è ancora sufficiente.

43. **TEOREMA.** *Un angolo diedro ha per misura l'angolo formato dalle perpendicolari condotte nei due piani, ad un medesimo punto dell'intersezione.*

1°. L'angolo formato dalle perpendicolari è lo stesso, qualunque sia il punto dell'intersezione in cui esse s'iniziano; poichè conducendo nei piani AC, AE (Tav. XX, fig. 10) delle perpendicolari AD, BC, AF, BE, a due punti qualunque de l'intersezione AB dai piani, BC sarà paralella ad AD, e BE sarà paralella ad AF; gli angoli CBE, DAF sono dunque eguali (37).

Rimane adesso a dimostrare che l'angolo rettilineo delle due perpendicolari varia nel medesimo rapporto dell'angolo dei piani.

2°. Quando l'angolo diedro CPOD (Tav. XX, fig. 11), formato dai piani AP, PB, è eguale all'angolo diedro C'P'O'D', formato dai piani A'P', P'B', gli angoli rettilinei CPD, C'P'D', formati dalle perpendicolari PC, PD, P'C', P'D', condotte in questi piani alle intersezioni PO, P'O', saranno eguali, poichè, gli angoli diedri essendo eguali, se applichiamo il piano A'P' sopra il piano AP, in modo che i lati O'P', P'C' dell'angolo retto O'P'C' cadano sopra i lati OP e PC dell'angolo retto OPC, il piano P'B' prenderà la direzione del piano PB, e O'P' cadendo sopra OP, la perpendicolare P'D' ad O'P' cadrà sopra PD perpendicolare ad OP; i due lati P'C', P'D' dell'angolo C'P'D' cadendo sopra i due lati PC, PD dell'angolo CPD, questi due angoli sono eguali.

Reciprocamente, quando gli angoli rettilinei CPD, C'P'D' sono eguali, gli angoli diedri CPOD, C'P'O'D' sono eguali, poichè applicando l'angolo rettilineo C'P'D' sopra il suo eguale CPD, in modo che P' cada in P, e che i lati P'C', P'D' cadano rispettivamente sopra PC e PD, la perpendicolare O'P' al piano dell'angolo C'P'D' coinciderà necessariamente con la perpendicolare OP al piano dell'angolo CPD; i due piani, i quali formano l'angolo diedro C'P'O'D', coincidono dunque con i due piani che formano l'angolo diedro CPOD; questi angoli sono dunque eguali.

3°. L'angolo delle perpendicolari varia nello stesso rapporto dell'angolo diedro; infatti, siano tre piani qualunque AB', AE', AC' (Tav. XXI, fig. 3), i quali si taglino lungo una retta AA'; se da un punto qualunque A dell'intersezione, si conducano nei tre piani delle perpendicolari AB, AE, AC all'intersezione, queste perpendicolari saranno in un piano perpendicolare ad AA'. Si tratta di provare che si ha la seguente proporzione

angolo diedro BAA'C:angolo diedro BAA'E::angolo BAC:angolo BAE. . . (1)

Quando gli angoli BAC, BAE sono commensurabili, se si descrive un arco BEC da A come centro, con un raggio qualunque, gli archi BE, EC staranno nello stesso rapporto degli angoli. Supponiamo che questo rapporto sia quello di q a q' ; se si divide l'arco BEC in q parti eguali, una di queste parti sarà contenuta q' volte nell'arco BE; cosicchè si avrà

angolo BAC : angolo BAE :: q : q' .

Conducendo un piano per ciascun punto di divisione dell'arco BEC e per la retta AA', risulta (2°) che l'angolo diedro BAA'C sarà diviso in q parti eguali, e che l'angolo diedro BAA'E conterrà q' di queste parti; si avrà dunque

angolo diedro BAA'C : angolo diedro BAA'E :: q : q' .

Queste due ultime proporzioni danno evidentemente

angolo diedro BAA'C : angolo diedro BAA'E :: angolo BAC : angolo BAE.

4°. Nel caso che gli angoli piani BAC, BAE, corrispondenti agli angoli diedri BAA'C, BAA'E, fossero incommensurabili si potrebbe provare, che ha luogo an-

cora la stessa verità, ma siccome d'altronde la dimostrazione è in tutto simile a quella data precedentemente (16) per gli angoli piani, perciò stimiamo inutile il ripeterla. Si conclude dunque che la proposizione è vera in tutti i casi, e che l'angolo diedro è misurato dall'angolo piano formato dalle perpendicolari condotte nei piani che lo formano all'intersezione dei piani medesimi.

Quest'angolo potendo essere acuto, retto, o ottuso, anco l'angolo diedro misurato potrà essere acuto, retto, o ottuso: se è retto, i due piani si dicono *perpendicolari* fra loro.

Resulta pure da questa dimostrazione che un angolo piano doppio, triplo, quadruplo, ec. corrisponde ad un angolo diedro doppio, triplo, quadruplo, ec. . . . ; e, più generalmente, ad un maggior angolo piano corrisponde un angolo diedro maggiore.

44. TEOREMA. Quando due piani s'incontrano, la somma dei due angoli adiacenti formati da questi piani è eguale a due angoli retti.

Sia ABC (Tav. XXI, fig. 5) un piano che incontri il piano PQ; per un punto D dell'intersezione AB si conduca EF perpendicolare ad AB nel piano PQ, e DG perpendicolare ad AB nel piano AC; gli angoli GDF, GDE misurano l'inclinazione del piano AC con le due parti BQ, l'A del piano PQ; ora $GDF + GDE$ è eguale a due angoli retti, dunque il piano AC fa col piano PQ due angoli adiacenti, la di cui somma è eguale a due angoli retti.

45. TEOREMA. Allorchè due piani si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono eguali.

Siano i due piani PQ, CH (Tav. XXI, fig. 6); per un punto D della loro intersezione AB si conducano nei due piani le rette EF, GI, perpendicolari ad AB; gli angoli formati da queste perpendicolari misureranno gli angoli diedri corrispondenti formati dai piani; ma per il teorema dimostrato all'articolo 4 si ha $GDE = IDF$, e $GDF = IDE$, dunque rimane piecamente dimostrata la proposizione enunciata.

46. TEOREMA. Due piani paralleli, tagliati da un terzo, godono, rapporto agli angoli che formano con questo terzo piano, delle stesse proprietà, di cui godono due rette parallele rapporto ad una terza retta che le tagli.

Infatti, se si tagliano due piani paralleli QY, NV (Tav. XXI, fig. 7) con un piano RF, le intersezioni Ps, DC saranno parallele. Da un punto qualunque s di Ps si conduca un piano ST perpendicolare a Ps; questo piano sarà perpendicolare alla retta CD parallela a Ps (vedi PERPENDICOLARI), e le sue intersezioni con i piani QY, NV, ed RF saranno le rette Qy, Nb, Ra; le due prime saranno parallele; Nb ed Ra saranno perpendicolari a CD; ed Ra e Qy saranno perpendicolari a Ps; gli angoli formati dalle rette Qy, Nb, Ra misureranno dunque gli angoli formati dai piani QY, NV, RF: ma le proprietà delle parallele Qy, Nb, tagliate dalla retta Ra, danno

$$\text{l'angolo } QsC + Ncs = \text{due angoli retti,}$$

$$\text{l'angolo } RsQ = RCN = asy = aCb,$$

$$\text{l'angolo } Rsy = RCb = asQ = aCN;$$

dunque il principio enunciato rimane dimostrato.

Osservazione. La reciproca non è vera; poichè è evidente, per esempio, che due piani ABC, DEF (Tav. XXI, fig. 8), i quali non sono paralleli, possono formare degli angoli eguali con un terzo piano PQ.

47. TEOREMA. Quando due piani che si tagliano sono rispettivamente paralleli a due altri piani, l'intersezione dei due primi piani è parallela all'intersezione dei due altri, e gli angoli formati dai due primi piani sono rispettivamente eguali agli angoli formati dagli altri due piani.

S'immaginino quattro piani PQ, PR, TN, TS (*Tav. XXI, fig. 9*), paralleli due a due, i quali si tagliano lungo le rette PZ, TG; si prolunghino i piani PR, TN, fino alla loro intersezione CD; le intersezioni CD, ZP del piano DR, con i piani paralleli DN, PQ, saranno parallele; le intersezioni CD, GT del piano TN, con i piani paralleli DR, TS, saranno pure parallele; ma due rette parallele ad una terza retta sono parallele fra loro (*Vedi PARALLELE*), dunque le intersezioni TG, PZ sono parallele fra loro.

Di più, in virtù del precedente teorema, l'angolo diedro RZPQ è eguale a RCDN, e RCDN è eguale a SGTN; dunque RZPQ è eguale a SGTN; ciò che dimostra il principio enunciato.

48. In generale si chiama **ANGOLO POLIEDRO** (e più ordinariamente, ma impropriamente, **ANGOLO SOLIDO**) la *porzione indefinito dello spazio compresa fra più piani, i quali si tagliano due a due, e si riuniscono in un medesimo punto S* (*Tav. XXI, fig. 1a*). Il punto S si chiama il *vertice* dell'angolo poliedro; si chiamano *facce* gli angoli piani che lo comprendono; la riunione di queste facce forma la *superficie* dell'angolo poliedro; e le loro intersezioni due a due, SA, SB, SC, SD, SE, ne sono le *costole*, a gli *spigoli*. Ciascuna delle costole serve nel medesimo tempo di lata a due facce contigue. In un angolo poliedro si distinguono tanti angoli diedri quante facce vi sono.

Un angolo poliedro s'indica con la lettera del suo vertice, dopo la quale si pongono di seguito tutte le altre lettere che servono a rappresentare rispettivamente un punto di ciascuna costola.

Per indicare il numero delle facce si sostituisce ordinariamente alla denominazione generale d'angolo poliedro quella di *angolo triedra, tetraedra, pentaedro*, ec., secondochè le facce sono *tre, quattro, cinque*, ec. Sono necessari almeno tre piani per formare un angolo poliedro, quindi l'angolo triedro è il più semplice degli angoli poliedri.

Un angolo poliedro di più di tre facce può avere uno a più angoli diedri rientranti, ed allora si dice *concavo*; se tutti i suoi angoli diedri sono *salienti*, esso è *convesso*. Si può dire ancora che un angolo poliedro è convesso o concavo, secondochè una retta può farare la sua superficie in due punti solamente, ovvero in un maggior numero di punti.

Si chiama *piano diagonale* qualunque piano condotta per due costole che non appartengano alla medesima faccia. Per mezzo di un numero conveniente di tali piani, qualunque angolo poliedro è decomponibile in angoli triedri, nella stessa maniera che qualunque poligono può decomporci in triangoli per mezzo di diagonal.

Un angolo poliedro si dice *regolare* quando ha tutte le sue facce eguali, e tutti i suoi angoli diedri eguali; in tal caso esso è necessariamente convesso.

49. **TEOREMA.** Quando tre angoli piani formano un angolo poliedro, ciascun angolo piano è minore della somma dei due altri.

Per dimostrare ciò, basta provare che il maggiore dei tre angoli piani è minore della somma dei due altri. S'immagini un angolo solido B (*Tav. XXI, fig. 11*), formato dai tre angoli piani DBE, EBF, DBF, e suppongasi che DBF sia il più grande di questi tre angoli. Nel piano DBF, si conduca la retta BK che faccia un angolo DBK=DBE; si prenda BH=BE; da un punto qualunque F di BF, e per i punti H ed E, si tirino le rette FHD, ed FE; quindi si conduca DE. I triangoli DBE, DBH saranno eguali, come aventi un angolo eguale compresa fra lati rispettivamente eguali; i lati DE, DH saranno dunque eguali. Ora

$$DH + HF < DE + EF;$$

dunque

$$HF < EF.$$

I lati BF, BH del triangolo HBF essendo rispettivamente eguali ai lati BF, BE del triangolo EBF, ed HF essendo minore di EF, si ha dalla Geometria che l'angolo HBF è minore di EBF. Ma gli angoli HBD, EBD sono eguali; dunque

$$HBF + HBD < EBF + EBD,$$

ossia

$$DBF < EBF + EBD,$$

come si voleva dimostrare.

50. TEOREMA. La somma degli angoli piani, i quali formano un angolo poliedro convesso, è minore di quattro angoli retti.

Si conduca un piano che tagli le facce dell'angolo solido A (Tav. XXI, fig. 12), e sia il poligono BCDEF l'intersezione del piano con queste facce; se da un punto qualunque M, preso nell'interno di questo poligono, si tirano delle rette MB, MC, MD, ME, MF, ai vertici degli angoli del poligono, il teorema precedente darà

$$MCB + MCD < ACB + ACD,$$

$$MBC + MBF < ABC + ABF, \text{ ec.}$$

Ciò posto, se si considera che i lati del poligono servono di base ai triangoli i di cui vertici sono in M, e ai triangoli i di cui vertici sono in A, possiamo concludere che la somma degli angoli alla base dei primi è minore della somma degli angoli alla base dei secondi. Ma vi sono tanti triangoli intorno al punto M quanti ve ne sono intorno al punto A; dunque la somma di tutti gli angoli dei primi triangoli è eguale alla somma di tutti gli angoli degli ultimi; quindi la somma degli angoli che sono al punto M deve essere maggiore della somma degli angoli i quali sono al punto A. Ora la somma degli angoli in M è eguale a quattro angoli retti; dunque la somma degli angoli piani riuniti in A è minore di quattro angoli retti.

51. TEOREMA. Quando i tre angoli piani, i quali formano un angolo triedro, sono rispettivamente eguali ai tre angoli piani i quali formano un altro angolo triedro, gli angoli piani eguali sono egualmente inclinati l'uno sull'altra.

S'immaginino due angoli solidi S, S' (Tav. XXI, fig. 13), formati da tre angoli piani rispettivamente eguali, sicchè si abbia

$$DSE = D'S'E', DSF = D'S'F', ESF = E'S'F'.$$

Per dimostrare che l'angolo formato dai piani DSE, DSF è eguale all'angolo formato dai piani D'S'E', D'S'F', basta far vedere che gli angoli rettilinei che misurano questi angoli diedri sono eguali fra loro. A tale effetto, da un punto qualunque A dell'intersezione SD dei piani DSE, DSF, si condurranno in questi piani le rette AB, AC, perpendicolari all'intersezione SD; l'angolo BAC misurerà l'inclinazione dei piani ASB, ASC. Prendendo S'A' = SA, e conducendo nei piani D'S'E', D'S'F' le rette A'B', A'C', perpendicolari all'intersezione S'D' di questi due piani, l'angolo B'A'C' misurerà l'inclinazione dei piani A'S'B', A'S'C'. Basta dunque dimostrare che gli angoli BAC, B'A'C' sono eguali. Ciò non presenta difficoltà veruna, poichè gli angoli ASB, A'S'B' essendo eguali per ipotesi, e gli angoli BAS, B'A'S' essendo retti per costruzione, i triangoli BAS, B'A'S' hanno un lato eguale AS = A'S', e gli angoli adiacenti eguali; questi triangoli sono dunque eguali. Si proverebbe egualmente che i triangoli rettangoli CAS, C'A'S' sono eguali; dunque

$$AB = A'B', AC = A'C', SB = S'B', SC = S'C'.$$

I triangoli $BSC, B'S'C'$, avendo un angolo eguale $BSC = B'S'C'$, compreso fra lati eguali, sono eguali; dunque $BC = B'C'$; i triangoli $BAC, B'A'C'$, che hanno i loro lati rispettivamente eguali, sono perciò eguali, e per conseguenza gli angoli $BAC, B'A'C'$ sono eguali; l'angolo dei piani ASB, ASC è dunque eguale a quello dei piani $A'S'B', A'S'C'$.

52. OSSERVAZIONE I. Quando le rette $SE, S'E'$ sono situate dalla medesima parte rapporto ai piani $DSF, D'S'F'$, gli angoli poliedri S, S' sono eguali. Quando queste rette cadono da differenti parti rapporto agli stessi piani, gli angoli poliedri S, S' non possono più coincidere; si dice allora che questi angoli sono *Simmetrici*, perchè tutte le parti che gli costituiscono sono le stesse, ma soltanto disposte in un ordine inverso.

Infatti, gli angoli DSE, DSF sono rispettivamente eguali agli angoli $D'S'E', D'S'F'$, e i piani di questi angoli sono egualmente inclinati. Per conseguenza:

1°. Quando le rette $SE, S'E'$ cadranno dalla medesima parte rapporto ai piani $DSF, D'S'F'$, ponendo gli angoli eguali $DSF, D'S'F'$ l'uno sopra l'altro, in guisa che i loro lati coincidano, i piani $DSE, D'S'E'$ coincideranno, e SE cadrà sopra $S'E'$; dimanierachè i piani degli angoli poliedri S, S' coincideranno; questi angoli poliedri saranno dunque eguali.

2°. Quando la retta SE è situata sul davanti del piano DSF , e la retta $S'E'$ è situata dietro il piano $D'S'F'$, per esempio in $S'E''$, se si pone l'angolo $D'S'F'$ sopra il suo eguale DSF , i piani $D'S'E'', F'S'E''$ cadranno dietro il piano DSF , e la loro intersezione $S'E''$ cadrà in Sc dietro il piano DSF , mentre la retta SE si troverà sul davanti di questo piano; le facce degli angoli poliedri S, S' non potranno dunque coincidere, e questi angoli poliedri saranno *simmetrici*. Prendendo $Sb = SB$, e tirando le rette bA e bC , tutte le facce della piramide triangolare $SAbC$ saranno rispettivamente eguali alle facce della piramide $SABC$; le inclinazioni di queste facce saranno le medesime, ma le piramidi non potranno coincidere e saranno *simmetriche*.

53. OSSERVAZIONE II. Se si applicasse la faccia ASC sopra uno specchio piano, la piramide $BASC$ si dipingerebbe dall'altra parte dello specchio in $bASC$.

Questa proprietà è generale: quando si presenta un corpo avanti uno specchio piano, si vede nello specchio il corpo *simmetrico*. Le parti che costituiscono questi due corpi sono le medesime, esse sono solamente disposte in un ordine inverso.

54. TEOREMA. Se da un punto preso nell'interno di un angolo diedro si abbassano delle perpendicolari sopra i due piani che lo formano, l'angolo formato da queste perpendicolari sarà il supplemento dell'angolo formato dai due piani.

Da un punto qualunque P (Tov. XXII, fig. 1), preso nell'interno dell'angolo diedro $XBAY$, si conducano le perpendicolari PC, PN ai piani AX, AY ; il piano CPN , che passa per queste linee, essendo perpendicolare ai piani AX ed AY , lo è ancora ad AB intersezione comune dei due piani (*Vedi PERPENDICOLARI*); le rette QC e QN , intersezioni del piano CPN con i piani AX ed AY , saranno perciò perpendicolari sopra AB ; e per conseguenza l'angolo CQN misurerà l'inclinazione dei due piani AX, AY . Ora, nel quadrilatero $PNQC$, gli angoli C ed N essendo retti, la somma dei due rimanenti P e Q equivale a due angoli retti; dunque l'angolo CPN , formato dalle perpendicolari CP e PN ai piani AX ed AY , è il supplemento dell'angolo CQN che fanno questi piani fra loro.

55. TEOREMA. Se da un punto preso nell'interno di un angolo triedro si abbassano delle perpendicolari sopra le tre facce, queste perpendicolari saranno le costole di un nuovo angolo triedro, e gli angoli piani di uno qualunque di questi due angoli poliedri saranno i supplementi degli angoli diedri corrispondenti dell'altro angolo poliedro.

Infatti, siano SA, SB, SC (Tav. XXII, fig. 2) le costole di un angolo triedro S ; le perpendicolari OP, OQ, OR , abbassate da un punto interno O sopra le facce ASB, ASC, BSC , saranno le costole di un nuovo angolo triedro O .

Ciò posto, 1°. le rette OP, OQ essendo rispettivamente perpendicolari alle facce ASB, ASC , abbiamo veduto (54) che l'angolo piano POQ dell'angolo poliedro O è il supplemento dell'angolo diedro $BASC$, formato dalle facce ASB, ASC dell'angolo poliedro S .

Si proverebbe egualmente che gli angoli piani POR, QOR dell'angolo poliedro O sono i supplementi degli angoli diedri $ABSC, ACSB$, formati dalle facce dell'angolo poliedro S .

2°. Il piano POQ , passando per due rette OP, OQ rispettivamente perpendicolari alle facce ASB, ASC , è perpendicolare all'intersezione SA di queste due facce; così la costola SA dell'angolo poliedro S è perpendicolare alla faccia POQ dell'angolo poliedro O . Per una stessa ragione, le altre due costole SB, SC dell'angolo poliedro S sono rispettivamente perpendicolari alle altre due facce POR, QOR dell'angolo poliedro O .

Per conseguenza risulta dal principio generale che abbiamo dimostrato (1°), che gli angoli piani dell'angolo poliedro S sono i supplementi degli angoli diedri dell'angolo poliedro O .

L'angolo poliedro O , formato dalle perpendicolari OP, OQ, OR , condotte alle facce dell'angolo poliedro S , si chiama ordinariamente *l'angolo poliedro supplementario dell'angolo poliedro S* .

56. PROBLEMA. Essendo dati tre angoli piani AOB, BOC, COA (Tav. XXII, fig. 3), i quali formino un angolo triedro O , trovare per mezzo di una costruzione piana l'angolo che fanno due di essi, per esempio AOB e BOC .

Nel piano BOC , e sopra i lati dell'angolo BOC , si facciano gli angoli BOD, COE , eguali rispettivamente agli angoli BOA, COA dell'angolo triedro; sopra OD si prenda un punto qualunque D , e si faccia OE eguale ad OD ; dai punti D ed E conducansi DB ed EC rispettivamente perpendicolari ad OB ed OC ; si prolunghino queste perpendicolari fintantochè s'incontrino l'una coll'altra in un punto P ; dal punto P si elevi PQ perpendicolare a PB , e fatto centro in B , con un raggio eguale a BD , si descriva il circolo DQd che tagli PQ in Q ; si unisca il punto Q col punto B , e l'angolo QBP misurerà l'angolo d'inclinazione dei due piani AOB, BOC .

Per dimostrar ciò, si prenda sulla costola dell'angolo triedro, la quale rimane elevata sul piano BOC , una lunghezza OA eguale ad OD , e si tirino le rette AB, AC, AP . Ciò fatto, siccome i triangoli OBA, OBD sono eguali avendo un angolo eguale compreso tra lati rispettivamente eguali, perciò BA è eguale a BD , e l'angolo OBA è eguale all'angolo OBD , cioè ad un angolo retto. E siccome OB è perpendicolare ad ambedue le linee BA , e BP , così essa è perpendicolare al piano APB , e per conseguenza il piano BOC , il quale passa per OB , è perpendicolare allo stesso piano APB , o, ciò che è lo stesso, il piano APB è perpendicolare al piano BOC . In egual modo si può dimostrare che il piano ACP è perpendicolare al piano BOC . Perciò la linea retta AP , intersezione dei piani APB, ACP , è perpendicolare al piano BOC , e l'angolo APB è un angolo retto. E poichè nei triangoli rettangoli QBP, ABP l'ipotenusa QB è eguale all'ipotenusa AB , e il lato BP è comune ad ambedue i triangoli, perciò, a cagione dell'eguaglianza dei triangoli, l'angolo QBP è eguale all'angolo ABP ; ma ABP misura l'inclinazione dei piani AOB, BOC , poichè AB e BP sono ambedue perpendicolari alla intersezione OB ; dunque l'angolo QBP misura questa stessa inclinazione, come voleva dimostrarsi.

OSSERVAZIONE. È facile assicinarsi che la costruzione di sopra indicata diviene

impossibile quando il terzo angolo COE è maggiore della somma, o minore della differenza dei due altri: imperocchè, per potersi servire della citata costruzione, è necessario che BP sia minore di BD. Ora, se si conduce DF perpendicolare ad OC, e si prolunga finchè incontri in G il circolo descritto col centro in O e col raggio OD, è facile vedere che l'angolo FOG è eguale all'angolo FOD, e che per conseguenza l'angolo COG è eguale a COD, cioè alla somma dei due angoli BOC e BOD. Nella stessa maniera, se si conduce df perpendicolare ad OC, e si prolunga fintantochè incontri in g la circonferenza dello stesso circolo, l'angolo COg sarà eguale all'angolo COD, il quale, poichè $BOD = BOD$, risulta eguale alla differenza di BOC e BOD. Ora se COE sarà maggiore di COG, o minore di COG, nell'uno e nell'altro caso la perpendicolare EC, che si conduce ad OC da un punto E della circonferenza del circolo DGg, non taglierà Dd fra i punti D e d, e quindi BP sarà maggiore di BD, o Bd. I limiti della possibilità della detta costruzione sono perciò quelli stabiliti di sopra.

COROLLARIO I. La medesima costruzione, convenientemente modificata, può servire ancora per trovare il terzo angolo COA, conoscendo i due angoli AOB, BOC, e il loro angolo d'inclinazione. Infatti, se PBQ si fa eguale all'angolo d'inclinazione, e se BQ si prende eguale a BD, il punto P si determinerà senza difficoltà conducendo QP perpendicolare a BP; e quindi si otterrà l'angolo COE o COA, conducendo PC perpendicolare ad OC, e prolungandola fino all'incontro in E della circonferenza DGg.

COROLLARIO II. Segue dalla soluzione di questo problema che se due angoli triedri sono formati da angoli piani rispettivamente eguali fra loro, gli angoli diedri dell'uno saranno eguali ai corrispondenti angoli diedri dell'altro.

COROLLARIO III. In egual modo si deduce dal Corollario primo che se due angoli triedri hanno due angoli piani rispettivamente eguali ed egualmente inclinati, il terzo angolo dell'uno sarà eguale al terzo angolo dell'altro, ed il suo piano sarà inclinato egualmente sui piani adiacenti.

Per altre nozioni intorno agli angoli poliedri rimanderemo il lettore agli articoli CURVILINEO, MISTILINEO, l'ANGO cc.

57. Passiamo adesso a parlare degli angoli sferici.

Se due archi di circoli massimi AB, AC (Tab. XXII, fig. 4) s'incontrano l'uno coll'altro in un punto A, si dice che essi formano in quel punto un *angolo sferico* BAC.

Un angolo sferico è maggiore o minore, secondochè è maggiore o minore l'apertura che fanno fra loro gli archi che lo contengono: così l'angolo BAC è maggiore dell'angolo DAC di quanto è grande l'angolo BAD.

Qualunque angolo sferico è misurato dall'angolo piano che misura l'inclinazione dei piani degli archi che lo formano; poichè è facile il comprendere che se questa inclinazione è la medesima in due angoli sferici qualunque, essi si possono far coincidere, e per conseguenza sono eguali l'uno all'altro. Sedunque l'angolo diedro fatto dai piani di un angolo sferico contiene un sum-multiplo qualunque dell'angolo diedro fatto dai piani di un altro angolo sferico, un certo numero di volte esattamente, ovvero con un resto, il primo angolo sferico conterrà un simile summultiplo del secondo, lo stesso numero di volte esattamente, ovvero col medesimo resto; perciò gli angoli sferici stanno fra loro come gli angoli diedri formati dai loro piani, ed hanno con essi una medesima misura.

Da ciò è derivato che da alcuni scrittori è stato detto essere l'angolo sferico identico con l'angolo diedro dei suoi piani; mentre altri hanno esteso ad esso la definizione generale dell'angolo formato da due curve che si tagliano, considerandolo come identico coll'angolo piano rettilineo delle tangenti al punto A; poichè quest'ultimo angolo, essendo formato dalle perpendicolari alla intersezione OA, misura l'angolo diedro dei piani.

Quando un arco sferico PO (Tav. XXII, fig. 5) cadendo sopra un altro arco sferico AB forma gli angoli sferici adiacenti AOP, POB eguali l'uno all'altro, ciascuno di essi si chiama un *angolo sferico retto*, e l'arco che cade sopra l'altro si dice essere *perpendicolare*, o ad *angolo retto* con quello.

I termini di *angolo acuto* e di *angolo ottuso* sono similmente applicati agli angoli sferici, e nel medesimo senso degli angoli rettilinei.

È pure evidente che un angolo sferico retto è misurato da un angolo rettilineo retto, un angolo sferico acuto da un angolo rettilineo acuto, e un angolo sferico ottuso da un angolo rettilineo ottuso.

58. TEOREMA. Qualunque angolo sferico è misurato dall'arco sferico descritto dal vertice dell'angolo come polo, e intercetto fra i lati dell'angolo, prolungati se sia necessario.

Sia BAC (Tav. XXII, fig. 6) un angolo sferico qualunque, e dal punto A come polo si descriva un circolo massimo che tagli i lati AB ed AC, prolungati quando sia necessario, nei punti M ed N: l'angolo sferico BAC sarà misurato dall'arco MN.

Sia O il centro della sfera, e si tirino le rette OA, OM, ON. Ora, poichè A è il polo dell'arco sferico MN, il piano MON è perpendicolare ad OA, ed MO, NO sono ambedue perpendicolari ad OA. Perciò l'angolo piano MON misura l'angolo diedro MOAN, o, ciò che è la stessa cosa, l'angolo sferico MAN, o BAC. Dunque l'arco MN, che misura l'angolo MON, misura ancora l'angolo sferico BAC.

COROLLARIO I. L'angolo formato da due archi sferici è misurato dalla distanza dei loro poli, presa da una stessa parte di questi archi. Imperocchè se l'arco MN si prolunga in R, dimanierachè RN sia un quadrante, e quindi si prolunga ancora fino in Q, talchè QM sia egualmente un quadrante, QR sarà eguale ad MN, e i punti Q ed R saranno i poli rispettivi di AM ed AN, poichè QM e QA, come ancora RN ed RA, sono quadranti.

COROLLARIO II. Le proprietà dimostrate per gli angoli rettilinei e diedri sussistono ancora per gli angoli sferici, vale a dire che gli angoli opposti al vertice sono eguali, e che nell'incontro di due archi i due angoli adiacenti equivalgono alla somma di due angoli retti.

Gli angoli pseudono nelle varie scienze matematiche diverse denominazioni. Noi indicheremo le principali annettendovi il loro significato.

ANGOLO DI ELONGAZIONE (Astron.). Chiamasi così la differenza veduta dalla terra tra la longitudine di un pianeta e quella del sole. *Vedi ELONGAZIONE.*

ANGOLO ORARIO (Astron.). È questo l'angolo sferico formato al polo dell'equatore celeste, e compreso tra il meridiano del luogo e il circolo orario o circolo di declinazione che passa per un astro: quest'angolo misura la distanza dell'astro dal meridiano, ed indica pure il tempo vero quando si tratta del sole, riducendo la graduazione dell'angolo in ore e minuti a ragione di 15 gradi per ora; così se il sole si trovasse a levante del meridiano, e il suo angolo orario fosse di $35^{\circ} 23'$, mancherebbero 2 ore $21' 32''$ a mezzogiorno, ossia sarebbero 9 ore $38' 28''$ di mattina. Nel triangolo ZPS (Tav. XII, fig. 4), nel quale Z rappresenta lo zenit dell'osservatore, P il polo dell'equatore, ed S il sole o un astro qualunque, l'angolo orario è rappresentato dall'angolo sferico ZPS. Conoscendo la latitudine del luogo, la declinazione e l'altezza dell'astro, è facile trovare l'angolo orario, bastando a tale oggetto risolvere semplicemente il triangolo sferico ZPS, i di cui tre lati altro non sono che i complementi di queste quantità (*Vedi ALTEZZA*). Viceversa, conoscendo la latitudine del luogo, l'angolo orario di un astro, e la sua declinazione, è facile trovarne l'altezza al di sopra dell'orizzonte.

ANGOLO DI COMMUTAZIONE (Astron.). È l'angolo formato al centro del sole dal raggio

vettore della terra e da quello di un altro pianeta: in sostanza è la differenza tra la longitudine eliocentrica della terra e quella di un altro pianeta. Copernico chiamava *commutazione* ciò che oggi dicesi *parallasse annua*.

ANGOLO PARALLATTICO (*Astron.*). Dicesi così l'angolo formato dal circolo verticale di un astro e dal suo circolo di declinazione o di latitudine; così si hanno due specie di angoli parallattici. L'angolo parallattico formato dal circolo di latitudine serve moltissimo nel calcolo degli eclissi, e Lalande ne ha spiegato a lungo quest'uso nel libro decimo del suo trattato d'Astronomia.

ANGOLO DI POSIZIONE (*Astron.*). Nell'Astronomia chiamasi così l'angolo che al centro del sole o di un astro qualunque viene formato dall'intersezione del circolo di declinazione col circolo di latitudine: quest'angolo infatti dipende dalla posizione dell'astro relativamente ai poli dell'eclittica e dell'equatore. Così essendo P il polo dell'eclittica EQ (*Tav. XII, fig. 4*), Z il polo dell'equatore OR, PD un circolo di latitudine, e ZM un circolo di declinazione, l'angolo sferico ZSP rappresenterà l'angolo di posizione. Conoscendo l'obliquità dell'eclittica, la latitudine e la declinazione di un astro, è facile trovare quest'angolo; poichè in tal caso basta risolvere il triangolo SPZ, in cui PZ è l'obliquità dell'eclittica, PS è il complemento della latitudine dell'astro, e ZS il complemento della sua declinazione.

ANGOLO OTTICO. È l'angolo formato da due raggi visuali, condotti dal centro dell'occhio alle estremità di un oggetto.

Gli angoli hanno ancora molte altre denominazioni nei diversi rami delle matematiche sì pure che applicate, ma noi ci riserbiamo di darne la spiegazione nel corso del Dizionario agli articoli che riguardano queste speciali loro denominazioni.

ANGUINEA (*Geom.*). È questo il nome che Newton, nella sua enumerazione delle linee del terzo ordine, diede alle iperbole di quest'ordine, che avendo dei punti d'inflexione tagliano il loro asintoto, e si estendono ai lati opposti (*Vedi ASINTOTO, e INFLESSIONE*). Tale è la curva DHGAFIC (*Tav. XXII, fig. 7*) che taglia il suo asintoto in A, e che avendo in H ed in I dei punti d'inflexione si estende verso i lati opposti, cioè alla sinistra di A in alto, e alla destra di A in basso.

Questa curva chiamasi *anguinea* da *anguis, serpente*, perchè mostra di serpeggiare intorno al suo asintoto.

ANHELAR (*Astron.*). *Vedi ANULAR.*

ANIANO, astronomo e poeta, viveva nel secolo XV, e compose in versi esametri leonini un poema astronomico, intitolato: *Computus manualis magistri Aniani*, diviso in quattro parti, che ha avuto molte edizioni, la più antica delle quali è di Strasburgo del 1488. Ne esistono due di Parigi, l'una senza data, e l'altra del 1526. A quest'ultima trovasi unito un commentario di Giacomo Marsus del Delphinato, con un calendario, e molte tavole compilate da Niccolò Bonaspes, e aggiunte appiè di ciascun mese di questo calendario. Aniano è autore de' versi tecnici tanto conoscinti sopra i segni dello zodiaco:

*Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,
Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.*

ANICH (Piatro), nato il 22 febbrajo 1723, a Ober Perfnas, vicino ad Inspruck, era figlio di un paesano, e nella sua gioventù non si occupò che dei lavori dell'agricoltura. Nell'età di 28 anni la sua inclinazione per lo studio delle scienze potè tanto sopra di lui, che abbandonato il luogo nativo si recò ad Inspruck, dove i gesuiti gl' insegnarono l'astronomia e le matematiche. Col solo soccorso delle loro lezioni costruì un globo celeste, uno terrestre, e diversi strumenti matematici. Per consiglio degli stessi suoi maestri si accinse a levare le carte del Ti-

rolo, cominciando dalla parte meridionale di questa provincia, e tal lavoro ebbe tanto incontro, che l'imperatrice Maria Teresa gli commise di fare ancora la parte settentrionale. Dopo molti ostacoli e pericoli frapposti all'esecuzione di questa intrapresa dalle superstiziose preoccupazioni de' suoi compatriotti, Anich giunse a terminare la sua operazione; ma la corte di Vienna trovò le sue carte troppo estese, e gli diede ordine di riunire tutto il Tirolo in una sola carta che non avesse più di nove fogli. Per quanto dispiacere dovesse provare Anich vedendosi obbligato a ridurre le carte già fatte, si occupò con costanza a questo lavoro; ma l'assiduità che vi pose gli costò la vita prima che avesse dato termine alla carta del ponente del Tirolo. Ei morì il primo settembre 1766, non avendo goduto che due mesi della pensione di 200 fiorini che l'imperatrice gli aveva concessa. Le carte ch'ei lasciò comparvero a Vienna nel 1774 col titolo di *Tyrolis chorographice delineata a Pet. Anich et Blasio Hueber, curante Ign. Weinhart*. Vedasi la *Vita del celebre matematico e meccanico Pietro Anich* (in tedesco), Monaco, 1767 in-8, col suo ritratto.

ANIMELLA (*Mecc.*). È questa una specie di valvola che nelle trombe è destinata ad aprire e chiudere alternativamente il passaggio all'acqua che si vuole innalzare. L'animella è formata di un pezzo di cuojo serrato tra due piastre o rotelle di metallo; da un lato ha una piccola coda colla quale è attaccata al diafragma che chiude il corpo della tromba. Questo diafragma ha un foro nel mezzo che l'animella, stando naturalmente, chiude col suo peso, ma che lascia libero l'ingresso all'acqua, quando l'animella si alza per la forza di aspirazione dell'aria, n per la pressione del liquido. Questo movimento è prodotto dalla flessibilità del cuojo della coda, che fa l'ufficio di cerniera. La piastra che rimane al di sotto del cuojo è alquanto più piccola dell'orifizio che l'animella deve coprire, e quella che è sopra il cuojo è più grande di questo stesso orifizio; la prima entra nel foro, la seconda serve a chiuderlo: tutte e due poi servono a dar consistenza al cuojo, che senza di esse si piegherebbe al peso dell'acqua; e siccome questo cuojo le sopravanza e posa sul diafragma, così chiude perfettamente il foro. *Vedi* Tromba, e VALVOLA.

ANISOCICLI (*Mecc.*). (Da α privativa, ἴσος eguale, e $\kappa\acute{\iota}\nu\lambda\omicron\varsigma$ circolo). Sono così chiamati i circoli della vite, detti più comunemente *pani della vite*.

Con questo nome chiamavasi pure un'antica macchina da guerra, la di cui molla, a forma di spirale, serviva a lanciar frecce. Essa si trova descritta nell'*Architettura* di Vitruvio.

ANNO (*Stor. Astron.*). Controversa è l'etimologia di questa parola; nè è nostra intenzione il cercare di determinarla; diremo soltanto che in quanto a noi essa deriva dalla voce *annus*, che in latino ha il significato medesimo che noi le attribuiamo. Si appella col nome *anno* un certo numero di giorni che formano un periodo fisso o variabile, solare o lunare, secondochè il tempo si misura colle rivoluzioni del sole o con quelle della luna.

Il primo bisogno degli uomini riuniti in società ha dovuto esser quello di dividere il tempo in parti eguali, dietro il ritorno periodico e la durata delle stagioni. E da questo punto che deve sempre incominciare la storia, poichè la tradizione si scritta che orole non presenterebbe che vaghe rimembranze, se non potesse riferirsi ad epoche autentiche, ed egualmente osservate da tutte le nazioni. Perciò la determinazione dell'anno è stata sempre stabilita sull'osservazione del corso degli astri. Ma sebbene i fenomeni astronomici che servono di base ai primi calcoli siano il risultato di leggi immutabili, e si rinnovino uniformemente, essi non hanno però luogo necessariamente nel medesimo tempo relativamente ai popoli che abitano zone differenti, cioè non producono i medesimi effetti in un modo generale. Dalle osservazioni relative di questi effetti diversi

è risultato che non tutte le nazioni si sono trovate d'accordo, nei loro rapporti sociali, sul modo di computare il tempo, e di operarne la divisione. E questa senza dubbio la sorgente delle favole cronologiche che velano i primi passi dell'uomo sulla terra, e che hanno attribuito ad alcune nazioni primitive un'antichità, di cui la religione e la scienza hanno in egual modo dimostrato la ridicola e assurda esagerazione. Ma noi non dobbiamo qui servirci che delle prove che ci somministra la sola scienza: la storia delle sue scoperte e de' suoi progressi successivi, che possiamo ora considerare nel loro totale complesso, è nel tempo stesso un monumento incontestabile dell'età recente dell'umanità, e del potere di perfettibilità di cui è essa dotata. Non è possibile che le umane cognizioni abbiano acquistato in circa seimila anni quel grado di esattezza e di verità al quale sono giunte attualmente, e che, nel corso di quegli immensi periodi che avrebbero dovuto precedere quest'epoca storica, l'uomo non abbia potuto giungere che alla scoperta di vaghe ipotesi. Bisognerebbe almeno supporre che il suo destino e le sue facoltà intellettuali avessero sofferto dopo quel tempo sconosciuti una modificazione essenziale, il che non può essere ammesso dalla ragione, poichè nei diversi modi di dividere il tempo, adottati dagli antichi popoli, è facile ravvisare fin da quei primi tempi un'altra direzione intellettuale, e valutazioni ingegnose dei moti celesti fondate unicamente sull'esperienza. In progresso la scienza non è venuta ad aggiungere a queste scoperte che l'esattezza e la rigorosa precisione delle sue formule.

L'anno, preso nel suo significato didattico, è *astronomico*, o *civile*, secondo che questa divisione del tempo si applica ai fenomeni celesti, o agli usi sociali.

1. **ANNO ASTRONOMIC.** Agli anni astronomici si danno diverse denominazioni secondo i diversi fenomeni che si prendono in considerazione: noi le spiegheremo successivamente, determinando la durata reale di ciascuna specie di anno.

2. L'anno astronomico *solare* è il tempo che il sole impiega a percorrere l'intero giro dell'eclittica, cioè il tempo che passa tra un solstizio ed un solstizio simile, oppure tra un equinozio ed un equinozio simile. La sua durata, secondo i calcoli più esatti e più recenti, è di 365^{giorni}, 242^{ore} 56^{minuti} 4^{secondi}, cioè di 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e 51 secondi, e se qualche errore potesse essersi introdotto in questa valutazione dell'anno solare, esso non potrebbe esser maggiore, tutto al più, di uno o due secondi.

3. Non si deve credere però che si sia acquistata immediatamente una sì gran precisione nella determinazione della durata dell'anno; infatti noi riscontriamo nella storia dei popoli una lunga serie di computi erronei, a traverso ai quali hanno dovuto passare gli uomini prima di giungere all'attuale perfezione.

L'anno solare come quello che periodicamente riconduce le medesime stagioni attirò principalmente l'attenzione degli uomini. La sua lunghezza fu creduta nei tempi più remoti di soli 360 giorni: e venne diviso in 12 parti o mesi. Credono alcuni che questo computo e questa divisione abbia avuto origine dall'aver osservato che dopo dodici lunazioni, ognuna delle quali ha una durata di circa trenta giorni, si ritorna alla medesima stagione in cui si era al principio della prima lunazione. Suppongono altri che i primi popoli, vedendo le stelle levarsi e tramontare due ore più presto in ciascuna lunazione o mese, e alla fine di 12 mesi tornare a comparire e sparire all'ora stessa, argomentassero che il sole nel corso di dodici lune o di dodici mesi percorresse l'intero giro del cielo; e suppongono pure che da questa osservazione avesse origine la divisione del cielo in dodici grandi parti che si conoscono col nome di segni dello zodiaco. Sopra queste e sopra altre ipotesi hanno a lungo trattato Freret, Bailly, Dupuis, Bianchini, Whiston, Lalande, Weidler, ec.

Comunque sia di tali opinioni, è certo che per moltissimi secoli l'anno fu

supposto dalla maggior parte delle nazioni dell' antichità di 360 giorni, come ne fanno fede i molti passi d'antori riportati da Allin in una dissertazione inserita da Whiston nella sua *Teoria della terra*, Londra 1737, lib. 2, pag. 144. Ancora gli Egizj antichi crederono l'anno di 360 giorni come si può vedere in Plutarco, Diodoro di Sicilia, Scaligero, Kircher, e specialmente nelle note di Golio all' *Astronomia d'Alfergan* (*Fedi ALFERGAN*), ed in Goguet, *Origine delle leggi, delle arti*, ec., Parigi 1758, 3 vol. in-4, Vol. I, pag. 220, 230, e Vol. II, pag. 254. Ma il recinto delle mura di Babilonia, che aveva 360 stadj, e che era stato fabbricato in un anno facendosene uno stadio per giorno; i poeti astronomici di Menfi che erano in numero di 360, ed ognuno dei quali esercitava il suo ofizio un giorno dell'anno; e finalmente la stessa divisione del circolo in 360 gradi costituiscono una prova ancora più sicura di questo antico computo dell'anno.

4. L'errore però di circa cinque giorni che in tal modo veniva a commettersi dovè ben presto rendersi sensibile mediante la necessaria alterazione nel periodo delle stagioni, e dovè quindi rendere indispensabile un' analoga correzione. Non si conosce con precisione l'epoca in cui ebbe luogo una tal correzione. Sincello attribuisce ad un re di Egitto, chiamato Aseth, l'aggiunta di cinque giorni alla lunghezza dell'anno che prima di lui era stato creduto di soli 360 giorni; ma non si sa in qual tempo vivesse questo re. Newton nella sua cronologia pretende che l'anno di 365 giorni fosse stabilito in Egitto, sotto il regno di Amenofi, 884 anni prima della nascita di G. C., e 72 anni dopo la morte di Sesostri, e che in memoria di questo stabilimento venisse posto nel *Memnonium* un cerchio d'oro che aveva 365 braccia di giro, ed in cui ciascun braccio corrispondeva ad un giorno dell'anno, e portava segnata l'ora del levare del sole, come narra Diodoro di Sicilia nel lib. I della sua Storia. Ma Freret, che ha così bene confutato il sistema cronologico di Newton, sostiene che Osimandes o Osimandias, re di Tebe, e la di cui tomba era circondata di un tal cerchio, era molto più antico di Sesostri. Egli fa Sesostri contemporaneo di Mosè, 1550 anni avanti G. C.

5. Ridotto l'anno a 365 giorni, dovè scorrere ancora molto tempo prima che si scoprisse l'errore di circa sei ore che trovai in questa determinazione. Le opinioni degli autori sull'epoca alla quale rimonta una tale scoperta sono affatto discordi; alcuni pretendono di darle una data remotissima, altri vorrebbero farla posteriore ai tempi di Platone.

Il Sincello ci dice che l'antica cronaca egiziana contava 36525 anni dal regno del Sole fino a quello d' Alessandro. In questo numero si è creduto di vedere la lunghezza dell'anno di 365 giorni e un quarto espressa in decimali; ma, oltrechè questa non è che una semplice congettura, ignorandosi l'epoca a cui rimonta la favola dei 36525 anni, non può dedursene prova nessuna della cognizione antica del quarto di giorno.

6. Il ciclo canicolare o periodo sotico, così chiamato dalla parola *Sothis* che è il nome egiziano della stella Sirio, di 1460 anni solari, che dopo 1461 anni di 365 giorni riconduceva il levar delle stelle alle medesime stagioni dell'anno, indica pure la cognizione del quarto di giorno; ma questo ciclo non è tanto antico quanto si è voluto farlo credere.

Il primo anno di questo ciclo è quello in cui il levare di Sirio concorre col primo giorno del mese Thot, mese col quale cominciava l'anno presso gli Egiziani; e siccome questa coincidenza accadde l'anno 1322 avanti G. C., così si è preteso che in tale epoca si conoscesse il periodo sotico. Anzi Freret è andato più oltre. Avendo egli trovato, che alcune epoche antiche erano state calcolate secondo gli anni del ciclo precedente, che avrebbe dovuto cominciare l'anno 2782 avanti G. C., ne ha concluso che il ciclo che era cominciato l'an-

no 1322 non era il più antico, nè quello al principio del quale erasi scoperta la differenza fra l'anno vero solare, e l'anno *vago* di 365 giorni, detto appunto *vago* perchè il suo principio si trovava successivamente in tutte le stagioni dell'anno, per ritornare retrogradando alla medesima stagione dopo 1460 anni solari. Inco Bailly, nella sua Storia dell'Astronomia, dice che secondo Manetone il periodo sotico rimonta a 2782 anni avanti l'era volgare, poichè trova che Manetone, 280 anni avanti G. C., se n'è servito per calcolare la sua storia dell'Egitto. Ma ragionare in tal modo è come se si volesse provare che Giulio Cesare ha riformato il calendario 6000 anni fa, perchè noi contiamo gli anni della creazione del mondo sul calendario giuliano. Gemino, Censorino, Manetone, e tutti gli altri autori, sull'appoggio dei quali si fa rimontare tant'alto la scoperta del ciclo canicolare, sono autori anteriori di due o trecento anni all'era volgare, i quali se ne servivano nei loro calcoli, ma che non dicono che si conoscesse e se ne facesse uso nei tempi ai quali risalgono col loro computo. Su questo soggetto si possono consultare le *Memorie* dell'Accademia reale delle Iscrizioni e Belle Lettere, Tom. XIV, e Tom. XXIX, e Freret, *Défense de la chronologie*, Parigi 1758 in-4.

7. Tralasciando di riportare altre opinioni su questo proposito, diremo che il più antico riscontro storico della scoperta delle sei ore da aggiungersi ai 365 giorni, per ottenere la lunghezza dell'anno, si ha nella *Ottaeteride* dei Greci, di cui si fa onore a Cleostrato di Tenedo, astronomo di poco posteriore a Talete. Era l'Ottaeteride un periodo di otto anni solari, nel corso dei quali si supposeva che la luna compiesse esattamente il giro di 99 lunazioni, in guisa che al principio di ogni nuovo periodo di otto anni si trovasse nel medesimo punto del cielo rapporto al sole, per tornare a riprodurre successivamente nello stesso ordine le fasi delle 99 lunazioni. Questo periodo era composto di 2922 giorni, donde si vede che la lunghezza dell'anno veniva computata esattamente di 365 giorni e un quarto. Dobbiamo ciò non ostante osservare che varie ottaeteridi si conobbero dai Greci, e che non è pacifica opinione che quella immaginata da Cleostrato fosse esattamente di 2922 giorni; non potendo però estenderci in lunghe discussioni su questo particolare, rimanderemo il lettore all'eruditissima opera del P. Petavio intitolata *De doctrina temporum*, Parigi, 1627, 3 vol. in-fol., e alle altre opere che in appresso verranno citate.

Qualunque pertanto possa essere l'epoca in cui si scoprì l'errore del quarto di giorno, è certo che da quel tempo fino ad Ipparco l'anno si credè esattamente di 365 giorni e sei ore: ed infatti era ben difficile allora il determinare la vera lunghezza dell'anno, mentre a tal fine non si osservavano gli equinozi, ma unicamente i solstizj, che sono difficilissimi ad osservarsi con esattezza. E che veramente per trovare la durata dell'anno gli antichi astronomi si servissero dei solstizj, e non degli equinozi, si rileva dall'osservare: 1º. che Tolomeo non potè trovare equinozi più antichi di quelli osservati da Ipparco per confrontarli con i suoi; 2º. che Ipparco, in un passo citato da Tolomeo, si serve di un solstizio più antico; 3º. che Tolomeo stesso si serve di un solstizio; 4º. che l'uso degli gnomoni, i quali danno direttamente e facilmente i solstizj, era più antico di quello delle armille, come più naturale e più semplice. Ecco dunque perchè fino al tempo d'Ipparco non si conobbe la diminuzione di alcuni minuti da farsi al quarto di giorno. Anzi Metone credè che la vera durata dell'anno fosse alquanto più lunga di 365 giorni e sei ore, sebbene non si sappia su qual fondamento appoggiasse la sua opinione.

Dopo che la scuola d'Alessandria ebbe cominciato ad ispirare il gusto dell'esattezza nelle osservazioni, Ipparco verso l'anno 130 avanti l'era volgare si accorse che doveva togliersi qualche cosa alle sei ore. In un libro scritto espressamente

sulla lunghezza dell'anno, Ipparco confrontò un solstizio osservato da Aristarco, 280 avanti l'era volgare, con quello da lui stesso osservato dopo un intervallo di 145 anni, e trovò che era avvenuto dodici ore più presto. In un altro libro sui mesi e sui giorni intercalari, parlando della durata dell'anno, che secondo Metone ed Euctemone era di 365 giorni e un quarto e qualche cosa di più, e secondo Calippo di 365 giorni e un quarto esattamente, così si esprime: « In quanto a noi, abbiamo trovato in diciannove anni lo stesso numero di giorni che essi hanno colle loro osservazioni ottenute, ma abbiamo trovato una frazione un poco differente, e che è eguale a sei ore meno la trecentesima parte di un giorno; così in trecento anni io conto cinque giorni meno di Metone, e un giorno meno di Calippo ». Ed in seguito: « Ho scritto sulla lunghezza dell'anno un libro in cui dimostro che l'anno solare, cioè il tempo che impiega il sole a tornare da un tropico allo stesso tropico, o da un equinozio allo stesso equinozio, non è di 365 giorni e un quarto, come credevano i matematici, ma è inferiore di questa lunghezza della trecentesima parte di un giorno ». Computando questa quantità in ore, minuti, e secondi, e togliendola dalle sei ore, si ha l'anno di 365 giorni, 5 ore, 55 minuti, e 12 secondi. Così Ipparco si accostò alla vera durata dell'anno; ma vi era sempre un errore di sei minuti e 21 secondi.

9. La lunghezza dell'anno determinata da Ipparco si trova riportata ancora nell'Almagesto di Tolomeo, il quale anzi asserisce di averla trovata perfettamente eguale a quella da lui stesso ottenuta colle sue proprie osservazioni. E più probabile però che Tolomeo si appropriasse le osservazioni ed i risultati d'Ipparco, sì perchè è ormai conosciuto che le osservazioni che egli diede di aver fatte sono supposte e immaginate ad arte per ottenere i medesimi risultati d'Ipparco, sì perchè è ben difficile, per non dire impossibile, che due astronomi, in epoche distanti l'una dall'altra di circa 250 anni, servendosi di elementi diversi, si siano incontrati in un medesimo errore di minuti e di secondi. Vedi Boulliaud, *Astronomia philolaica*, Parigi 1645 in-fol.

10. Per molti secoli non si conobbe altra astronomia che quella di Tolomeo, nè altra lunghezza dell'anno che quella di sopra riportata. Ma finalmente gli Arabi furono in grado di scoprire l'errore, quando confrontarono le proprie osservazioni con quelle d'Ipparco: così in Albatenio, che viveva nell'880, si trova l'anno di 365 giorni, 5 ore, 46 minuti, e 24 secondi; e nelle Tavole Alfonsine di 365 giorni, 5 ore, 49 minuti e 16 secondi. Quest'ultima durata dell'anno fu quella che venne adottata dai riformatori del calendario, sotto Gregorio XIII, nel 1582. Si veda il Clavio, *Romani Calendarii a Gregorio XIII. Pont. Max. restituti Explicatio*, Roma, 1603 in-fol.

11. In seguito molti astronomi si sono occupati della ricerca della vera lunghezza dell'anno. Ecco i risultati che i principali tra essi hanno ottenuto.

Copernico, nel suo libro *De revolutionibus orbium coelestium*, Norimberga, 1543 in-fol., fissa la lunghezza dell'anno a 365 giorni, 5 ore, 49 minuti, e 16 $\frac{1}{8}$ secondi.

Ticone Brabé, nell'*Astronomiae instauratae Progymnasmata*, Praga, 1602 in-4, a 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e 45 $\frac{1}{3}$ secondi.

Keplero, nelle *Tabulae Rudolphinae*, Ulma, 1627 in-fol., a 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e 57 $\frac{2}{3}$ secondi.

Lansberg, nelle sue *Tabulae motuum coelestium perpetuae*, Middelburg, 1632 in-fol., a 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e 57 secondi.

Boulliaud, nella sua *Astronomia philolaica*, Parigi, 1645 in-fol., a 365 giorni, 5 ore, 49 minuti, e 4 $\frac{1}{8}$ secondi.

Riccioli, nel suo *Almagestum novum*, Bologna, 1651, 2 vol. in-fol., Tom. I,

pag. 139, a 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e 40 secondi; e nella sua *Astronomia reformata*, Bologna, 1665, in fol., pag. 16, a 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e 48 secondi.

Flansted e Newton fissarono la lunghezza dell'anno a 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e $57 \frac{1}{2}$ secondi.

Lemonnier, nelle sue *Institutions astronomiques*, Parigi, 1746 in-4, a 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e 57 secondi.

Halley, nelle sue *Tabulae astronomicae*, Londra, 1749 in-4, a 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e $54 \frac{1}{2}$ secondi.

Cassini, nelle sue *Tables astronomiques* che formano seguito ai suoi *Éléments d'Astronomie*, Parigi, 1740 a vol. in-4, a 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e $52 \frac{2}{5}$ secondi.

Mayer, nelle *Mémorie* dell'Accademia di Gottinga, Tom. III, a 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e 51 secondi.

Lalande, in una Memoria che riportò il premio dell'Accademia di Copenaghen nel 1781, a 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e 48 secondi.

La Caille, nelle sue Tavole inserite nelle *Mémorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1757, pag. 140, a 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e 49 secondi.

E finalmente quasi tutti i moderni astronomi si trovano d'accordo a stabilire la durata dell'anno in 365 giorni, 5 ore, 48 minuti, e 51 secondi, come di sopra abbiamo detto.

12. La durata dell'anno astronomico *lunare* si calcola sulla durata di 12 lunazioni, ognuna delle quali è di 29 giorni, 12 ore, 44 minuti, e $2 \frac{1}{4}$ secondi; così quest'anno si compone di 354 giorni, 8 ore, 48 minuti, e 34 secondi.

Sono queste frazioni di tempo, difficilmente computabili negli usi della vita sociale, che formano la differenza che esiste tra l'anno *civile* e l'anno *astronomico*. Una tal differenza era ancor maggiore presso gli antichi popoli, per l'ignoranza in cui erano della vera durata delle rivoluzioni celesti.

13. L'anno *tropico* non è altro che l'anno solare vero, vale a dire il tempo che impiega il sole a ritornare al medesimo tropico, e per conseguenza quello che è necessario affinchè ogni stagione si riproduca nello stesso ordine. È per questo motivo che gli astronomi lo chiamano ancora *anno equinoziale*.

14. L'anno *siderale* è quello che si calcola sul ritorno apparente del sole alla medesima stella. Quest'anno eccede l'anno *tropico* di $20' 20''$. Eccone la ragione: i punti equinoziali, cioè i punti in cui l'eclittica taglia l'equatore, vanno annualmente avanzandosi da oriente in occidente di $50''$,¹ per un egual moto annuo dell'eclittica in senso contrario; perciò il sole, dopo essersi partito da un equinozio, deve tornare l'anno seguente ad incontrare lo stesso equinozio all'occidente di quella stella alla quale lo aveva lasciato l'anno precedente, e così prima di aver compiuta l'intera sua rivoluzione sull'eclittica, cioè dopo aver percorso soltanto $359^{\circ} 59' 9''$,⁹ di questo circolo. Il tempo che il sole impiega a percorrere l'arco di $50''$,¹ dell'eclittica è ciò che bisogna aggiungere all'anno solare per avere l'anno siderale: e per trovar questo tempo basta stabilire la proporzione

$$359^{\circ} 59' 9'' \cdot 9 : 365 \text{ giorni } 5 \text{ ore } 48' 51'' :: 50'', 1 : x = 20' 20'',$$

il quarto termine della quale è la differenza tra l'anno tropico e l'anno siderale.

15. Si dà il nome di anno *anomalistico* ad una intera rivoluzione dell'anomalia, cioè al tempo che impiega il sole a tornare ad un medesimo punto della sua orbita rispetto alla linea degli apsid (*Fedi ANOMALIA, ANOMALISTICO, APSIDI, AFELIO* ec.). Se l'orbita ellittica descritta dal sole fosse fissa, e corrispondesse sempre alle medesime stelle, l'anno *anomalistico* sarebbe eguale all'anno *siderale*;

ma siccome la linea degli apsid, o l'asse maggiore dell'orbita, ha un moto annuo di circa $62''$ che si eseguisce in *consequentia*, cioè secondo l'ordine de' segni, così il sole dopo esser giunto alla medesima stella non è ancora arrivato allo stesso punto della sua orbita: perciò l'anno anomalistico è più lungo dell'anno tropico, ed il tempo di cui lo supera è di $25' 27'', 2$. Di quest'anno fanno uso gli astronomi per determinare il luogo dell'apogeo, secondo il metodo proposto da Lacaille.

16. ANNI CIVILI. L'anno civile è stato sempre presso tutti i popoli, o *solare* o *lunare*; ma dalla diversità dei modi adottati per calcolare questo periodo sono nate le denominazioni di *embolismico*, di *giuliano*, di *gregoriano*, di *bisestile* e di *comune*, sotto le quali è stato indicato, denominazioni di cui successivamente spiegheremo il significato.

Questo periodo ha dovuto necessariamente comporsi di periodi meno lunghi e più facili a calcolarsi, regolandosi sulle diverse fasi che seguano una rivoluzione intera del sole (2) o della luna (12). Così un certo numero di giorni ha formato la settimana o la decade dei Greci, un certo numero di settimane o di decadi, il mese, un certo numero di mesi, l'anno. Ma in quale epoca è stata stabilita questa divisione dell'anno che semplicizza i calcoli cronologici, e facilita le relazioni sociali? Una tal questione, che d'altronde appartiene interamente al dominio delle scienze letterarie, non è stata ancora risolta in un modo preciso e incontestabile. Riportando in questo articolo gli usi dei popoli più celebri dell'antichità, rapporto alla divisione dell'anno, abbiamo dovuto omettere qualunque congettura, e presentare i soli fatti storicamente dimostrati. Per meglio comprendere l'insieme di questo compendio, sarà necessario percorrere il quadro posto alla fine di questo articolo, osservando tuttavia che i mesi dei popoli, dei quali noi descriviamo l'anno, vi sono disposti soltanto nell'ordine che avevano negli antichi calendarj, e non già nell'ordine dei rapporti che possono avere tra loro; concordanza che il lettore potrà facilmente trovare da sé stesso.

17. L'anno civile degli Egiziani era un anno solare composto di 360 giorni, e diviso in 12 mesi, che erano invariabilmente ognuno di 30 giorni; dopo il dodicesimo mese si aggiungevano cinque giorni *epagomeni* o addizionali, che portavano così a 365 giorni l'intera durata dell'anno.

L'anno egiziano era un anno *vago*, perchè non aveva un principio fisso, come è stabilito nei calendarj attualmente in uso. Il suo principio retrogradava di un giorno ogni quattro anni, e corrispondeva successivamente a tutte le stagioni. Gli Egiziani non conoscevano l'anno *bisestile* (29), e perdevano circa sei ore ogni anno, dimanierachè 1461 dei loro anni non equivalevano che a 1460 anni *giuliani* (30). Quando però l'Egitto divenne una provincia romana, gli Egiziani adottarono l'anno *giuliano*, ma con alcune alterazioni: imperocchè, ritenendo gli antichi nomi dei loro mesi, conservarono i cinque giorni *epagomeni*, e posero il giorno intercalato ogni quarto anno tra il 28 e il 29 d'Agosto. Il loro anno riformato in tal modo dicevasi *annus actiacus*, perchè era stato istituito dopo la battaglia di Azio, 32 anni avanti G. C., ed il suo principio corrispondeva al 29 Agosto dell'anno *giuliano*.

18. L'anno ebraico ecclesiastico era un anno *lunare*, composto di dodici mesi alternativamente di 30 e di 29 giorni; e facevasi corrispondere coll'anno *solare*, aggiungendovi periodicamente un tredicesimo mese di 29 giorni chiamato *Veadar*, o secondo *Adar*; ed allora il mese di *Adar* era di 30 giorni: così l'anno era di 354 giorni negli anni *comuni*, e di 384 negli anni *embolismici* o *intercalari*.

L'anno ebraico moderno o civile è pure un anno *lunare* di 12 mesi negli anni *comuni*, e di 13 negli anni *embolismici*, i quali sono il 3°, 6°, 8°, 11°, 14°, 17°, e 19° del ciclo di 19 anni, ma il suo principio è fissato al novilunio più pros-

simo all'equinozio d'autunno, mentre l'anno ecclesiastico principia col novilunio più prossimo all'equinozio di primavera. È da osservarsi ancora che non dovendo l'anno civile cominciare giammai nè in Domenica, nè in Mercoledì, nè in Venerdì, gli Ebrei sono obbligati a fare alcuni anni comuni di 353 giorni, ed altri di 355, e gli embolismici, alcuni di 383, ed altri di 385 giorni. Gli anni di 353 e di 383 giorni si dicono *deficienti*, e quelli di 355 e di 385 diconsi *abbondanti*: nei primi si toglie un giorno al mese di Cisleu, che diviene di 29 giorni, e nei secondi se ne aggiunge uno al mese di Marchesvan che allora si fa di 30 giorni.

Secondo i Giudei la creazione del mondo avvenne in un novilunio che essi suppongono avere avuto luogo l'anno 953 del periodo giuliano il 7 Ottobre a ore

11 $\frac{204}{1080}$ del meridiano di Gerusalemme, e da quel novilunio cominciano a con-

tare i loro anni. Siccome pertanto l'anno della nascita di Gesù Cristo è il 4714 del periodo giuliano, così ne viene per conseguenza che l'era volgare comincia dall'anno 3761 dell'era giudaica: quindi se si aggiunge 3761 ad un anno qualunque dell'era cristiana si avrà l'anno giudaico corrispondente che comincia dall'autunno. Da questo computo si vede che l'anno ebraico si considera come solare, ed infatti si può considerare come tale a motivo degli anni embolismici che riconducono all'incirca di tre in tre anni il cominciare dell'anno ebraico alla medesima epoca dell'anno solare.

Ogni settimo anno, presso i Giudei, si chiamava pure anno *sabatico*. Durante tutto quest'anno i Giudei lasciavano riposare le terre. Il ritorno di ogni settimo anno *sabatico*, cioè ogni 49° anno, chiamavasi anno del *giubbileo*; era questo un anno religioso che veniva celebrato colla massima solennità.

19. L'anno greco era lunare e composto di dodici mesi che in origine furono fatti alternativamente di 30 e di 29 giorni. Esso era *embolismico* come l'anno ebraico nel 3°, 6°, 8°, 11°, 14°, 17° e 19° anno del ciclo lunare, affinché i novilunj e i plenilunj ritornassero nelle medesime stagioni dell'anno. *Vedi CICLO LUNARE.*

Il mese dei Greci era diviso in tre decadi: la prima chiamavasi ἀρχαῖος, *del principio del mese*, la seconda μεσσηνός, *della metà del mese*, e la terza ὀψιμηνός, *della fine del mese*. L'anno greco cominciava colla prima luna piena del solstizio d'estate. Negli anni embolismici il mese intercalare si poneva dopo il mese *Posideon*, e dicevasi *Posideon secondo*.

20. L'anno macedone era un anno lunare che non differiva dal greco che nel nome e nell'ordine dei mesi. Quest'anno cominciava coll'equinozio d'autunno, e quindi il suo primo mese corrispondeva col quarto dell'anno greco.

21. L'anno etiopico è un anno solare che si accorda perfettamente coll'anno egiziano azzisco, e al pari di quello comincia il 29 Agosto.

22. L'anno siriano è un anno solare che principia il primo del mese d'ottobre dell'anno giuliano, e che non differisce da questo che nel nome dei mesi.

23. L'anno arabo o turco è un anno *lunare*, ed il periodo di 30 anni vi è diviso in anni comuni e in anni embolismici. Esso è composto di 12 mesi alternativamente di 29 e di 30 giorni. Ogni 2°, 5°, 7°, 10°, 13°, 15°, 18°, 21°, 24°, 26°, e 29° anno del ciclo trentenario della luna, si aggiunge un giorno epagomeno; così gli anni comuni sono di 354 giorni, e gli anni embolismici di 355. L'era dei Maomettani dicesi *Egira*, e principia dalla fuga di Maometto dalla Mecca, la quale ebbe luogo il venerdì 16 Luglio dell'anno 622 dell'era nostra.

Non ci occuperemo adesso a dar le regole per trovare la corrispondenza tra il nostro computo e quello dell'Egira: chi ne fosse curioso potrà consultare: *Greaves, Epochae celebriores astronomis, historicis, et chronologis aethaio-*

rum, syro-græcorum, arabum, persarum, chorasmiorum usitatae, Londra, 1650 in-4; *L'art de vérifier les dates*, Parigi 1820 e segg., 8 vol. in-4, terza edizione; Niebühr, *Descrizione dell' Arabia*, Copenaghen, 1772 in-4; Santini, *Elementi di Astronomia*, Padova 1830, 2 vol. in-4.

24. L'anno persiano, composto di 12 mesi, ognuno di 30 giorni, e di 5 giorni epagomeni, è un anno solare simile all'anno egiziano. Verso la metà dell'undecimo secolo, fu fatta una correzione al calendario persiano, intercalando un giorno di quattro in quattro anni. Ma siccome si era di già riconosciuto che l'anno solare non è esattamente di 365 giorni e 6 ore, fu deciso che alternativamente, dopo sette o otto intercalazioni, s'intercalasse il quinto anno invece del quarto; dal che si vede che quei popoli conoscevano molto esattamente la lunghezza dell'anno, poichè in tal modo l'anno persiano sarebbe di 365 giorni, 5 ore, 49 minuti e 31 secondi, durata che differisce pochissimo dall'anno gregoriano, che gli Europei non hanno adottato nel loro calendario che più di cinquecento anni dopo gli Asiatiei. Sulla lunghezza dell'anno persiano il Lettore potrà esaminare le *Istituzioni d'Astronomia* di Lemonnier di sopra citate, le *Note* di Golio all'*Astronomia* di Alfergan (*Vedi ALFERGAN*), e le *Memorie* dell'Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere, Tom. I, pag. 17.

25. Romolo fece l'anno romano di soli dieci mesi, i quali erano ora di 31, ed ora di 30 giorni. Ecco i nomi di questi mesi, e il numero dei giorni dei quali erano composti: il 1.^o mese dell'anno era il mese di Marzo ed aveva 31 giorno, il 2.^o, o Aprile, ne aveva 30, 3.^o Maggio 31, 4.^o Giugno 30, 5.^o Quintile o Luglio 31, 6.^o Sestile o Agosto 30, 7.^o Settembre 30, 8.^o Ottobre 31, 9.^o Novembre 30, 10.^o Dicembre 30; e l'anno intero comprendeva 304 giorni. Col mezzo di questa distribuzione Romolo supponeva che l'anno dovesse cominciare sempre dalla primavera, eredendo che il sole scorresse in 304 giorni per tutte le stagioni, mentre invece mancavano 61 giorno perchè quest'anno si accordasse coll'anno solare. Da questa differenza pertanto risultava che i medesimi mesi dell'anno non corrispondevano alle medesime stagioni, e per rimediare ad un tale inconveniente si aggiungeva annualmente a piacere e senza alcuna regola quel numero di giorni, che approssimativamente si giudicava necessario per ricondurre il primo mese dell'anno al medesimo stato del cielo. Maerobio, *Saturnalia*, lib. I, cap. 12.

26. Numa Pompilio, immediato successore di Romolo, si accinse a riformare il calendario romano in un modo stabile e conforme alle rivoluzioni degli astri; e a tal fine prese a modello l'anno di cui si servivano i Greci. Per distribuire dunque l'anno romano in dodici mesi come quello dei Greci, tolse un giorno a ciascuno dei sei mesi che avevano trenta giorni, ed aggiungendo questi sei giorni ai cinquanta che mancavano all'anno di Romolo per ridurlo un anno lunare, ne formò due nuovi mesi, che chiamò Gennajo e febbrajo, composti ognuno di 28 giorni. Il primo di questi due mesi addizionali fu collocato al principio dell'anno, ed il secondo al termine. In seguito a motivo di una superstizione religiosa di quel tempo, per cui i numeri impari erano considerati di felice augurio, lo stesso Numa aumentò di un giorno il mese di Gennajo, dal che risultò l'anno romano di 355 giorni divisi in dodici mesi nel modo seguente: 1.^o Gennajo 29 giorni, 2.^o Marzo 31, 3.^o Aprile 29, 4.^o Maggio 31, 5.^o Giugno 29, 6.^o Quintile 31, 7.^o Sestile 29, 8.^o Settembre 29, 9.^o Ottobre 31, 10.^o Novembre 29, 11.^o Dicembre 29, 12.^o febbrajo 28. Così l'intero anno e tutti i mesi avevano un numero impari di giorni, ad eccezione di febbrajo che ne contava un numero pari, e che perciò era destinato alle ceremonie lugubri.

In tal modo l'anno di Numa aveva un giorno di più di quello dei Greci, ma essendo al pari di questo un anno lunare non poteva trovarsi d'accordo col solo

e coll'ordine delle stagioni. All'oggetto pertanto di ricondurre il principio dell'anno alla stessa stagione, i Greci inserivano periodicamente nell'anno comune un mese intercalare, che rendeva fissa la concorrenza delle stagioni nei medesimi mesi; cosicchè il loro anno, *lunare* per i mesi, diveniva *solare* per l'embolismo. Ancora Numa comprese la necessità di una tale intercalazione, e ordinò che ogni due anni si aggiungesse un mese all'anno comune con questa regola, che in un biennio fosse di 22 giorni e nell'altro di 23, e così successivamente: in tal modo il primo anno del suo calendario fu un anno comune di 355 giorni, il secondo un anno intercalare di 377 giorni, il terzo un anno comune di 355 giorni, il quarto un anno intercalare doppio di 378 giorni; dopo di che ritornavano di nuovo nello stesso ordine le medesime intercalazioni. In questa maniera l'anno romano medio conteneva un giorno di più dell'anno solare, e doveva per conseguenza di un tal difetto d'istituzione allontanarsi continuamente da quell'ordine di stagioni, nel quale era stato stabilito in origine. Vedasi Macrobio, *Saturnalia*, lib. I, cap. 12; Censorino, *De die natali*, cap. 20; e Plutarco nella vita di Numa.

Il mese addizionale fu detto *intercalarius*, e venne collocato tra il 23 e il 24 di febbrajo, cosicchè quando aveva luogo l'intercalazione si toglievano cinque giorni al mese di febbrajo, e dopo il 23 di questo mese cominciavano a contarsi i giorni del mese intercalare, al quale si aggiungevano i cinque giorni tolti a febbrajo. In questo senso il giureconsulto Celso dice che il mese intercalare era di 28 giorni: *Mensis autem intercalaris constat ex diebus viginti octo*. Leg. 98. ff. *de verborum significatione*: tale infatti era la lunghezza di questo mese quando l'intercalazione era doppia.

27. Nel riformare il calendario, Numa pose il principio dell'anno al solstizio d'inverno, e siccome secondo il computo giuliano il sole in quel tempo entrava nel segno del Capricorno tra il 29 e il 30 Dicembre, e d'altronde gli antichi ponevano i punti dei solstizj e degli equinozj all'ottavo grado dei segni, così il primo anno del calendario di Numa cominciò il 6 Gennajo giuliano dell'anno 41 di Roma, e 713 avanti G. C. Ma l'eccesso di un giorno dell'anno medio romano sull'anno solare allontanò ben presto il principio dell'anno dal solstizio invernale, ed alterò sensibilmente la corrispondenza tra i mesi e le stagioni. È assolutamente incerta l'epoca in cui ebbe luogo la correzione che pose riparo a questo inconveniente. V'ha chi dice avere lo stesso Numa eseguita la nuova correzione del calendario romano, v'ha chi l'attribuisce al re Tarquinio Prisco, e non mancano perfino quelli che sostengono esser essa dovuta ai Decemviri, quantunque questa opinione manchi d'ogni fondamento. Chi desiderasse istruirsi su questo proposito troverà ricca suppellettile di crudizione nel Tom. VIII del *Thesaurus antiquitatum romanarum* del Grevio, Utrecht 1694, 12 vol. in-fol. Noi senza entrare in discussioni sull'autore della nuova riforma del calendario romano, che secondo la nostra opinione accadde sotto il re Tarquinio Prisco, ci restringeremo ad esporre in che questa consistesse, dietro ciò che ne racconta Lalande che l'attribuisce a Numa. Ei dice che questo re divisè i tempi in cicli o periodi di 24 anni, ed ordinò che, negli ultimi otto anni di ciascun periodo, si soppressero alle intercalazioni i 24 giorni di cui i 24 anni del periodo superavano altrettanti anni solari, dimanierachè invece d'intercalare 90 giorni, se ne intercalassero soli 66. Con questa disposizione l'ordine delle intercalazioni era distribuito come segue: gli anni 2º, 6º, 10º, 14º, 18º, 20º e 22º di ciascun ciclo di 24 anni dovevano ricevere un'intercalazione di 22 giorni, e gli anni 4º, 8º, 12º, e 16º dovevano riceverne una di 23: ed in tal modo l'anno medio romano corrispondeva perfettamente all'anno dell'ottaeteride dei Greci, e all'anno giuliano.

L'epoca di questo cangiamento nell'ordine e nella quantità delle intercalazioni avveniva, secondo Lalande, l'anno di Roma 76, e 678 avanti G. C.; rimaneva quindi a correggersi l'errore commesso negli anni precedenti decorsi dall'anno 41 di Roma in poi. Con questa mira, Numa ridusse a 22 giorni soltanto l'intercalazione di 23 giorni che l'anno 76 di Roma avrebbe dovuto avere a tenore della prima riforma, sopprime affatto l'intercalazione di 22 giorni che avrebbe dovuto ricevere l'anno 78, e diminuì d'un giorno quella dell'anno 80; dopo di che ordinò che si cominciassero i cicli di 24 anni col metodo di sopra enunziato. Così, nello spazio di 40 anni, quanti ne corrono dallo stabilimento del suo calendario fino all'anno 80 di Roma, non sopprime che 24 giorni invece di sopprimerne 40; per conseguenza i sedici giorni lasciati di più fecero sì che il 1° Gennajo romano dell'anno 81 di Roma corrispondesse al 22 Benedettino giuliano dello stesso anno, invece di coincidere col 6 dello stesso mese. Siccome poi quell'anno 81 è il primo di un ciclo, e d'altronde tornando indietro si trova che l'anno 57 di Roma, o 697 avanti G. C., cominciava pure il 22 Gennajo giuliano, così quest'anno 57 si fa ordinariamente il primo del primo ciclo, e serve di punto fisso di partenza per tutti gli altri cicli.

Sebbene Lalande, nell'articolo *Anno* del *Dizionario delle Matematiche* che fa parte dell'Enciclopedia metodica, esponga in tal maniera l'ultima riforma del calendario romano, dietro l'opinione del dotto Benedettino D. Francesco Clement, autore della seconda edizione dell'*Arte di verificare le date*, ci sembra poco probabile che Numa fosse giunto a determinare l'anno di 365 giorni e sei ore, quale è appunto la durata dell'anno medio romano nei sopraindicati cicli di 24 anni, mentre è assai dubbio che a questa precisione fossero giunti in quell'epoca i Greci, che tanto precederono tutti gli altri popoli nelle scienze e nelle arti. Noi incliniamo piuttosto a credere che il nuovo sistema d'intercalazioni per cicli di 24 anni fosse stabilito sotto Tarquinio Prisco, o sotto alcun altro degli ultimi re di Roma. Il lettore consulti l'opera del P. Petavio di sopra citata.

28. Il calendario essendo destinato a regolare i giorni delle feste e dei sacrificj venne considerato come parte del culto e ne fu confidata la custodia ai pontefici. Questi erano incaricati di compilarlo, e di disporlo in modo che le feste, i sacrificj, i giorni nundinali ec. non cadessero in certi determinati giorni, che venivano considerati di cattivo augurio: ma essi, tenendo misteriosamente occultato il metodo col quale si compilava il calendario, lo fecero servire all'ingrandimento del loro potere; infatti nessun cittadino sapendo in qual giorno la religione permettesse di trattare le cause e di tener le comizj, era d'uopo in tutti gli affari di ricorrere ai ministri della religione per ottenere gli schiarimenti necessarj. I pontefici seguirono i principj di sopra esposti per le intercalazioni fino al principio della repubblica, ma in seguito consultando piuttosto il proprio interesse che le regole indicate dalla scienza e dalla ragione, si arrogarono il diritto di sopprimere o di aggiungere l'intercalazione a loro piacere: questo accadde la prima volta l'anno 257 di Roma, 497 avanti G. C.; ed in seguito il disordine e la confusione che risultò dalla condotta arbitraria dei pontefici giunse a tale, che negli ultimi tempi della repubblica i mesi destinati a decorrere coll'inverno si trovavano nell'autunno.

Anco l'ordine dei mesi stabilito da Numa andò soggetto ad un'alterazione per una mira puramente politica. L'anno 305 di Roma, 449 avanti G. C., i Decemviri collocarono il mese di febbrajo immediatamente dopo il mese di Gennajo; e così questo mese, che nell'antico calendario era l'ultimo dell'anno, divenne il secondo. In questa trasposizione non ebbero i Decemviri altro scopo che quello di prolungare la loro magistratura. Infatti, essendo entrati in carica agl'Idi di Maggio, il mese di febbrajo dell'anno della loro installazione (304 di Roma) si trovò

compreso necessariamente nell'anno del loro decemvirato; ma ponendo nell'anno seguente (365) il mese di febbrajo immediatamente dopo Gennajo, e così prima degl' Idi di Maggio, termine della loro magistratura, essi vennero e dare arbitrariamente alla loro amministrazione una durata di 14 mesi (compreso il mese intercalare), ossia di 406 giorni. Mentre di qui apprendiamo come il mese di febbrajo venisse ad occupare il secondo posto, ci è lecito congetturare di qual natura fossero le ragioni che regolavano le intercalazioni, e che in progresso di tempo produssero la mostruosità di far corrispondere, nell'anno di Roma 565, il primo di Gennajo al 29 Agosto, e nel 587 di Roma al 15 Ottobre.

29. Volendo pertanto Giulio Cesare, investito della dignità pontificale, far cessare per sempre una tal confusione, col dare all'anno una costituzione regolare ed invariabile, fece venire a Roma Sosigene, astronomo d'Alessandria, che l'aiutò a mandare ad esecuzione questo utile ed importante progetto, indicandogli un sistema facile per stabilire la lunghezza dell'anno in modo che le stesse stagioni ritornassero nei medesimi mesi. La riforma di Giulio Cesare fu in seguito adottata da tutti i popoli dell'Europa, ed è conosciuta nella scienze astronomiche sotto il nome di *era giuliana*.

Sosigene avendo supposto l'anno medio di 365 giorni e sei ore, Cesare stabilì che il calendario fosse disposto per periodi di quattro anni: i primi tre, che chiamansi *comuni*, hanno 365 giorni; ed il quarto, chiamato *bisestile*, ne ha 366, a cagione delle 6 ore che nello spazio di 4 anni compongono un giorno. Questo giorno epagomeno si poneva dopo il 24 febbrajo che era il sesto avanti le calende di Marzo. Ora, siccome un tal giorno così ripetuto era per conseguenza chiamato *bis sexto calendas Martii*, l'anno al quale veniva aggiunto fu detto *bis sextus*, dal che derivò *bisestile*. Il giorno intercalare non è più al presente riguardato come una ripetizione del 24 febbrajo, quando nol fosse per le feste della Chiesa, ma è aggiunto alla fine di questo mese, e ne forma il vigesimonono giorno.

I mesi dell'anno *giuliano* sono così disposti: 1°. Gennajo 31 giorno, 2°. febbrajo 28, 3°. Marzo 31, 4°. Aprile 30, 5°. Maggio 31, 6°. Giugno 30, 7°. Luglio 31, 8°. Agosto 31, 9°. Settembre 30, 10°. Ottobre 31, 11°. Novembre 30, 12°. Dicembre 31. Negli anni bisestili febbrajo ha 29 giorni.

L'anno in cui ebbe luogo questa riforma fu un anno di confusione; poichè per togliere l'errore di 67 giorni, onde l'incominciare dell'anno si era allontanato dal solstizio d'inverno, convenne aggiungere due mesi oltre l'intercalazione di 23 giorni che in quell'anno stesso ricorreva secondo l'antico calendario; cioè che quell'anno, che fu il 707 dalla fondazione di Roma, e il 47 avanti l'era volgare, fu composto di 15 mesi formanti in tutto 445 giorni secondo alcuni, o 443 secondo altri. L'equinozio d'autunno accadde il 25 Settembre. Vedasi Scaligero, *Opus de emendatione temporum*, Ginevra 1609 in-fol. e le altre opere di sopra citate.

30. L'anno *giuliano*, come era stato calcolato da Sosigene, era troppo lungo di circa undici minuti e nove o dieci secondi, che formano presso a poco un giorno in 134 anni, o 3 giorni in 400 anni. Nel 1582 gl'inconvenienti che risultavano dall'errore astronomico, sul quale era fondato il calendario *giuliano*, divennero abbastanza sensibili per indurre il Papa Gregorio XIII a rimediarvi con una nuova riforma. Infatti l'equinozio di primavera, che al tempo del concilio di Nicea, quando si trattò di fissare il giorno nel quale dovevasi celebrare la Pasqua, cadeva il 21 di Marzo, nel 1582 avvenne l'11 dello stesso mese. Il Pontefice chiamò a sé i piùabili astronomi del suo tempo, e con essi concertò l'opportuna correzione da farsi, affinché l'equinozio di primavera cadesse nel giorno stesso del mese in cui cadeva il tempo del concilio niceno; e, poichè era corso un errore di dieci giorni da quel tempo, si tolsero questi dieci giorni

all'anno 1582, e il 5 del mese di Ottobre di quell'anno si contò pel 15, dimaniera che l'equinozio di primavera ritornò l'anno seguente il 21 Marzo.

Ed affinché una simile confusione non si rinnovasse in appresso, fu deciso di togliere ciò che vi era di più nell'anno giuliano, cioè un giorno in 134 anni, e per conseguenza 3 giorni in 400 anni. Questa sottrazione si eseguisce sopprimendo tre anni bisestili ogni 4 secoli, con questa regola, che siano bisestili unicamente gli anni secolari nei quali il numero del secolo è divisibile per 4, nel modo stesso che nel corso di un secolo sono bisestili soltanto gli anni divisibili per 4. Così gli anni 1700, 1800, 1900 sono comuni; l'anno 2000 sarà bisestile, come lo saranno pure il 2400, il 2800 ec. Con questa regola si sopprimono 27 bisestili in trentasei secoli; sarebbe più esatto sopprimerne 28 per accordarsi colla vera durata dell'anno solare, ma la differenza è insensibile, almeno per un gran numero di secoli.

Questa riforma non ha forse appagato pienamente gli astronomi, ma è stata generalmente adottata sotto il nome di riforma *gregoriana*. I paesi protestanti riusarono per lungo tempo di ammetterla: in Germania fu ricevuta soltanto nel 1700, e non si cominciò in Inghilterra a farne uso per l'anno civile che il 1^o Gennaio 1752. Il calendario giuliano non è più seguito al presente che in Russia, dove non si adottò la soppressione dei dieci giorni dell'Ottobre 1582 ordinata dal Papa Gregorio; in quel regno perciò si contano adesso dodici giorni di più. Il modo di contare dei Russi si chiama il *vecchio stile*, in opposizione di quello in uso nel resto dell'Europa, che chiamasi *nuovo stile*.

L'anno civile *gregoriano* è dunque un anno solare, nel quale per mezzo d'intercalazioni per una facile applicazione si sono introdotte le frazioni di tempo che compongono l'anno astronomico (2). È pure un anno *fisso*, perchè comincia sempre alla stessa epoca dopo una completa rivoluzione del sole; il contrario ha luogo, per esempio, per l'anno turco, che essendo lunare e composto soltanto di 354 giorni non può incominciare sempre nella stessa stagione, e per conseguenza è un anno *vago*, come lo era ancora l'anno egiziano. Per maggiori particolarità si veda l'articolo CALENDARIO.

31. Nel 1792 fu immaginata in Francia una riforma completa del calendario, che noi non possiamo passare sotto silenzio, quantunque non abbia sopravvissuto ai tempi procellosi che la videro nascere. Si tolse agli Egiziani (17) la divisione dell'anno in dodici mesi di trenta giorni coll'aggiunta di giorni epagomeni, che si dissero *complementarij*, in numero di cinque o di sei, secondochè l'anno era comune o *bisestile*, e si prese ai Greci (19) la divisione del mese in tre decadi. L'idea di questa riforma era stata ispirata da considerazioni politiche, e fu difficile agli astronomi incaricati di questo lavoro il conciliare le loro esigenze con quelle della scienza. Il calendario *repubblicano* non è stato in uso che per circa dodici anni; ma è necessario conoscere la sua concordanza col calendario *gregoriano* per determinare la cronologia, che è stata posta nel massimo disordine a motivo della sua rigorosa applicazione in tutti gli atti civili e politici di quell'epoca.

Nello stabilire il calendario repubblicano si ebbe pure in mira di ricondurre al sistema decimale delle misure, di recente introdotto in Francia, anco il computo del tempo. Erasi infatti ideato di dividere il giorno in dieci ore, l'ora in cento minuti, il minuto in cento secondi, ec. Ma questo progetto non fu mandato ad esecuzione.

L'anno repubblicano cominciava a mezzanotte il giorno in cui cadeva l'equinozio vero d'autunno. I nomi dei suoi mesi erano: *vendémiaire*, *brumaire*, *frimaire*, *nivôse*, *pluviôse*, *ventôse*, *germinal*, *floreale*, *prairial*, *messidor*, *thermidor*, *fructidor*; che in italiano potrebbero così tradursi: *vendemmiale*,

brumole, glaciale, nevoso, piovoso, ventoso, germile, fiorile, pratile, messifero, termifero, fruttifero. Queste denominazioni di un significato troppo preciso, in quanto che fissavano per ciascun mese uno stato particolare della stagione, non potevano evidentemente divenire di un uso generale, poichè le stagioni non giungono nel medesimo tempo per tutti i popoli della terra.

Ciascun mese era composto di 30 giorni divisi in 3 decadi: i giorni di ciascuna decade si chiamavano: *primidi, duodi, tridi, quartidi, quintidi, sextidi, septidi, octidi, nonidi, decadi*; che potrebbero così trasportarsi in italiano: *primodi, duodi, tridi, quortidi, quintidi, sextidi, settidi, ottidi, nonidi, decodi*. Ai giorni, invece dei santi del calendario gregoriano, si destinò qualche pianta, erba, fiore, o frutto, come il *castagno*, la *menta*, la *rosa*, l'*uva* ec.: al *quintidi* si assegnò alcuno degli animali più utili all'uomo, come il *cavallo*, il *bue* ec.: e la *decade* fu consacrata a qualche arte o virtù, come l'*agricoltura*, la *fede conjugale* ec., ovvero alle diverse età dell'uomo, come l'*infanzia*, la *gioventù* ec. Dei cinque giorni complementarij, che furono aggiunti alla fine dell'anno per compiere la durata dell'anno solare, il primo era dedicato al *genio*, il secondo al *lavoro*, il terzo alle *belle azioni*, il quarto alla *ricompensa*, e il quinto all'*opinione*. Negli anni che avevano sei giorni complementarij, e che perciò si dicevano *sestili*, nel sesto giorno si celebrava una gran festa detta della *Rivoluzione* in commemorazione dell'istituzione della repubblica francese. Per più estese notizie su questo strano calendario si veda *Romme, Annuaire du cultivateur*, Parigi, anno III (1795) in-8, Millin, *Annuaire du républicain*, Parigi, anno II (1793), e Lalande, *Calendrier de la république française*, Parigi anno II (1793).

L'era repubblicana ha principio dal 22 Settembre 1792, che fu il primo *vendemmiale* dell'anno I; e quest'epoca forma il punto di partenza per stabilire la corrispondenza fra il calendario repubblicano e il calendario gregoriano. Per facilitare la ricerca di una tal corrispondenza, presentiamo la seguente tavola che indica a qual giorno dell'era volgare corrisponde il 1°. *vendemmiale* dei primi 24 anni repubblicani.

ANNI REPUB- BLICANI	ANNI DELL' ERA VOLGARE	ANNI REPUB- BLICANI	ANNI DELL' ERA VOLGARE	ANNI REPUB- BLICANI	ANNI DELL' ERA VOLGARE
1	22 Settem. 1792 B	9	23 Settem. 1800	17	23 Settem. 1808 B
2	22 1793	10	23 1801	18	23 1809
3 S	22 1794	11 S	23 1802	19	23 1810
4	23 1795	12	24 1803	20 S	23 1811
5	22 1796 B	13	23 1804 B	21	23 1812 B
6	22 1797	14	23 1805	22	23 1813
7 S	22 1798	15 S	23 1806	23	23 1814
8	23 1799	16	24 1807	24 S	23 1815

La lettera S nella prima colonna indica un anno *sestile* o di 366 giorni, e la lettera B nella seconda colonna indica un anno *biestile* nel calendario gre-

goriano. Gli anni 15, 48, 77, 110, 139, 172, 205, 234, 267, 296, 329, ec., ebe si succedono a intervalli ora di 33 anni ed ora di 29, sarebbero stati sesti-
li, ed ognuno di essi avrebbe preceduto un periodo di 4 anni comuni: ma non
fu stabilita nessuna regola lissa per le intercalazioni, poichè l'articolo III della
legge del 4 *Primaire* anno II (24 novembre 1793) avendo stabilito che l'anno
cominciassse a mezzanotte il giorno in cui cade l'equinizio vero di autunno,
l'intercalazione dei sei giorni complementarij in luogo di cinque doveva costan-
tamente dipendere dalla osservazione. Non ostante, per la corrispondenza dei
due calendarj, il lettore potrà consultare con frutto i dotti calcoli di Delambre
nella *Connaissance des temps* anno VII (1799). Egli vi spiega il modo di de-
terminare quando il periodo degli anni sesti-
li deve esser di 29 o di 33 anni.

Il calendario repubblicano fu abolito il 10 Nevoso anno XIV, corrispondente al
31 Dicembre 1805, e fu ristabilito nuovamente il calendario gregoriano coll' era
cristiana a datare dal primo Gennaio 1806 in poi. Vedi CALENDARIO, ERA, e
PERIODO.

Oltre le opere sparsamente citate nel corso di quest' articolo, il Lettore desi-
deroso di maggiori cognizioni potrà consultare le seguenti:

Bayer (Teofilo Sigifredo), *De horis sinicis; de cyclo horario commenta-
tiones; accedit ejusdem parergon sinicum de calendario sinico*, ec. Pietroburgo,
1735 in-4, con 8 tavole.

* Beveridge (Guglielmo), *Institutionum chronologicarum libri quatuor*, Lon-
dra, 1669 in-4, e Utrecht 1734 in-8.

Calvisio (Setb), *Opus chronologicum ex auctoritate potissimum Sanctae
Scripturae, et historicorum fide dignissimorum, ad motum luminarium coe-
lestium tempora et annos distinguendum*, ec., Lipsia, 1675 in-4, e Francfort,
1685 in-4.

Clemm (Enrico Guglielmo), *Examen temporum mediorum secundum prin-
cipia astronomica et chronologica*, Berlino 1752 in-8.

Delambre (Giovan Batista), *Histoire de l'astronomie ancienne*, Parigi, 1817,
2 vol. in-4.

Detto, *Histoire de l'astronomie du moyen age*, Parigi 1819, 1 vol. in-4.

Detto, *Histoire de l'astronomie moderne*, Parigi 1821, 2 vol. in-4.

Detto, *Histoire de l'astronomie du dix-huitième siècle*, Parigi 1827, 1 vol.
in-4.

Funch (Giovanni), *Chronologin cum commentariis ab initio mundi ad an-
num 1578*, Wittemberg, 1578 in-fol.

Gatterer (Cristoforo), *Compendio di cronologia* (in tedesco), Gottinga,
1777 in-8.

Lange (Guglielmo), *Exercitationes mathematicae septem de annua emen-
datione et de motu apogaei solis*, Copenagheu 1653 in-4.

Munster (Sebastiano), *Calendarium biblicum hebraicum ex hebreorum pen-
etrabilibus editum*, Basilea 1527 in-4.

Petavio (Dionigi), *Uranologium, sive systema variorum auctorum qui de
sphaera ac sideribus eorumque motibus commentati sunt*, Parigi 1630 in-fol.

Detto, *Rationarium temporum in libros tredecim distributum*, Parigi, 1633-
34, 2 vol. in-12, e Amsterdam 1745 in-8.

Schurtzfleisch (Enrico), *Doctrina temporum*, Wittemberg, 1717 in-4.

Detto, *Annus romanus julianus illustratus*, Wittemberg, 1704 in-4.

Selden (Giovanni), *De anno civili veterum Judaeorum*, Leida, 1683 in-8.

Trew (Abdia), *Teoria del calendario* (in tedesco) Luneburg, 1666 in-4.

Usserio (Giacomo), *De Macedonum et Asianorum anno solari*, Leida, 1683 in-8.

Wasmuth (Mattia), *Annales coeli et temporum restituti*, Kiel, 1663 in-fol.

QUADRO DELLE DIVISIONI DELI

N ^o d'ordine dei Mesi	EGIZIANI ANTICHI		ÉGIZIANI MODERNI O COPTI		ARABI		EBREI		SIRI	
	giorni		giorni		giorni		giorni		giorni	
1	Thóth	30	Toot	30	Moharrem	30	Thiari	30	Thecbrin 1 ^o .	3
2	Paóphi	30	Bábéh	30	Safar	29	Marhéssouan	29	Thecbrin 2 ^o .	3
3	Athyr	30	Hatour	30	Raby èl-aouel	30	Kaslew	30	Kanoun 1 ^o .	3
4	Khoiak	30	Kyhak	30	Raby èl-tany	29	Thebet	29	Kanoun 2 ^o .	3
5	Tybi	30	Toubéh	30	Gemady èl-aouel	30	Chebet	30	Chebet	28-29
6	Mekheir	30	Mechyr	30	Gemady èl-tany	29	Adar	29	Adar	31
7	Phamenóth	30	Barmhât	30	Regeb	30	Nisan	30	Nisan	31
8	Pharmouthi	30	Barmoudéh	30	Chaaban	29	Iyar	29	Iyar	31
9	Pakhôn	30	Bachons	30	Ramadân	30	Siwan	30	Hazeyran	31
10	Payni	30	Bawounch	30	Chaoual	29	Thamouz	29	Thamouz	31
11	Epiphi	30	Ébyb	30	Dou-l-qadéh	30	Ab	30	Ab	31
12	Mesori	30	Mechory	30	Dou-l-hagéh	29-30	ÉlouI	29	Éyloul	31
5 giorni epago- meni. Quest'anno è so- lare vago.		5 giorni epago- meni. Anno solare fis- so.		Anno lunare vago.		Annolunare; me- se intercalare embolismico. Questo mese si chiama <i>Veadar</i> , o <i>Adar</i> <i>secondo</i> .		Anno solare fis- so, che comin- cia il primo d' Ottobre.		

Esistono ancora altre suddivisioni dell'anno, delle quali non abbiamo creduto dover parlare, perchè non se ne trova fatto uso in nessuna opera storica o astronomica, perchè conseguentemente non sono di alcun interesse per la Scienza. Quelle che sono state riportate in questo quadro s'incontrano nei lavori dei popoli ai quali esse appartengono, e ci è sembrato importante il ristabilire i veri nomi dei mesi, sfigurati i

ANNO PRESSO DIVERSI POPOLI.

GRECI				PERSIANI	ETIOPI	ROMANI	
ATENIESI	MACEDONI						
giorni	giorni			giorni	giorni		
Hekatombaion 29	Dios 29	Servardyn 30	Maskaram 30	Januarius 31			
Metageitnion 30	Apellaios 30	Ardabahecht 30	Thyqymt 30	Februarius 28-29			
Boedromion 29	Aydynaioi 29	Khordad 30	Mydar 30	Martius 31			
Maimakterion 30	Peritios 30	Tyr 30	Thysas 30	Aprilis 30			
Pyanepsion 29	Dystros 29	Mordad 30	Tyr 30	Maius 31			
Poseideon 30	Xandicos 30	Chahariwar 30	Yakathith 30	Junius 30			
Gamelion 29	Artemisios 29	Mebr 30	Magabith 30	Julius 31			
Anthesterion 30	Daisios 30	Aban 30	Miyaziya 30	Augustus 31			
Elaebolion 29	Panemos 29	Adar 30	Ginbat 30	September 30			
Mounykhion 30	Loos 30	Dy 30	Syn 30	October 31			
Thargelion 29	Gorpaios 29	Beheman 30	Hanle 30	November 30			
Skirophorion 30	Yperbeteaios 30	Essandarmod 30	Nabasse 30	December 31			
Anno lunare fisso, che comincia al solstizio d'estate, con un mese embolismico intercalare, detto Poseideon 2°.	Anno lunare fisso, che comincia all'equinozio d'autunno.	5 giorni epagomeni. Quest'anno è solare tropico.	5 giorni epagomeni. Quest'anno è solare fisso, e comincia il 29 d'Agosto.	Anno bisestile ogni quattro anni.			

un modo da far pietà nella maggior parte delle opere moderne. Rammenteremo qui ciò che abbiamo già detto, che cioè non si deve cercare una concordanza nella disposizione dei mesi, ebe qui abbiamo collocato nell'ordine che essi hanno nei rispettivi calendarii. Questa concordanza, o almeno il metodo generale per trovarla, sarà spiegato all'articolo CONCORDANZA.

ANNODATO (*Geom.*). Dicesi *annodato* una curva i di cui rami tagliandosi formano un' *ovale* o *nodo*. Tale è la curva rappresentata dalla figura 1 della Tavola XXIII. Vedi *Nodo* e *Ovale*.

ANNUALE. Vedi *Annuo*.

ANNUALITÀ' (*Aritm.*). Con questo nome s'indica una rendita che si paga soltanto per un certo numero di anni, in epoche determinate, in modo che alla fine di questo tempo il debitore si trova aver restituito la somma presa ad imprestito insieme coi frutti, pagando annualmente una medesima somma.

Per determinare le relazioni che passano fra l'annualità e la somma da restituirsi, bisogna ridurre ad una stessa epoca il valore di questa somma e quello dei pagamenti successivi. Sia dunque A una somma presa attualmente ad imprestito, e si tratti di farne il rimborso in m pagamenti annui eguali, che indicheremo con a . Se il debitore dovesse semplicemente restituire la somma A coi suoi frutti al termine di un anno, a quest'epoca dovrebbe pagare

$$A + Ar,$$

essendo r il frutto dell'unità della moneta nella quale è espressa la somma A , o in altri termini il rapporto tra una somma di 100 lire, presa per termine di confronto, e il frutto di questa stessa somma. Così r è eguale a $\frac{5}{100}$ se il frutto

è al 5 per 100; è eguale a $\frac{6}{100}$ se il frutto è al 6 per 100, e così successivamente. È evidente dunque che, per trovare il frutto di una somma qualunque A , basta moltiplicarla pel rapporto r .

Indicando dunque con A' ciò che il debitore deve pagare tanto di capitale quanto di frutti alla fine dell'anno, avremo l'eguaglianza

$$A' = A + Ar = A(1+r).$$

Ma se, invece di pagare il suo debito alla fine del primo anno, il debitore ne differisse il pagamento alla fine del secondo anno, in tal caso non solamente dovrebbe rimborsare la somma A' , che egli doveva al principio del secondo anno, ma ancora i frutti di questa somma per un anno, che ammontano a $A'r$; egli dovrebbe dunque pagare

$$A' + A'r = A'(1+r).$$

Sostituendo in luogo di A' il suo valore $A(1+r)$, si ha pel valore del pagamento da farsi al termine del secondo anno l'espressione

$$A(1+r)^2.$$

Proseguendo nella stessa maniera, è facile vedere che se l'imprestito durasse tre anni, la somma da rimborsarsi alla fine del terzo anno sarebbe

$$A(1+r)^3,$$

e che in generale, se il debitore non effettuasse il suo pagamento che dopo m anni, questa somma sarebbe

$$A(1+r)^m.$$

Tale è dunque il valore di una somma A , somministrata presentemente ad imprestito, ridotta al termine degli m anni dell'imprestito, supponendo che non sia stato fatto nessun rimborso in questo intervallo.

Ma, nel caso delle *annualità*, il debitore paga al suo creditore una somma a alla fine di ogni anno successivo. Bisogna dunque calcolare nello stesso modo

anco i valori di questi diversi pagamenti riducendoli tutti alla fine dell'ultimo anno.

Ora, il primo pagamento a , essendo fatto $m-1$ anni avanti il termine dell'imprestito, vale nelle mani del creditore che lo riceve

$$a(1+r)^{m-1}.$$

Il secondo pagamento essendo fatto $m-2$ anni avanti la stessa epoca vale

$$a(1+r)^{m-2},$$

e così successivamente fino all'ultimo, che essendo fatto al momento della scadenza vale soltanto a .

Ma bisogna necessariamente che tutte le somme ricevute dal creditore, al termine dell'imprestito, equivalgano al valore dell'imprestito stesso, vale a dire a

$$A(1+r)^m;$$

si ha dunque l'eguaglianza

$$A(1+r)^m = a(1+r)^{m-1} + a(1+r)^{m-2} + a(1+r)^{m-3} + \dots + a(1+r)^2 + a(1+r) + a.$$

Il secondo membro di questa eguaglianza forma una progressione geometrica decrescente, la di cui somma è (Vedi PROGRESSIONE GEOMETRICA)

$$\frac{a[(1+r)^m - 1]}{r};$$

dunque l'eguaglianza trovata si riduce a

$$A(1+r)^m = \frac{a[(1+r)^m - 1]}{r} \dots \dots (a)$$

Quest'ultima eguaglianza contiene la soluzione di tutti i quesiti che possono proporsi sulle annualità. Da essa si deducono immediatamente le due formule

$$A = \frac{a}{r} \cdot \frac{(1+r)^m - 1}{(1+r)^m} \dots \dots (1),$$

$$a = \frac{Ar(1+r)^m}{(1+r)^m - 1} \dots \dots (2),$$

la prima delle quali serve a determinare il valore di una somma restituita per mezzo di un'annualità di cui si conosce l'ammontare, e la seconda serve a determinare l'ammontare dell'annualità quando si conosce la somma da restituirsi.

Applicheremo adesso queste formule ad alcuni esempi.

ESEMPIO I. Si domanda qual somma bisogna pagare annualmente per restituire in 10 anni un prestito di 4000 lire, co' suoi frutti al 6 per 100.

In questo caso abbiamo: $A = 4000$, $m = 10$, e $r = \frac{6}{100}$. Sostituendo questi valori nella formula (2) si ottiene

$$a = \frac{4000 \times \frac{6}{100} \times \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10}}{\left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10} - 1} = \frac{240 \left(\frac{106}{100}\right)^{10}}{\left(\frac{106}{100}\right)^{10} - 1}.$$

Calcolando $\left(\frac{106}{100}\right)^{10}$ per mezzo dei logaritmi, si trova $\left(\frac{106}{100}\right)^{10} = 1,790848$, e quindi

$$a = \frac{240 \times 1,790848}{0,790848}$$

Eseguendo il resto dei calcoli direttamente, o per mezzo dei logaritmi, si trova in fine $a = 543$ lire e 47 centesimi. Questa è dunque la somma che annualmente bisogna pagare per 10 anni, onde dimettere un prestito di 4000 lire fruttifero al 6 per 100.

ESEMPIO II. Si domanda qual somma bisogna dare per acquistare un'annualità di 500 lire per 12 anni, al frutto del 4 per 100.

In questo caso abbiamo: $a = 500$, $m = 12$, e $r = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$. La formola (1) dà

$$A = \frac{500 \left[\left(1 + \frac{1}{25} \right)^{12} - 1 \right]}{\frac{1}{25} \left(1 + \frac{1}{25} \right)^{12}}$$

Calcolando il valore di $\left(1 + \frac{1}{25} \right)^{12}$, ossia di $\left(\frac{26}{25} \right)^{12}$, che si trova eguale a 1,60103, si avrà

$$A = \frac{25 \times 500 \times 0,60103}{1,60103} = 4692 \text{ lire e } 53 \text{ centesimi}$$

Così, fissato il frutto al 4 per 100, bisognerebbe dare 4692 lire e 53 centesimi per ricevere per 12 anni un'annualità di 500 lire.

I calcoli che esigono le questioni relative alle annualità essendo molto imbarazzanti per le persone alle quali non è familiare l'uso dei logaritmi, abbiamo creduto di dovere qui unire una Tavola che dispensa dal servirsene. Questa Tavola contiene le somme che si devono pagare per ricevere un'annualità di una lira durante un numero di anni da 1 fino a 60, col frutto dal 3 per 100 al 6 per 100. Così basta una sola moltiplicazione o una sola divisione per ottenere il risultato finale delle operazioni indicate nelle formole (1) e (2). Per esempio, per trovare la somma che bisogna pagare per acquistare un'annualità di 500 lire per 12 anni al frutto del 4 per 100, non si deve fare altro che cercare il numero che, nella colonna 4 per 100, corrisponde al numero 12 della colonna degli anni, e moltiplicarlo per 500. Questo numero è 9,385074, e il suo prodotto per 500 è 4692 lire e 53 centesimi, come abbiamo trovato nel secondo esempio. Se al contrario si trattasse di determinare quale è la somma da pagarsi annualmente per 10 anni, per rimborsare un prestito di 4000 lire al 6 per cento, si cercherebbe nella Tavola il numero della colonna 6 per 100 che corrisponde al numero 10 della colonna degli anni, e si dividerebbe la somma proposta per questo numero. Il numero della Tavola è 7,360087, e il quoziente che si ottiene è 543 lire e 47 centesimi; risultato identico a quello trovato nel primo esempio.

Questa Tavola è calcolata sulla formola (1), facendovi successivamente, per un medesimo frutto annuo, $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ ec., essendo a costantemente eguale a 1.

TAVOLA

DELLE SOMME CHE PRODUCONO UNA RENDITA ANNUA DI UNA LIRA DURANTE UN NUMERO DI ANNI COMPRESO TRA 1 E 60, ESSENDO IMPEGATE AD UN FRUTTO DAL 5 AL 6 PER 100.

ANNI	5 PER 100	5 1/2 PER 100	4 PER 100	4 1/2 PER 100	3 PER 100	3 1/2 PER 100	6 PER 100
1	0,970871	0,966181	0,961538	0,956988	0,952381	0,947807	0,943296
2	1,913170	1,899691	1,886095	1,872468	1,858810	1,845159	1,831533
3	2,826311	2,801637	2,775091	2,747664	2,720246	2,692921	2,665612
4	3,716098	3,673073	3,628995	3,584856	3,540650	3,505189	3,469106
5	4,579708	4,515032	4,448822	4,382077	4,315777	4,249886	4,184364
6	5,417191	5,328553	5,242137	5,157922	5,074902	4,993079	4,912324
7	6,230283	6,114511	6,002056	5,892971	5,786273	5,681969	5,580038
8	7,019692	6,873956	6,732715	6,595886	6,462413	6,332467	6,205974
9	7,786109	7,607687	7,435332	7,268790	7,107822	6,952498	6,802692
10	8,530203	8,310615	8,108960	7,912718	7,721735	7,537027	7,360087
11	9,252624	9,001551	8,760177	8,528017	8,305114	8,092239	7,888755
12	9,951001	9,663334	9,385071	9,118381	8,862522	8,618699	8,385811
13	10,631955	10,302738	9,981618	9,662852	9,355733	9,06075	8,86683
14	11,296073	10,940220	10,563123	10,222825	9,896611	9,586619	9,291981
15	11,939955	11,517111	11,118387	10,73516	10,376558	10,037582	9,712219
16	12,561102	12,091117	11,652296	11,234015	10,837770	10,462102	10,105895
17	13,166118	12,631321	12,165609	11,707191	11,271066	10,861616	10,479200
18	13,755513	13,149682	12,659197	12,165992	11,685581	11,26075	10,824603
19	14,329799	13,709837	13,133839	12,703794	12,083321	11,607653	11,156116
20	14,877175	14,212403	13,590326	13,007936	12,462210	11,950379	11,469921

SEGUITO DELLA TAVOLA PRECEDENTE

ANNI	3 PER 100	3 1/2 PER 100	4 PER 100	4 1/2 PER 100	5 PER 100	5 1/2 PER 100	6 PER 100
21	15,41524	14,637974	14,029160	13,461774	12,821153	12,25244	11,764077
22	15,936917	15,167125	14,451115	13,784125	13,163003	12,583168	12,041582
23	16,443608	15,662410	14,456842	14,147725	13,488574	12,875046	12,303379
24	16,935542	16,158368	15,246963	14,454478	13,798642	13,15700	12,550358
25	17,413148	16,461515	15,632080	14,832009	14,095945	13,413930	12,833556
26	17,876842	16,800352	15,982769	15,146611	14,375185	13,664493	13,008166
27	18,327031	17,285364	16,359580	15,413033	14,643034	13,868103	13,210534
28	18,764108	17,667019	16,663063	15,72874	14,898127	14,121118	13,400664
29	19,188155	18,035767	16,983215	16,028869	15,141074	14,333098	13,500721
30	19,600441	18,390045	17,292033	16,288869	15,372451	14,533746	13,764631
31	20,000428	18,736276	17,588194	16,541391	15,592810	14,723926	13,920086
32	20,388605	19,068805	17,873551	16,788891	15,802677	14,904200	14,081043
33	20,765792	19,390208	18,146074	17,022862	16,002549	15,075072	14,232230
34	21,131837	19,700484	18,411198	17,246738	16,192004	15,24034	14,378141
35	21,487220	20,000661	18,664613	17,461012	16,374194	15,390550	14,498246
36	21,832252	20,290404	18,908282	17,666040	16,546852	15,536067	14,600986
37	22,167235	20,570223	19,14279	17,862240	16,712187	15,664256	14,736780
38	22,492462	20,841087	19,367864	18,049990	16,867893	15,804726	14,846019
39	22,808215	21,102500	19,584485	18,229656	17,017011	15,928660	14,949075
40	23,114772	21,355072	19,792774	18,401584	17,159086	16,046126	15,046297

SEGUITO DELLA TAVOLA PRECEDENTE

ANNI	3 PER 100	3 ½ PER 100	4 PER 100	4 ½ PER 100	5 PER 100	5 ½ PER 100	6 PER 100
41	23, 412600	21, 593114	19, 993052	18, 566109	17, 294368	16, 457462	15, 138016
42	23, 701359	21, 834882	20, 185697	18, 723550	17, 433008	16, 283600	15, 224543
43	23, 981902	22, 064069	20, 370795	18, 871210	17, 545912	16, 363033	15, 308473
44	24, 254271	22, 282791	20, 548311	19, 016383	17, 662773	16, 457844	15, 383182
45	24, 518713	22, 495450	20, 720040	19, 183413	17, 774670	16, 547724	15, 455832
46	24, 775449	22, 700918	20, 884652	19, 288371	17, 880066	16, 632010	15, 524370
47	25, 024708	22, 899438	21, 042036	19, 416709	17, 981016	16, 713664	15, 589028
48	25, 266207	23, 091244	21, 195131	19, 538607	18, 077158	16, 790167	15, 650087
49	25, 501657	23, 276561	21, 344722	19, 651208	18, 168722	16, 862749	15, 707572
50	25, 729764	23, 455618	21, 482185	19, 762008	18, 255925	16, 931517	15, 761861
51	25, 951227	23, 628616	21, 617485	19, 867950	18, 338977	16, 996701	15, 813076
52	26, 166240	23, 795765	21, 747582	19, 960330	18, 418073	17, 058485	15, 861393
53	26, 374990	23, 957260	21, 872655	20, 046345	18, 493405	17, 117045	15, 906974
54	26, 577600	24, 113295	21, 992057	20, 119181	18, 565146	17, 172553	15, 949976
55	26, 774428	24, 264053	22, 108612	20, 248021	18, 633472	17, 225172	15, 990543
56	26, 965464	24, 409723	22, 210819	20, 333034	18, 698545	17, 275043	16, 028814
57	27, 150930	24, 550418	22, 306749	20, 444387	18, 763219	17, 322323	16, 064919
58	27, 331005	24, 686423	22, 392607	20, 492236	18, 819512	17, 367127	16, 098981
59	27, 505831	24, 817800	22, 508430	20, 560733	18, 879754	17, 409602	16, 131113
60	27, 675564	24, 941731	22, 623490	20, 638022	18, 922490	17, 449856	16, 161428

Possiamo ancora proporci sulle annualità due problemi diversi dai precedenti, cioè: 1°. determinare il numero degli anni necessari per estinguere un debito, conoscendo questo debito, il frutto e l'annualità che vuol pagarsi; 2°. determinare a qual frutto annuo viene impiegato il danaro, quando il numero degli anni, l'annualità e il debito sono conosciuti.

Nel primo caso, prendendo il valore di $(1+r)^m$ dalla formula fondamentale (a), si ottiene

$$(1+r)^m = \frac{a}{a-Ar};$$

espressione dalla quale non si può dedurre il valore di m che ricorrendo ai logaritmi. Prendendo dunque i logaritmi dei due numeri di questa eguaglianza si ha

$$m \log(1+r) = \log a - \log(a-Ar),$$

donde

$$m = \frac{\log a - \log(a-Ar)}{\log(1+r)}.$$

Mostreremo adesso l'uso di quest'ultima formula, applicandola ad un esempio.

ESEMPIO III. Si domanda il numero degli anni nei quali si dovrà pagare un'annualità di 500 lire per estinguere un debito di 4692,53 lire, e 53 centesimi, essendo il frutto al 4 per 100.

Abbiamo $a=500$, $A=4692,53$, $r=\frac{4}{100}=\frac{1}{25}$, e $1+r=\frac{26}{25}$.

Eseguito il calcolo si trova $a-Ar=312,2988$. Cercando dunque nelle tavole i logaritmi di questi numeri si ha

$$m = \frac{2,6989700 - 2,495703}{1,4149733 - 1,3979400} = 12.$$

La Tavola inserita in quest'articolo serve pure a risolvere le questioni di questo genere con molta facilità. Infatti, dividendo 4692,53 per 500, si trova il numero 9,38506 che è la somma corrispondente ad una lira d'annualità, restando le stesse tutte le altre condizioni del problema. Cercando dunque nella colonna 4 per 100 il numero che più si avvicina a 9,38506, si trova 9,385074 che può considerarsi essergli assolutamente eguale: il numero 12 posto di fronte nella colonna degli anni è dunque il numero di anni cercato, nei quali dovrà pagarsi l'annualità di 500 lire.

Il secondo caso che ci rimane da esaminare è uno dei più complicati della scienza dei numeri, poichè conduce ad una equazione di un grado infinito, e di cui l'incognita non può esprimersi che per mezzo di una serie parimente infinita. I calcoli sono allora tanto più faticosi quanto meno la serie è convergente.

Riprendiamo la formula (a), e diamole la forma

$$\frac{A}{a} = \frac{1}{r} \left[1 - (1+r)^{-m} \right].$$

Sviluppiamo il binomio $(1+r)^{-m}$ (*Fedi BINOMIO*), e facciamo

$$\frac{1}{am(m+1)} = q;$$

AVREMO

$$q = r - \frac{(m+2)}{3} r^2 + \frac{(m+2)(m+3)}{3 \cdot 4} r^3 - \frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{3 \cdot 4 \cdot 5} r^4 + \text{ec.}$$

Finalmente, prendendo da questa serie il valore isolato di r (Vedi RITORNO DELLA SERIE), otterremo

$$r = q + \frac{(m+2)}{3} q^2 + \frac{(m+2)(5m+7)}{36} q^3 + \frac{(m+2)(17m^2+44m+29)}{270} q^4 + \text{ec.} \dots (b)$$

Il più delle volte questa serie è poco convergente; e, per ottenere un'approssimazione sufficiente, è necessario calcolare dieci o dodici termini, il che diviene lungo e laborioso per la somma complicità dei coefficienti che succedono a quello del quarto. Allora è più semplice calcolare i soli primi quattro termini, e servirsi quindi della regola di *falsa posizione*; poichè per mezzo di questa regola è facile spingere l'approssimazione fino a quel punto che può desiderarsi. Vedi FALSA POSIZIONE.

Per dare un'applicazione della formula (b), ci serviremo degli stessi dati dell'esempio precedente; vale a dire supporremo che, avendo stabilito di rimborsare 469a lire e 53 centesimi con 12 annualità di 500 lire, non si sappia a qual frutto venga impiegato il danaro e si tratti di determinarlo.

Avremo allora

$$q = \frac{2[am - A]}{am(m+1)} = \frac{2[500 \times 12 - 469a,53]}{500 \times 12 \times 13} = \frac{130747}{3900000}$$

Facendo $m=12$ nei coefficienti di (b), si trova

$$r = \frac{130747}{3900000} + \frac{14}{3} \left(\frac{130747}{3900000} \right)^2 + \frac{469}{18} \left(\frac{130747}{3900000} \right)^3 + \frac{21035}{135} \left(\frac{130747}{3900000} \right)^4 + \text{ec.}$$

Eseguito i calcoli accennati si ottiene

Primo termine $= 0,033524 \dots \dots$

• Somma dei primi due termini $= 0,038769 \dots \dots$

Somma dei primi tre termini $= 0,039751 \dots \dots$

Somma dei primi quattro termini $= 0,039946 \dots \dots$

ec. ec.

Esaminando la legge con cui procedono queste quantità è facile accorgersi che esse vanno continuamente avvicinandosi a 0,04, che è infatti il vero valore di r .

Se noi trasformiamo la serie (b) in frazione continua (Vedi FRAZIONE CONTINUA), troveremo l'espressione

$$r = \frac{q}{1 - \frac{\frac{m+2}{3} q}{1 - \frac{\frac{m-1}{12} q}{1 - \text{ec.}}}}$$

I primi termini di questa frazione sono semplicissimi, e basta prenderne tre per ottenere un grado di approssimazione molto superiore a quello che si ha dalla

Dis. di Mat. Vol. I.

31

somma dei quattro primi termini della serie (b). Per fare uso di questa formula, vi porremo

$$m=12, \quad q=\frac{130747}{3900000},$$

e per conseguenza avremo

$$\frac{m+2}{3}=\frac{14}{3}, \quad \frac{m-1}{12}=\frac{11}{12}.$$

Effettuando quindi le operazioni, troveremo

Per la prima frazione integrante 0,033524

Per le prime due 0,039742

Per le prime tre 0,039998

ec. ec.

L'ultimo valore non differisce dal vero, $\frac{4}{100}$, che di due *millionesimi*.

La Tavola delle annualità può ancora servire ad abbreviare tutti questi calcoli, quando essi si riferiscono a questioni comprese fra i suoi limiti; poichè, dopo aver diviso 4692 lir. 53 cent. per 500 onde ottenere la somma corrispondente ad una lira d'annualità, basta cercare, nella fila orizzontale di cifre posta avanti 12 anni, il numero che più di ogni altro si avvicina al quoziente trovato. Un tal numero essendo nel nostro caso 9,385074 della colonna 4 per 100,

noi vediamo a colpo d'occhio che il frutto cercato è $\frac{4}{100}$. Se il quoziente non

si trovasse esattamente, ciò indicherebbe che il frutto sarebbe compreso tra quelli delle due colonne i di cui numeri fossero immediatamente al di sotto e al di sopra di questo quoziente. Prendendo allora la differenza di questi numeri, come pure la differenza del minore e del quoziente, si potrebbe, per mezzo di una regola del tre, calcolare la differenza del frutto minore dal frutto cercato, poichè infatti si ha con molta approssimazione la proporzione: *La differenza dei numeri sta alla differenza tra il minore e il quoziente, come la differenza dei frutti sta alla differenza tra il frutto minore e il frutto cercato*. Limitandosi ai *milliesimi*, il che basta nel maggior numero dei casi, tutte le cifre saranno esatte.

Il Lettore che bramasse di avere tavole di annualità più estese di quella che abbiamo inserita nel presente articolo potrà ritrovarle in Smart, *Tables of interest*, Londra 1726 in-4; Bailly, *Doctrine of interest and annuities*, Londra 1808 in-8; Nobili, *de Vitalis*, Firenze 1837 in-8; Davies, *Tables of life contingencies*, Londra 1821 in-8; e Morgan, *On the principles of assurance, annuities*, ec., Londra 1821 in-8.

Dalla formula (a) risultano molte altre particolarità di cui sarà fatta menzione agli articoli ASSICURAZIONE, FRUTTO, e INTERESSE.

ANNUO (*Astron.*). Si chiama *annuo* intitolò che è relativo all'anno, o che ritorna ogni anno. Così dicesi moto *annuo* della terra quel moto in forza del quale essa gira intorno al sole, perchè appunto impiega un anno a compiere questo giro. Per la stessa ragione si dice *Equazione annua*, *Parallasse annua*, ec. Vedi EQUAZIONE, PARALLASSE, TERRA, ARGOMENTO, EPATTA, ec.

ANNULARE (*Astron.*). Vedi ANULARE.

ANOMALIA (*Astron.*) (Da α privativa, e da $\rho\alpha\lambda\lambda\omicron\varsigma$, regolare). Distanza angolare di

un pianeta dal suo afelio, o dal vertice dell'asse maggiore della sua orbita. Si è dato il nome di *anomalìa* a questa distanza, perchè essa determina infatti l'ineguaglianza del moto del pianeta, e serve a calcolarla nei diversi punti della sua orbita. Essa è misurata dall'angolo formato al fuoco dell'ellisse dal raggio vettore, e dalla linea degli apsid, partendosi dall'apogeo per la luna e pel sole, e partendosi dall'afelio per gli altri pianeti. Si distinguono tre specie di *anomalie*: *media*, *eccentrica*, e *vera*.

L'*ANOMALIA media* era, nell'astronomia degli antichi, la distanza del pianeta dal punto dell'apogeo, supposta percorsa con moto uniforme. Questa distanza era in tal modo proporzionale al tempo del moto; vale a dire che, per un pianeta che descrivesse in sei mesi la metà della sua orbita, o che percorresse in sei mesi i 180 gradi di questa mezza orbita, andando dall'apogeo al perigeo, l'*anomalìa* sarebbe di 30 gradi alla fine del primo mese, di 60 gradi alla fine del secondo mese, di 90 gradi alla fine del terzo, ec.

Ma, in realtà, un pianeta descrivendo intorno al sole un'ellisse della quale il sole stesso occupa uno dei fuochi, e non essendo gli archi ellittici proporzionali ai tempi nei quali sono percorsi, l'astronomia moderna dà il nome di *anomalìa media* al tempo solo del moto. Così, due ore dopo il passaggio di un pianeta al suo afelio, l'*anomalìa* è di 20r; tre ore dopo, essa è di 30r, e così successivamente.

Sia S (Tav. XXIII, fig. 5) il fuoco dell'orbita occupato dal sole, AMDP la metà dell'orbita, A l'afelio, P il perielio, ed M il luogo del pianeta, l'*anomalìa media* sarà il tempo che il pianeta avrà impiegato ad arrivare da A in M.

Ora, per le leggi di Keplero, l'area ellittica ASM è proporzionale al tempo nel quale è stata percorsa la distanza da A ad M (*Vedi AREE PROPORZIONALI AL TEMPO*). Anco quest'area può dunque rappresentare l'*anomalìa media*. Di più, se s'immagina un semicircolo AKP descritto sull'asse AP, e se pel luogo M del pianeta si conduce una perpendicolare MR all'asse, questa perpendicolare determinerà un punto N, dal quale conducendo una linea NS si formerà uno spazio mistilineo ANS, sempre proporzionale al settore ellittico AMS per una proprietà conosciuta dell'ellisse (*Vedi ELLISSE*). Mediante questo spazio, l'*anomalìa media* potrà essere espressa in gradi del circolo; il che è essenziale per poterla introdurre nei calcoli astronomici, che non si eseguiscano che per mezzo di gradi circolari.

Infatti, se dal punto S si abbassa la perpendicolare ST sul raggio NC prolungato, e se si prende quindi l'arco NX eguale a ST, l'arco di circolo ANX sarà l'*anomalìa media*; poichè il settore circolare CXN è eguale al triangolo rettilineo CNS, essendo la superficie del primo $\frac{1}{2} \times NX \times NC$, e quella del secondo $\frac{1}{2} \times ST \times NC$. Dunque lo spazio mistilineo ANS è eguale al settore circolare AXC; e questo settore, e per conseguenza il suo arco ANX, possono servire a misurare il settore ellittico AMS, o l'*anomalìa media*, poichè vi sarà sempre lo stesso rapporto tra il numero di gradi dell'arco ANX e 360°, che tra il settore ellittico AMS e la superficie intera dell'ellisse. Possiamo dunque considerare l'arco ANX come lo spazio che percorrerebbe uniformemente il pianeta sulla circonferenza ANP, nel tempo che realmente esso descrive l'arco ellittico AM sulla sua orbita.

L'*ANOMALIA eccentrica* è l'arco AN del circolo, intercetto tra l'afelio e il vertice N della perpendicolare NR. Essa serve a trovare l'*anomalìa vera*.

L'*ANOMALIA vera* è l'angolo ASM formato al fuoco dell'ellisse dal raggio vettore SM, e dall'asse AP.

Il problema di calcolare l'*anomalìa vera* per mezzo dell'*anomalìa media*, ossia di determinare l'angolo ASM per mezzo del settore ellittico formato da

quest'angolo, è uno de' più importanti dell'astronomia, poichè somministra il mezzo di determinare il luogo vero di un pianeta in un tempo dato. È conosciuto nella scienza col nome di PROBLEMA DI KEPLERO. Fu infatti questo sommo astronomo che lo propose, e che ne diede una soluzione approssimativa nella sua bell'opera: *Astronomia nova, seu physica coelestis tradita commentariis de motibus stellarum Martis*, Praga, 1609 in fol. Wallis e Newton l'hanno risoluto col mezzo della cicloide allungata, ma le loro soluzioni sono inuttili in pratica. Lo stesso problema è stato trattato in diverse maniere da parecchi matematici, come La Hire nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1710, Keill nelle *Trattazioni filosofiche* dell'anno 1713, Cassini nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi dell'anno 1719, Herman nel primo volume delle *Memorie* dell'Accademia di Pietroburgo, Machin nelle *Trattazioni filosofiche* dell'anno 1737, Simpson ne' suoi *Saggi matematici*, Londra 1740 in-4, Lalande nel suo *Traité d'Astronomie*, Parigi 1792, 3 vol in-4, e Cagnoli nella sua *Trigonometria piana e sferica*, Bologna 1804 in-4. Ma tutte le loro soluzioni non sono fondate che sopra metodi più o meno indiretti. Bossut, in una Memoria che nel 1766 riportò il premio dell'Accademia di Parigi, e Klogel, nell'*Astronomisches Jahrbuch* (annuario astronomico) di Berlino per l'anno 1789, hanno trattato direttamente il problema di Keplero, di cui possediamo ancora una soluzione completa data da Lagrange nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Berlino per l'anno 1769, come un'applicazione della sua bella formula dello sviluppo in serie di una funzione qualunque $F(x)$ di una variabile x contenuta in una equazione $(x-a) + x\varphi(x) = 0$, in cui $\varphi(x)$ è pure una funzione qualunque di x . Vedi SVILUPPO.

Indichiamo con a il semiasse maggiore AC dell'ellisse, con e l'eccentricità CS, con u l'anomalia vera o l'angolo ASM, con x l'anomalia eccentrica o l'arco AN, e con s l'anomalia media o l'arco ANX.

Dalla Trigonometria si ha nei triangoli rettangoli MRS, NCR (Vedi TRIGONOMETRIA)

$$\tan \frac{1}{2} u = \frac{RM}{SR+SM},$$

$$\tan \frac{1}{2} x = \frac{RN}{CR+a}.$$

Da queste due eguaglianze se ne ottiene una terza

$$\frac{\tan \frac{1}{2} u}{\tan \frac{1}{2} x} = \frac{RM}{RN} \cdot \frac{CR+a}{SR+SM} \dots\dots (m).$$

Ma per le proprietà dell'ellisse si ha

$$\frac{RM}{RN} = \frac{CD}{a}, \quad SR+SM = PR \frac{a+e}{a},$$

e di più

$$PR = CR+a,$$

dunque sostituendo questi valori nell'equazione (m) essa diviene

$$\frac{\tan \frac{1}{2} u}{\tan \frac{1}{2} x} = \frac{CD}{a} \cdot \frac{(CR+a)a}{(CR+a)(a+e)} = \frac{CD}{a+e}.$$

Ora, CD, essendo il semiasse minore dell'ellisse, è eguale a $\sqrt{a^2 - c^2}$; dunque si ha in fine

$$\tan \frac{1}{2} u = \tan \frac{1}{2} x \sqrt{\left(\frac{a-c}{a+c}\right)} \dots \dots (u).$$

Questa formula, che è dovuta a Lacaille, fa conoscere l'anomalia vera per mezzo dell'anomalia eccentrica. Per ottenere quest'ultima, riprendiamo l'eguaglianza $\text{superf. ACX} = \text{superf. ASN}$, o piuttosto

$$\text{superf. ACX} = \text{superf. ACN} + \text{superf. CNS};$$

vale a dire

$$\frac{1}{2} ax = \frac{1}{2} ax + \frac{1}{2} e \times NR^2.$$

Ma essendo NR il seno dell'angolo ACN, ossia dell'arco AN, quest'ultima eguaglianza si riduce, moltiplicandola per 2, a

$$ax = ax + e \sin x;$$

equazione trascendente, dalla quale non si può ottenere il valore di x che per approssimazione o per una serie infinita.

È questa espressione, trovata da Keplero, che gli aveva fatto credere che il problema fosse insolubile, e che non si potesse giungere ad ottenere dei valori approssimati di x che per via di replicati tentativi. Il mezzo diretto di ottenere x è quello di sostituire in questa equazione, in luogo di $\sin x$, la serie che dà il valore del seno per l'arco; poichè allora si ha

$$x = x + \frac{e}{a} \left[x - \frac{1}{1.2.3} x^3 - \frac{1}{1.2.3.4.5} x^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7} x^7 + \text{ec} \right],$$

dalla quale si può dedurre il valore di x , dato per z , mediante il metodo del Ritorno delle serie.

Conosciuta l'anomalia eccentrica, la formula (n) dà senza difficoltà l'anomalia vera.

ANOMALISTICO (Astron.). Per rivoluzione *anomalistica* di un pianeta s'intende il tempo che il pianeta impiega a percorrere la sua orbita, partendosi da un punto qualunque della medesima fino al suo ritorno allo stesso punto. Questa rivoluzione non differirebbe dalla rivoluzione siderale, cioè dal ritorno ad una stessa stella, se le orbite dei pianeti stessero ferme; ma l'afelio, o l'asse maggiore dell'orbita, avendo un moto suo proprio, secondo l'ordine dei segni, o come dicono gli astronomi in *consequenzia*, il pianeta deve impiegare, per tornare al suo afelio, che nel corso della rivoluzione si è avanzato verso l'oriente, un tempo maggiore che per tornare alla stessa stella. Un tal moto dell'afelio essendo per la terra di $61''$,9 per anno, l'anno *anomalistico* è più lungo dell'anno siderale di $4'$ $47''$,33, e più lungo dell'anno tropico di $25'$ $7''$,2. Vedi AVALIO, ANNO e PARASSORA.

ANSA DI PANIERA (Archit.). Curva che è formata dalla riunione di più archi di circolo, e che perciò diceasi ancora *arco a più centri*: alcuni la chiamano pure *arco a manico di panier*. In architettura viene adoprata in luogo dell'ellisse per formare la centina delle volte.

Il numero degli archi che compongono tale curva è sempre impari, e tanto maggiore quanto la volta deve essere più schiacciata. Quello che si dirà per le *anse di panier* a tre e cinque archi, ovvero, come ordinariamente si chiamano, a tre e cinque *centri*, potrà applicarsi facilmente a tutti gli altri casi. Del resto quella di tre centri è più frequentemente usata delle altre.

Sia la retta AB (Tav. XXIII, fig. 6), sopra la quale si tratti di descrivere un'ansa di panier, e sia DC l'altezza della volta, ossia il suo rigoglio o montata. Supponiamo che la curva sia descritta; vale a dire che dai centri K ed M, e coi raggi eguali AK e BM, sianzi descritti gli archi AF e BH, e che dal centro E siasi egualmente descritto il terzo arco FDH. Affinchè la curva sia regolare, e gli archi non si taglino fra loro ma si tocchino semplicemente nei punti di unione F ed H, è necessario che conducendo da questi punti le rette FK ed HM, queste rette prolungate vadano ad incontrarsi al centro E. È pure necessario che i centri K ed M si trovino sul diametro AR, affinchè la curva cada perpendicolarmente su questo diametro, come accade dell'ellisse; ed è egualmente indispensabile che il centro E cada sul prolungamento dell'altezza CD, onde la curva sia perpendicolare alla stessa altezza CD, a somiglianza dell'ellisse che taglia perpendicolarmente il suo asse minore.

Si chiami n la semibase AC, h la saetta o montata DC, x il raggio KF o HM, ed y il raggio DE.

Avremo $CK = n - x$, $CE = y - h$, $EK = EF - KF = y - x$; e di più $EF = EH$, e $KF = KA = MH = MB$, per la natura della curva.

Il triangolo rettangolo KCE dà (Vedi TRIANGOLO RETTANGOLO)

$$(y-x)^2 = (n-x)^2 + (y-h)^2;$$

egualianza dalla quale si ricava, sviluppando le potenze e mandando tutto a zero,

$$n^2 + h^2 + 2xy - 2nx - 2hy = 0 \dots (m)$$

Tale è l'equazione di condizione fra le quantità date ed i raggi x ed y .

Ora, perchè la curvatura degli archi sia il meno possibile ineguale, ossia perchè l'ansa di panier abbia la forma la più ellittica, è necessario che la differenza $y-x$ dei raggi stia nel minore rapporto possibile con ciascheduno di questi raggi. I rapporti

$$\frac{y-x}{x}, \quad \frac{y-x}{y}$$

devono dunque essere due minimi.

Differenziando questi rapporti (Vedi MINIMO), si otterrà tanto dall'uno quanto dall'altro.

$$x dy - y dx = 0.$$

Dall'equazione (m) si ricava

$$y = \frac{2nx - n^2 - h^2}{2(x-h)}, \quad \text{e} \quad dy = \frac{dx(n-h)^2}{2(x-h)^2}.$$

Sostituendo questi valori nell'equazione $x dy - y dx = 0$, essa diviene

$$-2nx^2 dx - dx(h-2x)(h^2+n^2) = 0.$$

Dividendo per dx , sviluppando, e risolvendo l'equazione rapporto ad x , si ottiene

$$x = \frac{n^2 + h^2 - (n-h)\sqrt{n^2 + h^2}}{2n}.$$

Finalmente, sostituendo questo valore di x nell'equazione (m), e risolvendo rapporto ad y , si trova

$$y = \frac{n^2 + h^2 \pm (n-h)\sqrt{n^2 + h^2}}{2h}.$$

Il doppio segno $\pm$ c'indica che questi valori possono costruirsi in due maniere; ma noi prenderemo soltanto i segni inferiori, poichè nel caso nostro y deve essere maggiore di x .

Costruzione. Per i punti A e D si conduca la retta AD, e si prenda CX=CD; si porti AX da D in T, e sopra la metà Z di AT si elevi la perpendicolare ZK, prolungata fintantochè incontri la retta DC parimente prolungata. I punti K ed E, ove questa perpendicolare incontrerà la base AB, e il prolungamento della saetta DC, saranno i centri cercati. Non rimane che a prendere BM eguale ad AK per avere il terzo centro.

Infatti abbiamo per costruzione

$$AD = \sqrt{n^2 + h^2},$$

$$AT = AD - AX = \sqrt{n^2 + h^2} - (n-h),$$

$$AZ = \frac{\sqrt{n^2 + h^2} - (n-h)}{2}.$$

Ma i triangoli simili ACD e AZK danno

$$AC : AD :: AZ : AK;$$

dunque

$$AK = \frac{n^2 + h^2 - (n-h)\sqrt{n^2 + h^2}}{2n}.$$

I triangoli simili ACD ed ECK danno egualmente

$$CD : AC :: CK : CE;$$

donde si ricava

$$CE = \frac{AC \times CK}{CD} = \frac{n(n-AK)}{h}.$$

E sostituendo in questa espressione il valore di AK si ha

$$CE = \frac{n^2 - h^2 + (n-h)\sqrt{n^2 + h^2}}{2h},$$

e finalmente

$$ED = \frac{n^2 + h^2 + (n-h)\sqrt{n^2 + h^2}}{2h},$$

poichè $ED = DC + CE = h + CE$.

Se si volessero determinare per mezzo del calcolo i raggi AK, ED, come pure gli angoli AKF, FEH, basterebbe sostituire semplicemente nelle espressioni di questi raggi il valore numerico di n e di h , e quindi servirsi delle formule trigonometriche le quali danno gli angoli di un triangolo per mezzo dei lati.

Consideriamo adesso l'ansa di paniere a cinque centri.

Sia AB la base (Tav. XXIII, fig. 7), DC l'altezza, $AS = TB$ il raggio degli archi eguali AF ed IB , $FK = IL$ il raggio degli archi eguali FG ed IH , e finalmente DO il raggio dell'arco medio GDH . La figura della Tavola mostra sufficientemente le posizioni rispettive che questi raggi devono avere fra loro acciocchè la curvatura sia uniforme; crediamo perciò inutile di entrare in una più minuta descrizione.

È facile il vedere che se fossero date soltanto la base e l'altezza, il problema potrebbe ammettere un'infinità di soluzioni; ma ordinariamente, nella pratica, si suppone conosciuto il raggio AS degli archi estremi, e si fa inoltre l'angolo ASF di 60° , e gli angoli FKG e GOD ciascuno di 15° . Conduciamo la perpendicolare KN , e facciamo

$$AC = a, \quad CD = h, \quad AS = n, \quad KF = x, \quad \text{e} \quad OD = y;$$

avremo

$$KS = x - n, \quad KN = KS \sin 60^\circ = (x - n) \sin 60^\circ,$$

$$SN = KS \cos 60^\circ = (x - n) \cos 60^\circ,$$

$$CN = KZ = a - n - (x - n) \cos 60^\circ,$$

$$OZ = OC - CZ = OC - KN = y - h - (x - n) \sin 60^\circ,$$

e finalmente

$$OK = OG - KG = y - x.$$

Ciò posto, il triangolo rettangolo OZK dà

$$\overline{OK}^2 = \overline{OZ}^2 + \overline{KZ}^2,$$

ossia

$$(y - x)^2 = (y - h - (x - n) \sin 60^\circ)^2 + (a - n - (x - n) \cos 60^\circ)^2,$$

e sostituendo in luogo di $\sin 60^\circ$ il suo valore $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, e invece di $\cos 60^\circ$ il suo valore $\frac{1}{2}$, si ottiene infine

$$(y - x)^2 = (a - n - \frac{1}{2}(x - n))^2 + (y - h - \frac{1}{2}(x - n)\sqrt{3})^2 \dots (p).$$

Tale è l'equazione di condizione fra le quantità date a , h , n , e i due raggi x ed y . Se si volessero determinare questi raggi per mezzo della condizione che la curvatura sia la più uniforme possibile, bisognerebbe prendere come abbiamo

fatto di sopra il rapporto $\frac{y-x}{x}$ per un *minimó*; il che darebbe l'equazione

$xdy - ydx = 0$, nella quale s' introdurrebbero i valori di y e di dy , tratti dall'equazione (p); e si continuerebbe seguendo lo stesso metodo che abbiamo tenuto nel caso dei tre centri.

La somma di tutti gli archi i quali formano un'ansa di panier de veuve deve sempre essere eguale ad una semicirconfenza, ossia a 180° .

Desiderandosi maggiori notizie su questa curva posticcia, si ricorra all'articolo *Anse de panier* del *Dizionario di Matematiche* di Bossut, Lalande, ec., che forma parte dell'Enciclopedia metodica.

ANSE (*Astron.*). È questo il nome dato da Galileo alle parti sensibilmente eminenti dell'anello di Saturno, che si scovono allorchando quest'anello comincia ad aprirsi, cioè quando la sua parte anteriore e la sua parte posteriore cominciano a distinguersi; infatti esse hanno allora la forma di due anse o manichi attaccati a questo pianeta. *Vedi* ANELLO DI SATURNO.

ANTARES (*Astron.*). (Dal greco Αντάρης). Nome di una stella di prima grandezza, situata nella costellazione dello Scorpione, e segnata nei cataloghi colla lettera α .
ANTARTICO (*Astron.*). Si dà questo nome all' estremità meridionale dell'asse della terra, uno dei due poli intorno ai quali ha luogo il moto di rotazione di questo pianeta. La parola *antartico* deriva dalla voce latina *antarcticus* formata dalle parole greche *άντι*, contro, opposto, e *άρκτος*, Orsa, che significa: *opposto all' Orsa maggiore*.

Si chiama circolo *antartico*, o circolo *polare antartico*, uno dei circoli minori della sfera che è parallelo all'equatore e distante dal polo meridionale di $23^{\circ} 28'$. Si dà a questo circolo l'epiteto di *antartico* in opposizione ad un altro circolo simile, che è situato alla stessa distanza dal polo settentrionale, e che s'indica col nome di circolo *polare artico*. Vedi *ARTICO*, *ORSA* e *POLO*.

La parte della superficie del globo terrestre, compresa tra il polo *antartico* e il circolo *polare antartico*, chiamasi *zona frigida meridionale*.

ANTECANE (*Astron.*). Vedi *PROCIOMA*.

ANTECEDENTE (*Alg.*). Si dà questo nome al primo dei due termini che compongono un rapporto, in opposizione al secondo termine che dicesi *conseguente*. Così, nel rapporto $M : N$, M è l'*antecedente*, ed N è il *conseguente*.

In una proporzione si possono trasportare gli antecedenti nel luogo dei conseguenti, e viceversa i conseguenti nel luogo degli antecedenti, senza alterare la verità della proporzione. Così, se si ha la proporzione

$$A : B :: C : D,$$

se ne può dedurre l'altra

$$B : A :: D : C.$$

Questo modo di trasmutare i termini di una proporzione è conosciuto nella scienza colla parola tecnica *invertendo*, ed è autorizzato dal principio fondamentale della proporzione geometrica, che cioè è *necessario* ed è *sufficiente* che il prodotto dei termini medj sia eguale a quello degli estremi, affinchè sussista una proporzione geometrica. Infatti, è evidente che nel citato modo d'invertire i termini di una proporzione il prodotto dei medj rimane eguale a quello degli estremi, se una tale eguaglianza ha luogo nella primitiva proporzione. Vedi *PROPORZIONE*.

ANTECEDENTIA, o **PRAECEDENTIA** (*Astron.*). Quando un pianeta sembra che si muova dall'oriente verso l'occidente contro l'ordine dei segni, come dalla Vergine nel Leone, in astronomia si dice che esso si muove *in antecedentia* o *in praecedentia*. Al contrario si dice che si muove *in consequentia* quando segue l'ordine dei segni, e va da occidente in oriente, come dal Sagittario al Capricorno. Vedi *PIANETA*, *SEGNO*, ec.

**** ANTECI** (*Astron. e Geogr.*). Con tal nome s'indicano gli abitanti di due luoghi che hanno una medesima latitudine e una medesima longitudine, colla differenza però che in uno la latitudine è settentrionale e nell'altro è meridionale. Per esempio, Malta e il Capo di Buona Speranza sono presso a poco *anteci*. Tali popoli godono delle seguenti proprietà: 1° hanno una medesima elevazione di polo, ma il polo è differente; 2° sono egualmente distanti dall'equatore, ma da parti opposte; 3° il mezzodì e la mezzanotte è per essi all'ora medesima; 4° la lunghezza dei giorni e delle notti è per essi la stessa, ma in opposte stagioni; cosicchè questi contano il mezzodì del più lungo giorno d'estate, quando quelli hanno il mezzodì del più corto giorno d'inverno, ed è perciò che la notte degli uni è sempre eguale al giorno degli altri; 5° le loro stagioni sono contrarie in modo che per gli uni è inverno quando gli altri hanno l'estate, ma tutti segnano il mezzodì e la mez-

zanotte nel tempo stesso; 6° le stelle che non si alzano mai per gli uni non tramontano mai per gli altri.

ANTELMY. Vedi ANTHELMY.

ANTEMIO, nato a Tralle nella Lidia durante il secolo VI, si rese celebre sotto il regno di Giustiniano, per la superiorità colla quale applicò le matematiche all'architettura, alla meccanica, e all'ottica. Fu amico d'Eutocio, il dotto commentatore d'Archimede e d'Apollonio di Perga, e fece sommo onore alla scuola platonica di Proclo, di cui era discepolo. Si sa che questa scuola, stabilita in Atene verso la metà del secolo V, ereditò per un lungo periodo di anni tutta la gloria che nelle scienze matematiche si era precedentemente acquistata la scuola d'Alessandria (Vedi ALESSANDRIA). Pare ancora che Antemio non ignorasse i segreti della fisica e della chimica, poichè, secondo quello che narrano gli storici, egli era giunto ad imitare gli effetti del tuono, de' lampi, e perfino dei terremoti. Anzi in questo proposito potrebbe forse supporre ch'egli avesse trovata una composizione simile alla polvere. Il retore Zenone, ai racconta, gli aveva dato motivo di doglianza; Antemio, per vendicarsene, spiegò presso la casa di Zenone il terribile apparato dell'arte sua. Il retore sentì inopinatamente scuotersi la sua casa dalle fondamenta, vide scintillare la folgore, e credendo scatenato il cielo contro di sè fuggì spaventato.

La fama che Antemio si era acquistata fino dalla sua gioventù lo fece scegliere dall'imperatore Giustiniano per dirigere, di concerto con Isidoro di Mileto, la costruzione della basilica di Santa Sofia, capo d'opera dell'arte, e la più bella che il cristianesimo abbia eretto in Oriente. Fabbricata da Costanzo, restaurata da Teodosio il giovane, decorata da tutti gl'imperatori, era stata ridotta in cenere nella sedizione accaduta, nel 532, sotto il regno di Giustiniano, che formò tosto il progetto di rifabbricarla, e di farne il più bello edificio dell'universo. Antemio fondò quell'immenso tempio nella piazza più grande di Costantinopoli, chiamata l'*Augusteon*, ne fece il disegno che è ammirato anco ai giorni nostri, ma non giunse a vedere che la costruzione delle fondamenta: egli morì verso l'anno 534, e lasciò ad Isidoro la gloria di terminare quel monumento. A tale grande architetto si attribuisce con ragione l'invenzione delle cupole, ornamento che con altrettanto ardire e maestà corona i monumenti di questo genere.

Disgraziatamente non conosciamo i lavori di Antemio nella meccanica e nell'ottica, che per alcuni frammenti della sua opera: *πρὶ παραδόξων μηχανισμάτων*, *de Machinis paradoxis* ec, di cui Dupuy, segretario perpetuo dell'Accademia delle Iscrizioni, ha pubblicato la traduzione. In questo scritto, la di cui analisi ci condurrebbe troppo oltre, Antemio risolve molti problemi ingegnosi di ottica, e fra gli altri quello di eseguire ciò che si racconta di Archimede, che per mezzo di specchi riuscì ad abbruciare i vascelli romani. Vedi le *Memorie* dell'Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere, anno 1777, Tom. XLII.

ANTHELMY (PIETRO ТОИМАСО) nacque il 14 Settembre 1730 a Trigance in Provenza. Terminati gli studj di filosofia, in età di 15 anni, tutto si diede alle matematiche. Si recò a Parigi dove strinse amicizia coi più celebri geometri di quel tempo, e ben presto venne fatto professore di matematiche nella scuola militare, e poi ispettore degli studj. Gli venne affidato nello stesso tempo l'osservatorio ivi allora costruito, e le osservazioni che vi fece gli somministrarono il soggetto a diverse memorie che l'Accademia delle Scienze pubblicò nella sua raccolta. Composto aveva un *Trattato di Dinamica* che non venne stampato. Tradusse pure dall'italiano sotto la direzione di Bossut l'opera d'Agnesi (Vedi AGNESI). Anthelmy è morto il 7 Gennaio 1783.

ANTICTONI (*Astron. e Geogr.*). (Da *ἀντι* contro, e *χθών* terra). Popoli che abitano negli emisferi opposti della terra, ma ad eguali latitudini: così di due

popoli *antictoni* l'uno ha l'estate mentre l'altro ha l'inverno. Questo nome fu dato qualche volta anco agli antipodi, ma erroneamente; poichè gli antipodi, oltre ad abitare in emisferi opposti e ad eguali latitudini, hanno di più una differenza di longitudine di 180° . Per conseguenza due popoli *antictoni* possono non essere antipodi, mentre due popoli antipodi sono necessariamente *antictoni*.

•• **ANTILOGARITMICO** (*Alg.*). È stata chiamata *Tavola antilogaritmica* una tavola numerica che serve a trovare speditamente un numero di 10 cifre, essendo dato il suo logaritmo con 20 decimali. Il lettore potrà esaminare questa tavola e le istruzioni sull'uso della medesima nelle *Spiegazioni preliminari* aggiunte dai PP. Cannonai e Del Riccio alla terza edizione fiorentina delle *Tavole logaritmiche* di Gardiner, 1810 in-8.

ANTILOGARITMO (*Alg.*). Nome dato da diversi autori al complemento aritmetico del logaritmo di un seno, di una tangente, o di una secante, vale a dire alla differenza fra questo logaritmo e quello del raggio. Così, il logaritmo di $\sin 60^\circ$ essendo 9,9375306, la sua differenza 0,0624694 da 10,0000000, logaritmo del raggio, sarà l'*antilogaritmo* di $\sin 60^\circ$.

Gli Inglesi chiamano col nome di *antilogaritmo* il numero corrispondente ad un dato logaritmo. Così, essendo 4,6330744 il logaritmo del numero 42961, essi dicono che 42961 è l'*antilogaritmo* di 4,6330744.

ANTINOO (*Astron.*). Costellazione boreale che ordinariamente si unisce coll'Aquila, della quale non è che uno smembramento. Tolomeo non ne fa una costellazione, ma dice semplicemente che tra le stelle prossime all'Aquila vi è Antinoo. Evelio è il primo che l'abbia aggiunta al catalogo lasciatici da quell'antico astronomo. Dai diversi autori viene rammentata coi seguenti nomi: *Puer adrianaeus*, *Puer bithynicus*, *Novus Aegypti deus*, *Puer troicus*, *Puer phrygius*, *Puer Aquilae*, *Jovis cinaedus* o *catamitus*, *Pincerna*, *Pocillator*, *Ganymedes*. Secondo l'opinione più comune, il nome di Antinoo è stato dato dagli astronomi al gruppo di stelle, che ora sotto tal nome sono conosciute, per eternare la memoria del favorito dell'imperatore Adriano. Fu questi un giovine di Bitinia di rara bellezza, per cui l'imperatore avea concepito una torpe passione, e che secondo alcuni si annegò nel Nilo, e secondo altri s'immolò onde prolungare la vita d'Adriano. Quest'imperatore pianse amaramente la sua perdita, e nell'eccesso del suo dolore proruppe nelle stravaganze più inescusabili. Non contento di avergli fatto celebrare magnifici funerali, di aver fatto battere delle medaglie in suo onore, e di aver fabbricato una città in Egitto col nome di Antinoia, che poi fu chiamata Adrianopoli, volle innalzarlo agli onori divini, erigendogli dei templi, e istituendo un culto onde fosse adorato qual Dio. Sul culto di Antinoo si può vedere Pansania, Dione, Sparziano, Atanasio, Eusebio, Atenagora, Tertolliano, il *Dizionario Storico* di Bayle, e la *Storia dell'Astronomia* di Bailly. Altri pretendono che l'Antinoo celeste sia uno degli amanti di Penelope, rammentato da Properzio nei seguenti versi:

Penelopen quoque, neglecto rumore mariti,

Nubere lascivo cogeret Antinoo.

Lib. IV, Eleg. 5.

Finalmente altri hanno creduto che l'Antinoo celeste sia lo stesso che Ganimede, figlio di Trojo re di Troja, amato da Giove: è più probabile però che questa favola si riferisca all'Aquario. Comunque sia di tali opinioni, le stelle α , θ , ι , κ , λ della costellazione dell'Aquila sono rappresentate nelle nostre carte del cielo, come situate sulla figura di Antinoo, e indicano la posizione che occupa questa costellazione, quando essa si ammetta per tale.

ANTIPARALLELE (*Geom.*). Siano due linee rette, che noi chiameremo A e B, condotte comunque in un piano; e siano C e D due altre rette qualunque che

taglino le prime due. Se l'angolo della linea C colla linea A o colla linea B è eguale all'angolo della linea D colla linea B o colla linea A, le rette C e D si chiamano *antiparallele*. Esse saranno parallele se l'angolo della linea C con A o B sarà eguale all'angolo della linea D con A o B.

ANTIPODI (*Astron. e Geogr.*). Da *ἀντί*, *contro*, e da *πούς*, *podēs*, *pie*. Punti diametralmente opposti del globo terrestre. Questa espressione non si applica volgarmente che a quelli che abitano i paesi posti in questa situazione; ma la scienza ha dovuto determinarne il significato in un modo più preciso, e nel senso della definizione che abbiamo dato. I paesi che si trovano sopra paralleli all'equatore, egualmente distanti da questo circolo, gli uni dalla parte di mezzogiorno e gli altri dalla parte di settentrione, che hanno il medesimo meridiano, e che sono sotto questo meridiano ad una distanza gli uni dagli altri di 180°, cioè della metà di questo meridiano, sono *antipodi*, e i loro abitanti camminando rivolti in un senso contrario hanno effettivamente i loro piedi diametralmente opposti. Potrebbe dirsi che gli antipodi sono i Perieci degli Anteci (*Vedi* PERIECI e ANTICI). Gli antipodi soffrono presso a poco gli stessi gradi di calore e di freddo, ed hanno i giorni e le notti egualmente lunghe; ma subiscono queste variazioni di temperatura e di durata dei giorni in tempi opposti. Così, quando è mezzogiorno per uno degli antipodi, è mezzanotte per l'altro; quando i giorni sono giunti alla massima lunghezza per l'uno, sono per l'altro alla massima brevità della loro durata; quando in fine è estate per l'uno, è inverno per l'altro. Gli antipodi hanno una medesima latitudine, ma per l'uno è settentrionale e per l'altro è meridionale; quegli ha il polo artico elevato sul suo orizzonte, questi vede invece elevato ad una stessa altezza il polo antartico. La loro longitudine differisce sempre di 180°. Se gli antipodi sono sull'equatore divengono Perieci ed hanno tutte le particolarità proprie di questi ultimi (*Vedi* PERIECI).

Abbiamo detto che gli antipodi soffrono presso a poco, e non esattamente lo stesso grado di freddo e di caldo. Infatti vi sono molte circostanze che possono modificare l'azione del calore solare, e che fanno sì che i popoli situati in uno stesso clima non godano di una stessa temperatura. Queste circostanze sono in generale la posizione delle montagne, la vicinanza o la lontananza del mare, i venti, ec. Di più, il sole non è in tutto il corso dell'anno ad una stessa distanza dalla terra: ne è sensibilmente più lontano nel mese di Giugno che nel mese di Gennaio, donde risulta che, a parità di circostanze, la nostra estate in Europa deve esser meno calda di quella de' nostri antipodi, e il nostro inverno meno freddo. Così nei mari dell'emisfero meridionale si trova il ghiaccio ad una distanza dall'equatore molto minore che nell'emisfero settentrionale.

Si crede che Platone abbia il primo immaginato la possibilità degli antipodi, e che anzi sia stato l'inventore di questo nome. Siccome un tal filosofo riguardava la terra come sferica, è probabile che ne concludesse l'esistenza degli antipodi. La maggior parte degli antichi filosofi però trattò questa opinione con sommo disprezzo, non avendo potuto giammai concepire che gli uomini e gli animali potessero sussistere sospesi in aria coi piedi in alto e la testa in basso, come appunto ci compariscono gli antipodi rapporto al nostro emisfero. Ponevano anzi in ridicolo quelli che ammettevano la possibilità degli antipodi. Così si esprime Lattanzio nel cap. 24, lib. III delle sue *Instituzioni*: *Quid illi, qui esse contrarios vestigiis nostris Antipodas putant, num aliquid loquuntur? aut est quisquam tam ineptus, qui credat esse homines, quorum vestigia sint superiora quam capita, aut ibi, quae apud nos jacent, inversa pendere? fruges et arbores deorsum versus crescere? pluvias, et nives, et grandinem, sursum versus cadere in terram? Et miratur aliquis, hortos pensiles inter septem mira narrari, cum philosophi et agros, et maria, et urbes, et montes pensiles faciant?*

Tali filosofi non riflettevano che le parole *in alto*, e *in basso* sono termini puramente relativi, che significano soltanto *più vicino* e *più lontano* al centro della terra, centro comune al quale tendono tutti i corpi pesanti; e che perciò i nostri antipodi non hanno la testa in basso e i piedi in alto, ma bensì al pari di noi i piedi più vicini al centro della terra, e la testa più lontana da questo stesso centro. Avere la testa in basso e i piedi in alto vuol dire avere il corpo situato in modo, che la direzione del peso si faccia dai piedi verso la testa: e questo è ciò che non ha luogo per gli antipodi; poichè sono essi spinti come noi verso il centro della terra in una direzione che va dalla testa ai piedi.

Le dispute sulla esistenza degli antipodi si moltiplicarono a dismisura, e forse tuttora durerebbero se la scoperta dell'America fatta da Cristoforo Colombo non le avesse con una dimostrazione di fatto tolte di mezzo.

Potrebbe ora domandarsi se quando è mezzogiorno di Giovedì a Firenze debba dirsi che agli antipodi di Firenze sia mezzanotte di Giovedì o mezzanotte di Venerdì: ma sopra di ciò non vi è regola, e può dirsi egualmente bene nell'una e nell'altra maniera. Se due viaggiatori partissero da Firenze per gli antipodi, ed uno di essi prendesse la via di oriente passando per l'Asia, mentre l'altro s'incamminasse verso occidente attraversando l'America, qualunque fosse il tempo che essi impiegassero nel viaggio, non si troverebbero mai d'accordo nel nominare il giorno del loro incontro. Infatti, se essi s'incontrano, per esempio, nel momento in cui a Firenze comincia il giorno di un Venerdì, vale a dire alla mezzanotte dal Giovedì al Venerdì, nel qual caso sarà mezzogiorno agli antipodi, il viaggiatore che è partito da oriente chiamerà quel giorno Venerdì, e l'altro lo chiamerà Giovedì. Eccone la ragione: il viaggiatore che si dirige verso oriente va incontro al sole che si alza, perciò giunge ad avere quest'astro al meridiano, cioè ad avere mezzogiorno, più presto che se fosse stato stazionario; per conseguenza il giorno è per lui un poco più corto, o, il che è lo stesso, il medesimo spazio assoluto di tempo diviene per lui una porzione maggiore dell'intervallo fra un mezzodì ed un altro mezzodì, e così, guadagnando ogni giorno una piccola frazione di tempo, al suo arrivo agli antipodi conta una medesima ora dodici ore prima che a Firenze. Il viaggiatore occidentale, al contrario, volgendo le spalle al sole che si alza, e da esso allontanandosi, ha quest'astro al meridiano più tardi che se non si fosse mosso, ed arriva agli antipodi dopo aver perduto dodici ore, contando cioè la medesima ora dodici ore più tardi che a Firenze. Ora è evidente che il tempo guadagnato dal primo viaggiatore e quello perduto dal secondo forma precisamente un giorno di differenza nel loro computo.

Il lettore che vorrà esaminare una tal questione comprenderà facilmente che, restando fermo il principio del giorno o a mezzanotte o a mezzogiorno, è impossibile che in tutta la terra si abbia un medesimo computo di giorni. Noi vediamo infatti che il computo adottato in un luogo dipende dalla direzione dalla quale sono venuti i primi viaggiatori che vi approdarono, e chiunque in seguito vi è giunto da una direzione opposta ha trovato la differenza di un giorno nel calcolo del tempo. Così, quando Dampier giunse a Mindanao venendo da oriente si trovò indietro di un giorno agli Europei che vi trovò, e i di cui antenati vi erano venuti dalla parte d'occidente. E Varenio, che viaggiava nel 1670, racconta che i Portoghesi a Macao contavano sempre un giorno di più degli Spagnoli delle Filippine. La ragione era che i Portoghesi erano venuti dal Capo di Buona Speranza e dall'Indie, e gli Spagnoli dai loro possedimenti in America.

•• ANTISCI (*Astron. e Geogr.*). Questo nome si usa per indicare quei popoli le di cui ombre a mezzogiorno hanno direzioni contrarie. Esso è applicabile in tutto il corso dell'anno a quelli che abitano fuori dei tropici e in emisferi opposti. Può applicarsi per un certo tempo dell'anno ancora a quelli che abitano la zona

torrida, e ciò accade per tutto il tempo in cui la declinazione del sole è maggiore della latitudine di un popolo e minore di quella di un altro popolo, avvertendo di considerar negativa, e per conseguenza minore, la declinazione o la latitudine diretta verso un polo, se si è considerata positiva quella diretta verso l'altro polo. La parola *Antisci* è composta delle voci greche *ἀντι* *contra*, e *σκια* *umbra*.

ANTITESI (*Alg.*). Alcuni autori chiamano *antitesi* quella operazione algebrica, mediante la quale si trasporta da un membro nell'altro di una equazione un termine di questa stessa equazione; il che si eseguisce cancellando questo termine nel membro in cui si trova, e ponendolo nell'altro membro con un segno contrario a quello che prima aveva. Così, nell'equazione $x + b = a$ si ha per antitesi $x = a - b$; e nell'altra equazione $m - n = c$ si ha $m = c + n$.

ANTONI (ALESSANDRO VITTORIO PAPACINO D'), direttore della scuola reale d'artiglieria del re di Sardegna, nacque il 20 Maggio 1714, a Villafranca, nella contea di Nizza. Entrato in età di diciotto anni nell'artiglieria, si dedicò con ardore allo studio delle matematiche, e alle loro applicazioni all'artiglieria e all'architettura militare. Furono tali i suoi progressi in questo genere, che nel 1755 venne fatto direttore della scuola d'artiglieria di Torino fondata nel 1739, e in tal qualità compilò un corso di matematiche, d'artiglieria e d'architettura militare. Dei varj trattati che compongono questo corso comparvero col suo nome quelli soltanto dei quali era egli solo l'autore; essendo stato nella composizione degli altri aiutato da altri uffiziali suoi colleghi. Le sue *Istituzioni fisico-meccaniche*, Torino 1773-74, 2 vol. in-8, che fanno parte di tal corso, vennero tradotte in francese da Mont-Rozard, e stampate a Strasburgo nel 1777, 2 vol. in-8. Tali istituzioni furono pure tradotte in tedesco da Tempelhoff, e servirono per l'insegnamento nelle scuole d'artiglieria di Prussia. Ma quello di tali trattati che fece più onore a d'Antoni fu l'*Esame della polvere*, Torino 1765 in-8, opera ripiena di esperienze originali sulla forza e sugli effetti della polvere. Questo libro venne tradotto in francese da Flavigny, Parigi 1773 in-8, in inglese da Kellert, e in tedesco, si crede da Tempelhoff, e meritò al suo autore la più brillante reputazione presso gli stranieri. L'*Uso delle armi da fuoco*, Torino 1780 in-8, tradotto pure in francese da Saint-Auban, ed in inglese da Kellert, n'è come un supplemento.

Le numerose esperienze che serviron di base alle ultime due opere furono fatte per ordine del governo, e sotto la direzione de' colonnelli d'artiglieria, ed in particolare di de' Vincenti. In esse non possono abbastanza ammirarsi i metodi ingegnosi di cui si fece uso, e il rigore, la precisione, e l'esattezza con cui vennero eseguite, onde sui loro risultati potere fondare giudizj positivi e senza eccezione. Sembra però che d'Antoni non conoscesse altre opere sulla balistica che quella di Robins, *New principles of gunnery*, Londra 1742 in-8. Egli non lo cita, ma lo confuta più volte indirettamente, rettificandone i risultati erronei. Del resto, sebbene la balistica abbia fatto grandi progressi da quel tempo, i principj di d'Antoni hanno sofferto poche alterazioni, e le sue opere meritano d'esser lette e consultate anco ai giorni nostri. Non si troverebbe nemmeno quasi che mutare nella parte della chimica, benchè l'autore non conoscesse tale scienza, e la teoria dei gas non fosse stata ancora stabilita; le ultime esperienze di Rumford confermano in particolare quanto aveva detto d'Antoni circa alla parte che hanno i vapori nella forza della polvere. Ricolmo di onori, e dei contrassegni più lusinghieri della benevolenza e della stima del re di Sardegna, d'Antoni morì il 7 Dicembre 1786, compianto da tutti gli artiglieri di cui era il maestro ed il padre.

Le altre opere di d'Antoni sono: I *Il maneggiamento delle macchine d'artiglieria*, Torino, 1782 in-8; II *Dell'artiglieria pratica, Libro primo*, Torino 1774 in-8; *Libro secondo*, ivi, 1775 in-8. Quest'opera fu tradotta in francese da

Mont-Rozard, Parigi 1780 in-8; **III Dell'architettura militare**, *Libro primo*, Torino 1778, in-8; *Libro secondo*, ivi, 1779 in-8; *Libro terzo*, ivi, 1759 in-8; *Libro quarto*, ivi, 1780 in-8; *Libro quinto*, ivi, 1781, in-8; *Libro sesto*, ivi, 1782 in-8. Il libro terzo di quest'opera è stato tradotto in francese da Flavigny col seguente titolo: *Principes fondamentaux de la construction des places, avec des réflexions*, ec., Parigi 1775 in-8. In quanto alle opere inedite lasciate da d'Antoni potrà consultarsi la sua vita scritta da Prospero Balbo nel 1791, e inserita nel 1805 nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Torino, di cui d'Antoni era membro. In questa vita il lettore non solamente troverà un minuto ragguaglio di tutte le opere di Papacino d'Antoni, ma ancora un elenco di tutti gli autori che hanno scritto sulle proprietà della polvere.

ANULARE (*Astron.*). **ECLIPSE ANULARE**. Si è data questa denominazione ad un'eclisse del sole che ha luogo quando il disco di quest'astro e quello della luna si trovano concentrici, e il diametro apparente della luna è minore di quello del sole. In tal circostanza rimane eclissata soltanto il centro di quest'astro, e il suo orlo sporgendo intorno al circolo oscuro occupato dalla luna forma per alcuni minuti un sottile anello luminoso. Questo fenomeno non si riproduce che a lunghi intervalli. Per alcuni luoghi d'Europa furono *anulari* gli eclissi del 25 Luglio 1748, del 1 Aprile 1764, e del 7 Settembre 1820, come lo sarà pure quello del 9 Ottobre 1847. Sugli eclissi anulari si vedano le *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi degli anni 1767 e 1777. Si consulti pure l'articolo **ECLIPSE** di questo Dizionario.

APE (*Astron.*). Costellazione meridionale, chiamata ancora *mosca indiana*; in latino *musca* o *apis*: non è visibile in Europa. È situata sotto i piedi del Centauro, tra il Camaleonte e la Croce. Di tutte le stelle che la compongono le tre più notabili non sono che di quarta grandezza. La principale di esse è seguita nei cataloghi colla lettera *α*.

APERTURA (*Optica*). Così si chiama la superficie più o meno grande che le lenti dei cannocchiali e dei telescopj presentano ai raggi della luce. Quanto maggiore è l'*apertura* dell'obbiettivo di un cannocchiale, tanto maggiore è la chiarezza dell'istrumento; e quanto è più grande l'*apertura* dell'oculare, tanto maggiore è il campo dell'istrumento. Vedi **CANOCCHIALE**.

APHELLAN (*Astron.*). Vedi **ARILLAN**.

APIANO, o **APIANUS** (**PISTRO**), astronomo e professore di matematiche a Ingolstadt, nacque nel 1495 a Lipsia. Il suo nome tedesco era *Bienewitz*, che egli cambiò in *Apianus*, latinizzando la parola *Biene* che significa *ape*, *apis*. Compose un gran numero di opere, che gli procurarono una gran celebrità fra i suoi contemporanei, e gli fruttarono i favori dell'imperatore Carlo V, che lo fece cavaliere dell'ordine germanico, e gli diede il titolo di conte ed una rilevante somma di danaro. Ma di tutti i suoi scritti, di cui la maggior parte partecipa dei pregiudizj del tempo in cui furono composti, l'*Astronomicum Caesareum*, Ingolstadt 1540 in-fol. contiene solo una parte che interessa vivamente la scienza astronomica. Apiano vi ha registrato le osservazioni da lui fatte sulle comete degli anni 1531, 1532, 1533, 1538, e 1539. Quella che ha per oggetto la cometa del 1531 è soprattutto di una grande importanza, poichè ha servito a calcolare il ritorno periodico delle comete, ed ha così ampliata la sfera delle cognizioni astronomiche. Il celebre Halley avendo determinato gli elementi parabolici della cometa che comparve nel 1682, poté concludere, dalla gran somiglianza degli elementi ottenuti con quelli trovati da Keplero per la cometa del 1607, che queste due comete non ne formavano che una sola. Egli assegnava in tal modo a quest'astro una rivoluzione di 74 a 76 anni, avendo riguardo alle perturbazioni che l'attrazione dei pianeti poteva cagionare alla sua orbita. L'osservazione fatta da

Apiano nel 1531, e che risaliva a 76 anni avanti l'apparizione del 1607, giustificò le congetture di Halley, nè gli permise di dubitare della periodicità della cometa, della quale si arrischiò a predire il ritorno per la fine del 1758, o pel principio del 1759. Clairaut, dell'Accademia delle Scienze di Parigi, risolvette il difficile problema proposto da Halley, determinando con esattezza il valore delle perturbazioni che la cometa doveva provare, avuto riguardo al ritardoamento che l'attrazione dei pianeti avrebbe arrecato al suo moto. Egli annunziò che il passaggio al perielio avrebbe avuto luogo verso la metà di Aprile 1759; ma avvertì tuttavia che le frazioni di tempo trascurate nei suoi calcoli, fatti in fretta, avrebbero potuto elevarsi a più o meno di 30 giorni nei 76 anni. La cometa passò effettivamente al perielio il 12 Marzo 1759.

È certo oggi che la cometa, osservata da Apiano ad Ingolstadt nel 1531, è quella stessa che era comparsa precedentemente nel 1456, e che comparve quindi nel 1607, 1682, e 1759. La poca esattezza delle osservazioni anteriori al secolo XV non ci permette di rintracciare più lungi nel passato la cronologia dei suoi ritorni periodici; ma la scienza moderna è giunta almeno a determinarne il cammino nei tempi futuri. Damoiseau, impiegato nel *Bureau des longitudes*, stabilimento che rende tanti servigi alla scienza astronomica, calcolò l'epoca del ritorno della famosa cometa del 1759, e ne fissò il passaggio al perielio per il 4 Novembre 1835, Pontécoulant lo fissò al 7 Novembre, Lubbock lo annunziò per il 30 Ottobre. La cometa passò effettivamente al perielio il 15 Novembre 1835.

L'*Astronomicum* di Apiano aveva per oggetto di sostituire gli strumenti alle tavole astronomiche per trovare in qualunque tempo la posizione degli astri e tutte le circostanze degli eclissi. L'idea non era felice, e sebbene vi si scuopra una certa perspicacia i metodi dell'autore non furono adottati. Nella seconda parte di tale opera si trova la descrizione di un istrumento per risolvere senza calcolo qualunque triangolo sferico; vi si trova pure l'osservazione curiosa che le code delle comete sono sempre rivolte all'opposto del sole, e diretto in una linea che è il prolungamento della retta condotta dal centro del sole a quello della cometa. Nel privilegio di questo libro, privilegio che ha la data del 1532 e la durata di 30 anni, si legge la lista delle opere che Apiano si proponeva di pubblicare, come Effemeridi dal 1534 al 1570, libri di aritmetica e d'algebra, almanacchi con predizioni, le opere di Tolomeo in greco e con una traduzione latina, quelle di Azoph, antico astrologo, libri sugli eclissi, carte geografiche e diversi strumenti. Non vi si trova rammentata né l'opera intitolata: *Inscriptiones S. S. vetustatis, non illae quidem romanae, sed totius vere orbis*, Ingolstadt, 1534, che gli viene attribuita, e che si dice eccellente per il tempo in cui fu composta, né quella che porta per titolo: *Tubulae directionum projectionumque, totam rationem primi motus continentes*, Wittemberg, 1606 in-4.

Apiano è pure celebre per le sue osservazioni sugli eclissi e per la sua opera: *Cosmographia cum observationibus multarum eclipsium*, Ingolstadt, 1530, in-4, che è stata per lungo tempo consultata. Apiano fu uno dei primi a proporre l'osservazione dei moti della luna per la determinazione delle longitudini, ed espose il suo metodo nella sua *Cosmographia*. Morì ad Ingolstadt nel 1552 in età di 57 anni. Per una lista delle sue opere, adesso poco interessanti, si veda Lalande, *Bibliographie astronomique*, Parigi, Anno XI (1803); Vossio, *De scientiis mathematicis*; Montucla, *Histoire des Mathématiques*, Parigi 1799, 4 vol. in-4, Vol I, pag. 623; Hutton, *Mathematical Dictionary*, Londra 1796, 2 vol. in-4, all'articolo *Apian*; ma più particolarmente Kaestner, *Geschichte der Mathematik* (Storia delle matematiche), Gottinga 1796-1799, 4 vol. in-8, Vol II, pag. 548; e Teissier, *Éloges des hommes savans*, Leida, 1715.

APIANUS (FILIPPO), figlio del precedente, si dedicò egli pure allo studio del-

l'astronomia, e successe a suo padre nella cattedra di matematiche. Pubblicò varie opere, e particolarmente: I *De Cylindri utilitate*; II *De usu trientis instrumenti astronomici novi*, ec., ma nessuna degna di osservazione. Morì nel 1589 professore a Tubinga, dove era stato costretto a rifugiarsi, per avere abbracciato la religione riformata. Ticone Brabé ci ha conservato ne'suoi *Progymnasmi* la lettera che egli scrisse da Tubinga al Landgravio di Hattia-Cassel, sulla nuova stella comparsa improvvisamente in Cassiopea nel 1572. Per altre notizie si consulti l'opera di Teissier citata nell'articolo precedente.

- ** **APICE** (*Alg.*). Per evitare la confusione che nascer potrebbe dall'uso di molte lettere in un problema algebrico, ed anco per ragione di analogia, è uso d'indicare le diverse quantità di una stessa specie, ossia le quantità simili che entrano in una questione, con la medesima lettera, distinguendo tali quantità l'una dall'altra per mezzo di accenti o di apici. Si deve dunque intendere che la stessa lettera con due differenti apici esprime quantità tanto differenti fra loro di valore, quanto quelle rappresentate da due differenti lettere. L'uso di tali apici si comprenderà anco meglio dal seguente esempio. Se a uomini possono fare b cose in c giorni, ed e uomini possono fare f cose in g giorni, noi abbiamo l'equazione

$$afc = ebg.$$

Ora, invece di servirci delle lettere $e, f, e g$, nella seconda parte della questione, serviamoci di quelle stesse lettere che esprimono le quantità corrispondenti o simili nella prima parte, applicandovi gli apici; vale a dire siano a' uomini che facciano b' cose in c' giorni. L'equazione diviene allora

$$ab'c = a'bc'.$$

In questa nuova forma l'equazione pone in evidenza le quantità simili, per distinguer le quali sarebbe stato necessario nella prima equazione di ricorrere al quesito stesso. In molte ricerche l'uso giudizioso degli accenti dà una simmetria ai metodi e alle espressioni, che difficilmente in altro modo potrebbe ottenersi; l'uso giudizioso, poichè il servirsi male a proposito degli apici può, al pari della mancanza assoluta di questi segni, togliere alle espressioni della più bella simmetria tutta la loro eleganza.

Un altro esempio renderà più chiaro l'uso degli apici anco al lettore non esperto nei calcoli algebrici. Supponiamo una libreria composta di quattro ordini di scanie, ed ogni ordine diviso in sei compartimenti. Se noi indiciamo i sei compartimenti dell'ordine più basso colle lettere A, B, C, D, E ed F, dovremo indicare il compartimento che nel secondo ordine rimane sopra A colla lettera G, e così successivamente: ma è molto più semplice, e più facile a ritenersi a memoria, il chiamare questo compartimento A', quello che gli rimane sopra nel terzo ordine A'', e così in seguito. In tal modo ciascuna lettera indicherà una certa linea verticale di compartimenti, mentre l'accento designerà in qual fila orizzontale si trova il compartimento accennato dalla lettera. Questo è appunto l'uso matematico dell'apice. Tutte le quantità della stessa specie, o che il problema pone in posizioni simili, vengono indicate rapporto a questo problema con una medesima lettera.

Le lettere con gli apici a', a'', a''' ec. si leggono a prima, a seconda, a terza, ec. Quando gli apici sono troppi si sostituiscono loro i numeri romani; così invece di a'''' si pone a^{iv} . I numeri romani impediscono che si confonda l'apice coll'esponente.

- APO** (*Astron.*). È chiamata così una costellazione meridionale più comunemente conosciuta col nome di *Uccello di Paradiso*, *avis paradisea*, datole da Linneo. La parola apo, cioè *pedibus carens*, è stata talvolta corrottamente cambiata in *Dis. di Mat. Vol. I.*

apis; ma questo è il nome che appartiene all'altra costellazione detta *Ape* o *Mosca indiana*. Vedi *AVA*.

APOCATASTASI (*Astron.*). Rivoluzione intera dei punti equinoziali, la quale si effettua in circa 25860 anni. A questo periodo si è dato il nome di *apocatastasi*, che significa *grand'anno*. Vedi *PARACASSIORE*.

APOGEO (*Astron.*). Questa parola, che deriva da $\alpha\pi\sigma$, *lontano*, e da $\gamma\eta$, *terra*, indicava nell'astronomia antica il punto della massima distanza di un pianeta dalla terra. Non considerando che l'apparenza dei fenomeni, si dice anche adesso che il sole è al suo *apogeo*, quando la terra è al suo afelio. L'*apogeo* è opposto al *perigeo*, che è la più piccola distanza di un pianeta dalla terra. Vedi *ASTRO*.

APOGIOVE (*Astron.*). Nome dato da alcuni astronomi all'apside superiore delle orbite dei satelliti di Giove, ossia al punto della loro massima distanza da questo pianeta. Questo nome è formato dalla greca parola $\alpha\pi\sigma$, *lontano*, e dalla parola latina *Jovis*.

APOLLO (*Astron.*). Nome che alcuni astronomi hanno dato alla stella dei Gemelli chiamata *Castore*. Essa è la più bella delle due stelle principali di questa costellazione, ed è segnata nei cataloghi colla lettera α .

APOLLONIANO (*Geom.*). Sotto il nome di curve *apolloniane* s'indicano spesso l'iperbola e la parabola ordinarie, per distinguerle da alcune altre curve alle quali pure abbiamo dato il nome d'iperbole e di parabole. Per esempio, la curva la di cui equazione è $y^2 = Ax$ è la parabola *apolloniana*, e la curva la di cui equazione è $A^2 = xy$ si chiama iperbola *apolloniana*; mentre le curve espresse dalle equazioni $y^3 = A^2x$, e $A^3 = xy^2$ sono parabole ed iperbole del terzo grado (Vedi *PARABOLA* ed *IPERBOLA*). Il nome d'*apolloniano* viene dal celebre matematico Apollonio, al quale si deve un trattato sopra le sezioni coniche da apprezzarsi molto anche ai tempi nostri. Vedi *APOLLONIO*.

* **APOLLONIO**, dopo Archimede, il più profondo e il più originale dei greci geometri, fu uno di quegli uomini rari, che col loro genio arricchiscono le scienze, e le fanno progredire avanti il loro secolo. È esso uno dei quattro autori che dobbiamo riguardare come i padri della scienza delle matematiche, poichè negli scritti loro i moderni ne hanno attinta la cognizione. Tali autori sono, per ordine cronologico, Euclide, Archimede, Apollonio, e Diofanto. Si vedano questi nomi nel Dizionario, come pure quello di *Pappo*.

Apollonio nacque a Perga, in Panfilia, ai tempi di Tolomeo Evergete, re di Egitto, che cominciò a regnare l'anno 247 avanti l'era nostra: studiò lungamente in Alessandria sotto i successori di Euclide, e quivi acquistò quelle sublimi cognizioni e quella profondità in geometria che hanno reso illustre il suo nome. Era nel massimo splendore della sua fama sul finire del regno di Tolomeo Filopatore, che morì nell'anno 205 av. G. C. Apollonio ed Annibale furono prossimamente contemporanei tanto nella nascita, quanto nelle opere e nelle imprese che rispettivamente gli resero celebri. Archimede morì l'anno 212, e in quel tempo Apollonio viveva. A questi, e a pochi altri indizj, raccolti da Halley, e inseriti nella prefazione che pose in fronte alla sua edizione del *Trattato delle Sezioni coniche* di Apollonio, si riducono tutte le notizie che abbiamo sull'epoca in cui visse questo insigne geometra.

In quanto alle particolarità della vita di Apollonio sappiamo soltanto che ebbe un figlio dello stesso suo nome. Il suo carattere non è conosciuto che per lo svantaggioso quadro che ne fa Pappo (autore peraltro che viveva molto tempo dopo, nel quinto secolo dell'era nostra), il quale ce lo rappresenta come un uomo vano, geloso del merito altrui, e intento a coglier sempre l'occasione di avvilirlo. È possibile che una tal debolezza di animo abbia diminuito la stima che il genio di Apollonio aveva ispirato a' suoi contemporanei; ma è possibile ancora

che questa gelosia che gli si rimprovera abbia dettato i giudizi poco favorevoli che a suo riguardo hanno pronunziato i dotti d'Alessandria. Comunque sia però di tali difetti, la gloria d'Apollonio è reale, e i talenti superiori che gliela procurarono attireranno soli l'attenzione della posterità.

Non ci fermeremo nemmeno all'accusa di plagio che gli viene data da Eraclio, che scrisse una vita di Archimede, e che asserisce aver egli fraudolentemente ottenuto da quest'ultimo la comunicazione delle sue scoperte, ed averle quindi pubblicate come proprie. Eutocio, suo commentatore, il quale riporta tale accusa, vi risponde sufficientemente col dire che era a tutti noto che né Archimede né Apollonio pretendevano di essere stati i primi investigatori delle *Sezioni coniche*. Bayle, nel suo *Dizionario*, ritrova la miglior difesa di Apollonio nel silenzio di Pappo, che sebbene inclinato a non pensar molto favorevolmente de'suoi meriti, come abbiamo di sopra veduto, non ostante non parla di tale accusa. Noi diremo che è possibile che una eccessiva esaltazione delle proprie scoperte abbia eccitato in altri una specie di reazione di amor proprio, e gli abbia indotti a contestare i titoli più legittimi di lode.

Ma la prova più evidente della insussistenza di tali imputazioni si ha nella stima che d'Apollonio ebbe l'antichità, che gli diede il titolo di *gran geometra*, di *geometra per eccellenza*, nel tempo stesso in cui l'illustre Archimede terminava la sua brillante carriera. Essa sembrò dividersi egualmente fra questi due nomi prodigiosi, ma la posterità, senza cessare di ammirare i lavori di Apollonio, ha revocato questa sentenza, e collocato il nome del geometra siracitano alla testa di tutti quelli che la scienza circonda di una gloria immortale.

Apollonio fu uno degli scrittori più profondi e più fecondi che abbiano avuto nell'antichità le scienze matematiche, di cui le sue opere formarono per lungo tempo il trattato il più compiuto. Fra i suoi scritti, quello che più di tutti ha contribuito alla sua celebrità, e che dà la più alta idea del suo genio è il *Trattato delle Sezioni coniche*, sul quale crediamo interessante ed utile di arrestarci per riportare alcune particolarità bibliografiche, senza peraltro inoltrarci di troppo nella spiegazione scientifica del soggetto di questo libro, che si troverà esposto altrove. *Vedi Sezioni coniche*.

Non è Apollonio l'inventore di tutto ciò che contiene l'opera sua, poichè Aristeo il vecchio, che viveva 350 anni avanti l'era nostra, è quegli che viene riguardato siccome il primo che siasi applicato alle sezioni coniche; ma raccogliendo ciò che era stato fatto prima di lui da Aristeo, da Eudossio di Gnido, da Menecmo, da Euclide, da Conone, da Trasideo, da Nicotele, e come alcuni vogliono da Archimede, da Dositeo e da altri, Apollonio vi fece notabili giunte. Sembra che i primi che considerarono le sezioni coniche supponessero che il piano secante fosse perpendicolare al lato del cono, e per conseguenza facessero uso di tre cono distinti per ottenere l'ellisse, la parabola, e l'iperbola, che essi indicavano coi nomi di *sezione del cono acutangolo*, *sezione del cono rettangolo*, e *sezione del cono ottusiangolo* (*Vedi ACUTANGOLARE*). Sebbene Archimede si fosse accorto che tutte le sezioni di qualunque cono si riducono ad alcuna di queste tre sezioni, pure è certo che una tal cosa non si conosceva ai tempi d'Euclide. Perciò se veramente Apollonio estrasse dai libri d'Euclide, secondo quello che racconta Pappo, molte cose che riportò nella sua opera, dovette farvi cangiamenti sostanzialissimi, poichè generalizzò il modo di tagliare il cono, e ricavò tutte le sezioni coniche da un solo cono obliquo a base circolare.

Archimede aveva conosciuto il nome di *parabola*, poichè se n'è servito nel titolo stesso dell'opera nella quale si occupa della quadratura di questa curva: non è dunque esatto il credere con Eutocio che Apollonio abbia assegnato il primo alle curve coniche i nomi che adesso portano. Non ostante è nel suo libro

delle *Sezioni coniche* che per la prima volta si trova fatto uso dei nomi d'*ellisse* e d'*iperbola*; e una tale opera, qualunque sia l'origine dei nomi usati da Apollonio, è uno dei più preziosi scritti che ci abbia trasmesso l'antichità. Questo Trattato era diviso in otto libri. Per lungo tempo non abbiamo posseduto che i primi quattro, nei quali l'autore ha raccolto soltanto tutte le scoperte che avevano fatto in geometria quelli che lo avevano preceduto, estendendo però, sviluppando, e riducendo a forma più elegante le loro teorie. Il contenuto di questi primi quattro libri è così succintamente descritto da Apollonio, le di cui parole noi traduciamo liberamente: « I primi quattro libri sono elementari: il primo con-
 » tiene la generazione delle tre sezioni del cono, e delle sezioni che diconsi op-
 » poste, e le loro principali proprietà distintive, che da noi sono state trattate
 » con maggior pienezza e generalità di chiunque altro dei nostri predecessori. Il
 » secondo libro contiene le proprietà dei diametri, degli assi, e degli asintoti, ed
 » altri oggetti di generale utilità: il lettore vi noterà ciò che io intendo per
 » *diametri*, e ciò che intendo per *assi*. Il terzo libro contiene molti e maravi-
 » gliosi teoremi, utili nella composizione dei luoghi solidi, e che nella maggior
 » parte sono nuovi e bellissimi. Il quarto libro mostra come le sezioni di un cono,
 » o dei coni opposti, si tagliano fra loro e colla circonferenza di un circolo; su
 » tutte le quali cose nulla hanno lasciato quelli che ci hanno preceduto. »

Gli ultimi quattro libri delle sezioni coniche contengono le scoperte proprie di Apollonio, e attestano che dovè esser dotato di una forza prodigiosa di spirito per seguire, senza smarrirsi, ricerche che nella maggior parte richiedono una somma attitudine a servirsi dei metodi dell'analisi moderna. Due di questi libri sono di una speciale importanza, e sono il quinto e il settimo. Apollonio vi tratta le questioni più difficili della geometria, cioè quelle dei *massimi* e dei *minimi* nelle sezioni coniche. Nel quinto, l'autore esamina particolarmente quali sono le massime e le minime rette che da qualunque punto interno dato si possono condurre al loro perimetro. Vi espone tutto ciò che i metodi analitici moderni possono insegnare su tal soggetto, fino anco alla determinazione delle nostre *evolute*: infatti, egli fa chiaramente osservare che esiste una serie di punti nello spazio, al di là dell'asse di una sezione conica, donde non si può tirare alla parte opposta della curva che una sola linea retta che le sia perpendicolare. Apollonio va anche più oltre; determina quei punti che oggi si conoscono sotto il nome di *centri d'osculatione*. Tutte le questioni che appartengono a tali ricerche, e che qui ci contentiamo di accennare soltanto, sono presso a poco risolte in questo quinto libro. Il sesto non presenta che lo sviluppo delle stesse idee; tratta delle sezioni coniche simili; contiene il paragone delle curve coniche intere e parziali, il modo di tagliare un dato cono in guisa che ne risulti una sezione avente dimensioni assegnate, ec. Nel settimo si trova l'esposizione delle diverse proprietà più notabili di tali curve; come queste: che *nell'ellissi e nell'iperbole conjugate, i parallelogrammi formati dalle tangenti alle estremità dei diametri conjugati sono costantemente equivalenti*: — che *nell'iperbola la differenza dei quadrati di due diametri conjugati, e nell'ellisse la loro somma è sempre la stessa*. L'ottavo libro, che non conosciamo che per l'ingegnoso e stimabile lavoro di Halley, conteneva un gran numero di proposizioni simili, che servono di fondamento alla risoluzione dei problemi sui *massimi* e sui *minimi*; problemi di una certa difficoltà, come, per esempio, il seguente: *in una iperbola qualunque, determinare il diametro il di cui parametro è il minimo, oppure quello il di cui quadrato unito al quadrato del suo parametro faccia la minima somma*.

Il Trattato di Apollonio è stato l'oggetto di un gran numero di commentarii e di annotazioni. Pappo d'Alessandria, Ippazia, la dotta figlia di Teone, ed Eutocio d'Ascalona ne diedero successivamente la spiegazione, e schiarirono i passi

che sembravano oscuri ai loro contemporanei. Il solo commentario di Pappo è pervenuto fino a noi nella sua integrità. L'opera d'Apollonio fu una di quelle che il califfo Èt-Mâmonn fece tradurre in arabo, quando diede ricovero alle scienze abbandonate nel resto del mondo. Thabit-ben-Cora fu il geometra arabo che eseguì nel nono secolo una tal traduzione. Nel decimo secolo l'arabo Abalplat ne fece un'altra. Il geometra persiano Nassir-Eldin, nel 1250, ne fece una traduzione in persiano sopra un compendio arabo e l'arricchì di note.

Apollonio non è stato conosciuto nell'Occidente che verso la fine del XV secolo. La morte prematura di Regiomontano, che ne meditava un'edizione, lo privò della gloria di far conoscere questo gran geometra. Memmio, nobile veneziano, ne diede una traduzione latina imperfettissima, impressa a Venezia nel 1537. Commandino nel 1566 ne pubblicò una nuova, assai più esatta, e vi nal il *Commentario* di Eutocio, e i *Lemmi* di Pappo, che porgevano alcune indicazioni su quanto dovevano contenere i libri perduti; poichè queste traduzioni, e molte altre che noi passiamo sotto silenzio non comprendevano che i primi quattro libri d'Apollonio, i soli che siano a noi giunti nell'originale greco.

Fino alla metà del XVII secolo il resto dell'opera di Apollonio si credette perduto affatto, quando Giacomo Golio, celebre orientalista, professore di Leida, ritornò di Levante coi primi sette libri delle *Sezioni coniche* in arabo. Alla loro traduzione e pubblicazione s'interpose qualche dilazione, durante la quale, nel 1656, Borelli scoprì accidentalmente nella Biblioteca dei Medici a Firenze un manoscritto arabo degli stessi libri. Così mentre per tanti anni tutti i geometri avevano espresso il loro rincrescimento per la perdita degli ultimi quattro libri di Apollonio, tre di essi furono trovati dimenticati nella polvere in una delle più celebri Biblioteche d'Europa, in una città capitale, con un frontespizio latino: *Apollonii Pergaei conicorum libri octo*. Questo fatto serve non poco a far conoscere l'uso che si fa delle pubbliche librerie, e può aggiungersi ai tanti altri di simil genere rammentati dal dotto Prof. Guglielmo Libri nella sua *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, Parigi 1838, per cui giustamente deplora la negligenza e l'incuria colla quale generalmente si tengono i manoscritti che racchiudono i lavori e le scoperte più preziose dei nostri maggiori. Il Borelli ottenne il permesso di portare l'opera a Roma, dove coll'aiuto di Abramo Ecchellenese riuscì a tradurre in latino i libri 5°, 6°, e 7°, che tale versione conteneva di più dei greci esemplari fino allora pubblicati. Nel tempo medesimo il Viviani, geometra italiano, discepolo di Galileo, era occupato intorno ad una *divinazione* de' libri d'Apollonio; non volendo egli pertanto perdere il frutto delle sue ricerche, ricorse al Granduca di Toscana, onde far constare che egli ignorava l'esistenza del manoscritto arabo, ed ottenne che il Borelli nulla pubblicasse prima che egli stesso non avesse fatto comparire il suo lavoro. L'Opera del Viviani fu pubblicata a Firenze nel 1659 in-fol. col seguente titolo: *De maximis et minimis geometrica divinatio in quintum conicorum Apollonii Pergaei adhuc desideratum*. La traduzione di Abramo Ecchellenese comparve a Firenze nel 1661. Dal confronto delle due opere si vide che il geometra italiano non solamente non era rimasto al di sotto del geometra greco, ma lo aveva anzi in molti punti superato. Molto tempo prima, Maurolico aveva tentato la restituzione del quinto libro d'Apollonio, ma non era stato molto felice nella sua impresa. Dopo quest'epoca giunsero in Europa altre traduzioni arabe, le quali se non ci procurarono che i soli primi sette libri, servirono almeno a riempire le lagune de' libri precedenti e a correggere i passi difettosi. Ma quando verso il principio del secolo decorso cominciarono a publicarsi ad Oxford le magnifiche traduzioni dei geometri greci, che anche oggi sono le migliori che si posseggano, il dott. Aldrich avendo osservato che i *Lemmi* preliminari di Pappo

al settimo libro appartenevano ancora all'ottavo, e che dietro le espressioni dello stesso Apollonio nella sua introduzione, l'ottavo libro non era che una continuazione del precedente, propose ed Halley di ristabilirlo sulla scorte di tali indicazioni. Halley che era allora occupato a terminare l'edizione di Apollonio, che la morte di Gregory aveva lasciata interrotta, aderì a tal progetto, rifece il libro ottavo, e pubblicò l'intera opera ad Oxford nel 1710 unitamente al commentario di Futoceo, ai Lemmi di Pappo, e all'opera di Sereno sullo stesso argomento. Le cognizioni speciali di Halley nella geometria antica ci permettono di credere che non sia più da compiangersi la perdita dell'originale.

Le migliori edizioni delle *Sezioni coniche* di Apollonio sono le seguenti: I *Apollonii Pergaei conicorum libri quatuor, una cum Pappi alexandrini lemmatibus, et commentariis Eutocii ascalanitae; Sereni antissensis philosophi libri duo, nunc primum in lucem editi; quae omnia nuper Federicus Commandinus mendis quamplurimis expurgato e graeco convertit et commentariis illustravit*, Bologna 1566, in-fol; II *Apollonii Pergaei conicorum libri V, VI, VII, paraphraste Abalphato asphahonensi, nunc primum editi; additus in calce Archimedis assumptorum liber ex codicibus arabicis manuscriptis; Abrahamus Ecchellensis latinis reddidit; J. Alfonsus Borellus curam in geometricis versionibus contulit, et notas uberiores in universum opus adjecit*, Firenze 1661, in-fol. III *Apollonii Pergaei conicorum libri octo, et Sereni antissensis de sectione cylindri et conii libri duo*, Oxford 1710 in-fol. È questa l'edizione di Halley di sopra rammentate; IV *Archimedis opera; Apollonii Pergaei conicorum libri quatuor; Theodosii sphaerico, methodo nova illustrata, et succincte demonstrata*, Londra 1675 in-4. Quest'edizione fu data da Barrow.

Apollonio è pure autore d'altre opere, che secondo Pappo sono le seguenti: *De sectione rationis, De sectione spatii, De sectione determinata, De tactionibus, De inclinationibus, e De locis planis*; Proclo vi aggiunge due altre opere: *De cochlea*, e *De perturbatis rationibus*. Il P. Merenne, citato dal Vossio *De Scientiis mathematicis*, dice di aver letto in Aben Eddin, autore arabo, che tutte le opere di Apollonio, in molto maggior numero di quelle citate da Pappo, esistevano in arabo verso il principio dell'undecimo secolo. Queste notizie dovrebbero eccitare l'attenzione di tutti quelli che si occupano della letteratura orientale. I titoli della maggior parte delle opere sopra indicate non possono farne comprendere l'oggetto ai lettori che non sono iniziati nell'analisi geometrica degli antichi, la quale consisteva in un sistema di proposizioni *lemmatiche*, alle quali riducevano la dimostrazione de' teoremi e la soluzione dei problemi, e di cui per conseguenza importava di aumentare il numero e di variare i soggetti per la combinazione delle analogie che potevano offrire le linee e gli spazii. Noi cercheremo di dare in succinto un'idea di ciò che contenevano tali libri.

Il solo trattato *De sectione rationis* è giunto fino e noi in una traduzione arabica: Halley ne pubblicò nel 1706 ad Oxford una traduzione latina con una restaurazione del trattato *De sectione spatii*, fondata sulle indicazioni trasmesse da Pappo. Ecco il titolo di tale edizione: *Apollonii Pergaei de sectione rationis libri duo; occedunt ejusdem de sectione spatii libri duo restituti; proemittitur Pappi Alexandrini praefatio (graece edita) ad septimum collectionis mathematicae, cum lemmatibus ejusdem Pappi in hos Apollonii libros, opus et studio Edmundi Halley, Oxford, 1706 in-8*. Queste due opere si aggirano sul seguente problema: Essendo dati due punti A e B (Tav. XXIII, fig. 8) sulle rette indefinite MN, CD, note di posizione, condurre da un dato punto O una trasversale OPQ tale che si abbia

$$PA : QB :: a : b,$$

PIÙTTO

$$PA \times QB = c^2.$$

Il trattato della *Sezione della ragione* versa sul modo di sciogliere il problema adempiendo alla prima condizione; e secondo le diverse situazioni del punto O, e delle rette MN e CD, che possono essere parallele o convergenti, si trovano 77 casi. Il trattato della *Sezione dello spazio* tende a sciogliere il problema nella seconda condizione, e vi si contano 84 casi.

L'opuscolo *De sectione determinata*, distinto in 51 lemmi, 83 teoremi, e 9 problemi, riguarda i tre seguenti problemi:

1°. Avendosi due punti A e B sopra una data retta r , trovare sulla medesima un terzo punto P tale che si abbia a piacere alcuna delle tre seguenti proporzioni:

$$\overline{PA}^2 : \overline{PB}^2 :: a : b,$$

$$PA \cdot r : \overline{PB}^2 :: a : b,$$

$$\overline{PA}^2 : PB \cdot r :: a : b.$$

2°. Essendo dati tre punti A, B, C sopra una retta r , trovare sulla medesima un quarto punto P tale che si abbia alcuna delle proporzioni

$$\overline{PA}^2 : PB \cdot PC :: a : b,$$

$$\overline{PB}^2 : PA \cdot PC :: a : b,$$

$$PA \cdot PB : PC \cdot r :: a : b.$$

3°. Essendo dati quattro punti A, B, C, D sopra una retta, trovarne un quinto P che soddisfaccia ad alcuna delle proporzioni

$$PA \cdot PB : PC \cdot PD :: a : b,$$

$$PA \cdot PC : PB \cdot PD :: a : b.$$

Di questo libro fece una restituzione lo Snellio, che ei pubblicò a Leida, nel 1608, col titolo di *Apollonius Batavus*, e che tradotta in inglese da Lawson venne impressa a Londra nel 1772 unitamente ad una nuova restituzione dello stesso libro eseguita da Wales: ma questi lavori sono stati superati da quello che sullo stesso argomento ha fatto Roberto Simson, e che si trova nelle sue opere postume stampate a Glasgow nel 1776 in-4 per cura del conte di Stanhope col titolo: *Opera quaedam reliqua*. Anco Pietro Giannini ha fatto un pregevole ristabilimento della stessa opera, che si trova ne' suoi *Opuscula mathematica*, Parma 1773 in-4.

L'opuscolo *delle Inclinazioni* in due libri fu restituito da Horsley, e pubblicato col titolo: *Apollonii Pergaei Geometrical treatise on inclinations*, Oxford, 1770 in-4. In seguito Burrow ne fece un altro ristabilimento pubblicato a Londra nel 1780 in-8. L'argomento di tale opera è questo: Date di posizione due linee o rette o circolari, adattare fra esse una retta r , che sia eguale ad un'altra retta data r' , e che passi per un dato punto. Di questo stesso opuscolo aveva precedentemente fatta una restituzione Marino Ghetaldi, pubblicata col titolo: *Apollonius redivivus, seu Apollonii Pergaei inclinationum geometria*, Venezia 1607 in-4, alla quale Anderson fece un *Supplemento* impresso a Parigi nel 1612 (*Vedi Anderson*): ma Ghetaldi stesso compì la propria opera pubblicando un'aggiunta molto superiore a quella di Anderson col titolo: *Apollonii redivivi liber secundus*, Venezia 1613 in-4.

L'opera *De tactionibus* aveva per oggetto il contatto delle linee rette e dei cerchi. Era divisa in due libri che comprendevano 21 lemmi, 11 problemi, e 60 teoremi. Viète ha procurato di ristabilirla col suo *Apollonius Gallus*, Parigi 1600, cui Marino Ghetaldi fece molte aggiunte pubblicandole col titolo di *Apol-*

lonii Galli Supplementum, Venezia 1607. Giovanni Lawson ristabilì questa stessa opera, e la diede in luce col titolo: *Two books concerning tangencies*, Londra 1771 in-4, ed ivi (seconda edizione), 1773 in-4. Altri moderni hanno risoluto i problemi che poteva contenere, e gli hanno fatti generali estendendoli alle sfere. Coloro che più particolarmente volessero conoscere questa parte un poco curiosa della storia delle matematiche debbono consultare l'opera che ha pubblicato Camerer col titolo di *Apollonii Pergaei de tactionibus quae supersunt ac maxime lemmata Pappi in hos libros, cujus observationibus ec.*, Gotba 1795 in-8. Merita pure di esser letta su questo stesso argomento l'*Aritmetica universale* di Newton. Gli Italiani posseggono sui contatti bellissime soluzioni date dal Fermola, dal Flauti, e dal Sangro, negli atti della Reale Accademia delle Scienze di Napoli.

Il trattato *De locis planis* in due libri non è che una raccolta di proprietà del circolo e della linea retta, e corrisponde pressochè alla costruzione delle equazioni di primo e di secondo grado. È stato ristabilito da Roberto Simson e stampato a Glasgow nel 1749 in-4, col titolo: *Locorum planorum libri duo*. Molto tempo prima Francesco Schooten aveva fatto un ristabilimento della stessa opera, e questo lavoro forma il terzo libro delle sue *Exercitationes mathematicae*, Leida 1657 in-4. Di ambedue questi lavori Camerer fece una traduzione tedesca e la pubblicò a Lipsia nel 1796 in-8, corredandola di una copiosa raccolta di problemi geometrici. Si erede che ancora Fermat si sia occupato della restaurazione di questo trattato.

Apollonio si occupò ancora di ricerche aritmetiche, e compose un *Trattato sulla moltiplicazione dei grandi numeri*. Questo si rileva da Eutocio, che, nel suo commentario sulla quadratura del circolo d'Archimede, loda Apollonio di aver migliorato i seguiti aritmetici in un'opera che egli intitolò *ἀριθμοποιον*. Questa parola forse è corrotta: Vossio legge *ἀριθμοποιον*, ed Halley *ἀριθμοποιον*. Pappo, in un frammento pubblicato da Wallis, dice più esplicitamente che un tal miglioramento consiste nell'aver reso più semplice il metodo proposto da Archimede per rappresentare i numeri grandissimi. Si consulti l'*Histoire de l'Astronomie ancienne* di Delambre, Parigi 1817, 2 vol in-4, Vol. II, pag. 9. Eutocio dice ancora che Apollonio estese la quadratura del circolo data da Archimede.

Finalmente Apollonio coltivò l'astronomia. Gassendi, nella sua vita di Copernico, rammenta un'opinione da quest'ultimo attribuita al geometra greco, e che si dice ancora essere stata quella di Filolao, che cioè soltanto il sole e la luna si muovono intorno alla terra, ma che tutti gli altri pianeti girano intorno al sole. Questa ipotesi, finchè non si considerano che le sole apparenze, è sufficiente a spiegare tutti i fenomeni, e, dopo il sistema attualmente ricevuto, è quella che può convalidarsi con maggior fondamento delle altre. Non possiamo però trovare nessun'altra autorità per attribuire questa opinione ad Apollonio, eccetto Weidler, nella sua *Historia Astronomiae*, che non ostante cita Gassendi per sua sola autorità. È certo peraltro che Apollonio si occupò del sistema che allora era ricevuto, e che in seguito ha preso il nome di tolomaico, poichè Tolomeo nel suo *Almagesto* ci ha conservato alcuni teoremi da lui trovati, o almeno da lui dimostrati, onde trovare i punti di stazione e di retrogradazione dei pianeti mediante il loro supposto moto in epicicli.

APONECOMETRIA (*Geom.*). (Da *απο* lontano, *μετρος* lunghezza, e da *μετρον*, misura). Arte di misurare la distanza degli oggetti lontani. Vedi DISTANZA.

APOTEMA (*Geom.*). Perpendicolare abbassata dal centro di un poligono regolare sopra uno dei suoi lati. L'area di un tal poligono è eguale alla metà del prodotto del suo apotema per la somma di tutti i suoi lati. Vedi POLIGONO.

APOTOME (*Alg.*). (Da *αποτομος*, separato, tagliato). Differenza di due quantità

incommensurabili. Tale è $\sqrt{2}-1$, ossia la differenza fra il lato di un quadrato e la sua diagonale. Euclide, nel decimo libro de' suoi *Elementi*, tratta di queste quantità, e le suddivide in più ordini; ma la sua classificazione non è di alcuna utilità reale.

APPARATO DELLO SCULTORE (*Astron.*). Costellazione meridionale introdotta da La Caille nel suo *Calum australe stelliferum*, Parigi 1763 in-4. È situata sul culore degli equinozi immediatamente a levante della stella detta *Fomalhaut*, o α del Pesce Australe. Questa costellazione è circondata al nord dall'Aquario, all'est dal Fornello chimico, al sud dalla Fenice, e all'ovest dal Pesce Australe. La sua più bella stella non è che di quinta grandezza.

APPARECCHIO (*Mecc.*). Si dà generalmente questo nome in meccanica a qualunque sistema o combinazione di parti che concorrono a produrre un effetto.

APPARENTE (*Matem. e Astron.*). Si dà questo epiteto agli oggetti considerati quali ci appariscono, per distinguerli da ciò che sono realmente. Quando è necessario o utile di ridurre un fenomeno osservato, o liberandolo dagli effetti di un inganno ottico, o sostituendogli il fenomeno quale sarebbe stato osservato in una stazione più conveniente, il fenomeno che effettivamente è stato osservato si dice *apparente*, in opposizione a quello che risulta dalla correzione o riduzione, e che si dice *vero*.

Congiunzione APPARENTE dei pianeti. Si dice che vi ha *congiunzione apparente* di due pianeti, quando le loro longitudini vedute dalla superficie della terra sono le medesime; mentre la *congiunzione vera* è quella nella quale il centro della terra è in uno stesso piano perpendicolare al piano dell'eclittica coi centri dei due pianeti. *Vedi* CONGIUNZIONE.

Diametro APPARENTE. Si chiama diametro apparente di un oggetto, non la lunghezza di questo diametro, ma l'angolo che esso sottende all'occhio, e sotto il quale ci comparisce. Quest'angolo diminuisce a misura che la distanza aumenta, dimanierchè un oggetto situato ad una piccola distanza può avere lo stesso diametro apparente di un oggetto più grande situato ad una maggior distanza: perchè ciò abbia luogo basta che i due oggetti sottendano angoli eguali. Il diametro apparente varia dunque colla situazione dell'oggetto.

Così, sebbene il sole e la luna sian molto differenti l'uno dall'altro per la grandezza reale, tuttavia i loro diametri *apparenti* sono presso a poco gli stessi, perchè si vedono quasi sotto lo stesso angolo: infatti il diametro della luna varia dai 29',365 ai 33',516, e quello del sole dai 31',516 ai 32',593.

Suol dirsi in ottica che gli oggetti eguali e diseguali, veduti sotto uno stesso angolo, ci compariscono eguali; ma questa proposizione deve esser limitata ai soli casi in cui la distanza di questi oggetti da noi ci comparisca eguale. Infatti, è vero che l'occhio non può giudicare della grandezza degli oggetti se non che dall'angolo ottico; ma l'abitudine continua di vedere diminuire quest'angolo a misura della maggior lontananza ha assuefatto l'occhio a introdurre come elemento di calcolo ne' suoi giudizj sulla grandezza degli oggetti anco la distanza alla quale essi si suppongono. Quindi un oggetto che formi nel nostro occhio un dato angolo sembrerà a noi più grande di un altro che noi vediamo sotto un medesimo angolo, se la distanza a cui supponiamo il primo sia assai maggiore di quella del secondo. Per esempio, un bastone di sei piedi di altezza veduto alla distanza di sei piedi, ed un altro bastone di un piede d'altezza veduto alla distanza di un piede formano nell'occhio presso a poco lo stesso angolo; pure il primo si scorgerà evidentemente più grande, perchè l'occhio, accostumato a calcolare anco involontariamente la distanza, considererà che attesa la maggior distanza non può il primo formare un medesimo angolo senza essere nel tempo stesso più grande. Per la stessa ragione il sole e la luna ci compariscono più

grandi quando sono all'orizzonte che quando si trovano al meridiano, poichè, sembrandoci la volta del cielo molto schiacciata, crediamo che il sole e la luna siano nel primo caso più lontani da noi e nel secondo più vicini, e perciò ci figuriamo che siano all'orizzonte più grandi e al meridiano più piccoli, quantunque il loro angolo ottico sia il medesimo, come cogli strumenti astronomici può verificarsi.

Distanza APPARENTE. Vedi DISTANZA.

Altezza APPARENTE dei corpi celesti. L'altezza alla quale gli astri ci compariscono al di sopra dell'orizzonte è accresciuta per l'effetto della *refrazione* e della *parallasse* (Si vedano queste parole); dicesi perciò altezza *apparente* di un astro quella alla quale esso ci comparisce, mentre si dà il nome di altezza *vera* a quella alla quale lo vedremmo se la refrazione e la parallasse non esistessero. L'altezza degli oggetti terrestri è pure alterata dalla refrazione.

Luogo APPARENTE di un oggetto. È il luogo dove ci comparisce un oggetto veduto a traverso di un mezzo che fa deviare i raggi luminosi, o dentro uno specchio. Questo luogo differisce sempre dal luogo vero dove si trova l'oggetto.

Si dice che il luogo *apparente* differisce dal luogo vero; poichè quando la refrazione, che soffrono a traverso di un mezzo i raggi emanati da un oggetto, fa prendere a questi raggi una diversa direzione, è necessario che l'oggetto comparisca aver cambiato di posto; imperocchè l'occhio giudica della posizione di un oggetto dalla direzione nella quale gli giungono i raggi da esso emanati. Il luogo pertanto che l'oggetto mostra di occupare dopo questo cambiamento nella direzione dei raggi è ciò che si dice il suo luogo *apparente*. Lo stesso si dica rapporto agli specchi.

La determinazione del luogo *apparente* di un oggetto presenta molte difficoltà, e a sentimento dello stesso Newton forma uno dei più difficili problemi dell'Optica: *Puncti illius accurata determinatio problema soluti difficillimum praebebit. Lectiones opticae*, Londra 1729 in-4, Prop. VIII. Le opinioni degli ottici su questo punto sono state divise; non potendo noi estenderci in lunghe discussioni, rimanderemo il lettore alla *Catottrica* di Tacquet, Anversa 1669 in-fol., alle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1740, all'eccellente *Trattato d'Optica* di Smith, Avignone, 1767 in-4, e a quelli di Brewster, e di Coddington, dove tale articolo si trova ampiamente discusso.

Orizzonte APPARENTE, o sensibile. Chiamasi con tal nome il circolo che termina la nostra vista, e che è formato dall'incontro *apparente* del cielo colla terra.

Un tale orizzonte separa la parte visibile o superiore del cielo dalla parte inferiore che ci è invisibile.

L'orizzonte *apparente* differisce dall'orizzonte *razionale*, che gli è parallelo, ma che passa pel centro della terra (Vedi ORIZZONTE).

Forma APPARENTE. È la forma sotto la quale vediamo un oggetto ad una certa distanza. Spesso questa forma differisce molto dalla vera; poichè una linea retta può non sembrare che un punto, una superficie non sembrare che una linea, e un solido non sembrare che una superficie, secondo le loro diverse situazioni relativamente al nostro occhio. Così l'arco d'un circolo può offrire da lungi la forma di una linea retta, un quadrato può presentare quella di un trapezio, un circolo può sembrare un'ellisse, i corpi angolari possono comparire rotondi. Tutti gli oggetti hanno pure una tendenza a ritondarsi per la lontananza. A una gran distanza le scabrosità spariscono, e i corpi ci sembrano uniti.

Moto APPARENTE. È il moto che noi osserviamo in un corpo lontano che si muove, oppure il moto che sembra avere un corpo in riposo, mentre in realtà è il nostro occhio che si muove.

I moti dei corpi situati ad una gran distanza, quantunque si effettuino in un

modo eguale ed uniforme, possono sembrare diseguali ed irregolari all'occhio, che non sa giudicarne che pel cambiamento apparente dell'angolo visuale.

Stazione apparente. È la posizione di un pianeta che sembra stare più giorni nel medesimo punto dello Zodiaco. *Vedi STAZIONARIO.*

APPARENZA (Prosp.). È la rappresentanza o la proiezione di una figura o di un corpo qualunque sul piano del quadro. *Vedi PROSPETTIVA e PROIEZIONE.*

L'apparenza diretta, in ottica, è la vista di un oggetto mediante i raggi visuali diretti, vale a dire senza riflessione, nè refrazione. In *Astronomia*, le *appareanze* sono più comunemente chiamate *fenomeni*, o *fasi*.

APPARIZIONE (Astron.). Si usa questa parola per indicare che una stella o altri corpi luminosi cominciano a divenir visibili dopo essere stati per qualche tempo nascosti. In questo senso il termine *apparizione* è l'opposto di quello di *occultazione*. Così il *levare eliaco* (*Vedi LEVARE*) è piuttosto un'apparizione che un vero levarsi.

APPLICARE (Geom.). Trasportare una linea sia in un circolo, sia in qualunque altra figura, rettilinea o curvilinea, ponendo le estremità della linea sopra il perimetro della figura.

Applicare è ancora preso alcune volte nel senso di *dividere*. Così, *4 applicato a 20* significa *20 diviso per 4*. Questa espressione, comunissima negli autori latini, oggi è raramente usata.

APPLICATA (Geom.). Linea retta che taglia il diametro di una curva, e che ha le sue due estremità sulla curva stessa. Essa chiamasi comunemente col nome di *doppia ordinata*. *Vedi ORDINATA.*

APPLICAZIONE di una scienza ad un'altra. Uso che si fa dei principj e delle verità le quali appartengono ad una scienza per perfezionare ed aumentare un'altra scienza.

Tutte le scienze e tutte le arti essendo insieme collegate, il dominio dell'umano sapere si compone in gran parte delle applicazioni di ciascuno dei suoi rami fondamentali a tutti gli altri. In tal modo tutte le scienze si porgono uno scambievolmente soccorso, e concorrono al medesimo scopo, quello cioè di elevare il sapere all'*unità sistematica*, verso la quale esso tende continuamente, fino dalle prime tracce della verità fra gli uomini.

APPLICAZIONE (Geom.). Diceasi così l'azione di posare o di applicare l'una sull'altra due figure piane eguali o diseguali. Per mezzo dell'*applicazione* o *soprapposizione* si dimostrano molte proposizioni fondamentali della geometria elementare; per esempio, che due triangoli sono eguali, quando hanno un angolo eguale compreso fra lati eguali; che un diametro divide il circolo in due parti eguali; che un quadrato è diviso in due triangoli eguali dalla diagonale, ec. *Vedi SOPRAPPOSIZIONE.*

• **APPLICAZIONE DELL'ALGEBRA ALLA GEOMETRIA.** La scienza dell'estensione si divide in due parti: l'una di esse ha per oggetto i metodi distinti e indipendenti dalla generazione e dal confronto delle diverse specie di estensioni; l'altra, la generazione ed il confronto universale di queste estensioni. La prima parte è generalmente conosciuta sotto il nome di *geometria elementare*. La seconda sotto quello, assai vago, di *applicazione dell'algebra alla geometria*. Alcuni autori hanno chiamato quest'ultima, *geometria analitica*; ma questa denominazione inesatta, è tanto male appropriata all'oggetto che deve rappresentare, quanto quella d'*analisi* alla scienza generale dei numeri. In questo ramo superiore della *Geometria*, le linee, le superficie ed i solidi si considerano in una maniera generale, come altrettante specie di *quantità*, sottoposte perciò a tutte le considerazioni dei *numeri*, e capaci di ricevere dalle leggi universali della scienza di questi, le leggi che sono loro proprie.

Ma le leggi della scienza dei numeri sono elementari o sistematiche, vale a dire particolari o generali: le prime producono i rapporti delle quantità; le seconde, le equazioni. *L'applicazione dell'algebra alla geometria* deve dunque avere due rami corrispondenti ai rapporti e alle equazioni. Questi due rami esistono effettivamente, e formano: 1.^o l'applicazione dell'algebra alla geometria senza coordinate, ossia la costruzione individuale delle formule algebriche; 2.^o l'applicazione dell'algebra alla geometria con le coordinate, ossia la costruzione universale delle equazioni (*Vedi il Discorso d'INTRODUZIONE e l'articolo FILOSOFIA DELLE MATEMATICHE*).

1. Per ben comprendere la prima parte, cominceremo dal far vedere come l'algebra possa applicarsi alla soluzione di un problema geometrico, quindi spiegheremo come con la geometria si possa costruire un'espressione algebrica.

2. **PROBLEMA I.** *Da un punto dato fuori di un circolo, condurre una secante, in modo che la corda intercetta dal circolo sia di una lunghezza data a.*

Sia ACDB (Tav. XXIV, fig. 1) il circolo dato, P il punto dato, e PCD rappresenti la secante richiesta, tale cioè che si abbia $CD = a$. Pel punto dato P e pel centro del circolo, si conduca la retta PAB, e si faccia $PA = b$, $PB = c$, e $PC = x$: ciò posto, siccome dalla geometria elementare si ha

$$PA \times PB = PC \times PD,$$

cost, sostituendo in luogo di PA, PB, PC, PD i loro valori, si ottiene l'equazione

$$bc = x(x+a) \dots (1),$$

la quale risolta dà

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{bc + \frac{a^2}{4}}.$$

Il valore positivo esprime la lunghezza di PC, il valore negativo non dà veruna soluzione geometrica, benché soddisfaccia alla condizione algebrica.

3. **PROBLEMA II.** *Data il perimetro di un triangolo rettangolo, e il raggio del circolo inscritto, determinare il triangolo.*

Sia ABC (Tav. XXIV, fig. 2) il triangolo domandato, e D, E, ed F i punti in cui il circolo inscritto tocca i suoi lati; abbiamo dalla geometria $AF = AE$, $BF = BD$, $CD = EC =$ al raggio OD del circolo inscritto; quindi facendo il perimetro $= 2p$, $OD = r$, $AF = x$, $BF = y$, abbiamo

$$2x + 2y + 2r = 2p,$$

donde

$$y + r = p - x \dots \dots \dots (1).$$

Ora dalla geometria elementare si sa che apr è eguale a due volte l'area del triangolo; ma $(x+r)(y+r)$ è pure eguale a due volte l'area dello stesso triangolo, perciò avremo l'equazione

$$(x+r)(y+r) = apr \dots \dots \dots (2),$$

dalla quale, sostituendo in luogo di $y+r$ il suo valore preso dall'equazione (1), si ottiene

$$(x+r)(p-x) = apr;$$

equazione che risolta dà

$$x = \frac{1}{2}(p-r) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4}(p-r)^2 - pr\right]};$$

e siccome dall'equazione (1) si ha

$$y = p - r - x,$$

così, sostituendo in luogo di x il suo valore e riducendo, si ha

$$y = \frac{1}{2}(p-r) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4}(p-r)^2 - pr\right]}.$$

Aggiungendo ora r a ciascuna di queste espressioni, abbiamo finalmente

$$AC = \frac{1}{2}(p+r) \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4}(p-r)^2 - pr\right]},$$

e

$$BC = \frac{1}{2}(p+r) \mp \sqrt{\left[\frac{1}{4}(p-r)^2 - pr\right]}.$$

Il doppio segno significa puramente che facendo AC eguale ad uno di questi valori, BC sarà eguale all'altro.

4. PROBLEMA III. *Date le corde di due archi, trovare la corda della loro somma.*

Siano AB , BC (Tav. XXIV, fig. 3) le corde date, e si voglia determinare la corda AC della loro somma.

Si conduca il diametro BD , e si tirino le rette AD , CD ; $ABCD$ sarà un quadrilatero inscritto, nel quale per un teorema dimostrato in geometria si avrà

$$AB \times CD + AD \times BC = AC \times BD;$$

di più, essendo BD un diametro, DAB e BCD saranno due triangoli rettangoli, l'uno in A e l'altro in C , e daranno

$$AD = \sqrt{BD^2 - AB^2}, \text{ e } CD = \sqrt{BD^2 - BC^2};$$

perciò sostituendo avremo

$$AB\sqrt{BD^2 - BC^2} + BC\sqrt{BD^2 - AB^2} = AC \times BD.$$

Facendo ora $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$, $BD = 2r$, e sostituendo, avremo

$$a\sqrt{(4r^2 - b^2)} + b\sqrt{(4r^2 - a^2)} = 2cr,$$

e, dividendo per $2r$,

$$c = \frac{b}{2r}\sqrt{(4r^2 - a^2)} + \frac{a}{2r}\sqrt{(4r^2 - b^2)} \dots (1),$$

che è l'espressione cercata. Se le corde sono eguali, si ha $a = b$, donde si ottiene la seguente espressione per la corda di un arco doppio, data per la corda dell'arco semplice:

$$c = \frac{a}{r}\sqrt{(4r^2 - a^2)}.$$

Per mezzo dell'equazione (1) si può determinare a quando b e c sono date: cioè, che, quando le corde di due archi sono conosciute, si può trovare il valore della corda della loro differenza.

5. PROBLEMA IV. *Doti i tre lati di un triangolo, determinare il raggio del circolo circoscritto.*

Rappresentiamo con a, b, c i tre lati, e con r il raggio cercato; allora si determinerà r per mezzo dell'equazione (1) del precedente problema. Trasportando si ha

$$\frac{b}{2r} \sqrt{(4r^2 - a^2)} = c - \frac{a}{2r} \sqrt{(4r^2 - b^2)};$$

quadrando e sviluppando si trova

$$b^2 - \frac{a^2 b^2}{4r^2} = c^2 - \frac{ac}{r} \sqrt{(4r^2 - b^2)} + a^2 - \frac{a^2 b^2}{4r^2};$$

donde riducendo e trasportando di nuovo si ottiene

$$r(0^2 + c^2 - b^2) = ac \sqrt{(4r^2 - b^2)},$$

equazione che innalzata a quadrato e risolta per r dà

$$r = \frac{abc}{\sqrt{[4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2]}} \dots (1),$$

espressione cercata.

Questa formula non si presta al calcolo dei logaritmi; siccome però la quantità sotto il radicale è la differenza di due quadrati, in luogo di essa si potrà sostituire il prodotto della somma e della differenza delle loro radici. Ora, avendosi per la somma e per la differenza di queste radici

$$(2ac + a^2 + c^2 - b^2), \text{ e } (2ac - a^2 - c^2 + b^2),$$

è facile vedere che queste quantità equivalgono alle seguenti

$$(a+c)^2 - b^2, \text{ e } b^2 - (a-c)^2,$$

le quali sono pure la differenza di due quadrati: potremo dunque ad esse sostituire i prodotti

$$(a+c+b)(a+c-b), \text{ e } (b+a-c)(b+c-a);$$

valori che sostituiti nell'espressione (1) la cangiano in

$$r = \frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(b+c-a)(a+b-c)}};$$

e facendo per brevità il perimetro del triangolo dato eguale a $2p$, si avrà finalmente

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},$$

formula adattatissima al calcolo dei logaritmi.

COROLLARIO. Se il triangolo è equilatero, ossia se si ha $a=b=c$, l'espressione (1) si cangia nella seguente

$$r = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

donde si ottiene $a = r\sqrt{3}$ pel lato del triangolo equilatero inscritto.

6. PROBLEMA V. *Essendo dati i tre lati di un triangolo, determinare l'espressione della sua superficie.*

Sia $BC = a$ (Tav. XXIV, fig. 4), $AC = b$, $AB = c$, la perpendicolare $AD = y$, $BD = x$; allora sarà $DC = a - x$, o $x - a$, secondo che la perpendicolare cadrà dentro o fuori del triangolo.

Dalla geometria abbiamo le equazioni

$$y^2 + x^2 = c^2 \dots (1),$$

$$y^2 + (a - x)^2 = b^2 \dots (2),$$

la seconda delle quali non rimane alterata dalla sostituzione di $x - a$ in luogo di $a - x$, talchè essa conviene non solo quando la perpendicolare cade dentro al triangolo, ma ancora quando cade fuori.

Sottraendo l'equazione (2) dall'equazione (1), si ottiene

$$2ax - a^2 = c^2 - b^2,$$

doode

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a};$$

valore che sostituito nell'equazione (1) la cangia in

$$y^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \right)^2,$$

che risolta dà

$$y = \frac{1}{2a} \sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}.$$

Ora, chiamando S la superficie del triangolo, si ha

$$S = \frac{BC \times AD}{2} = \frac{ay}{2};$$

e sostituendo per y il valore trovato di sopra, si ottiene in fine

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2} \dots (3).$$

Applicando ora alla quantità sotto il segno radicale le osservazioni e le riduzioni usadesime che si sono fatte nel problema precedente, avremo la seguente espressione della superficie del triangolo data per i suoi lati

$$S = \sqrt{p(p-a)p-b)(p-c)}.$$

COROLLARIO. L'espressione del raggio di un circolo circoscritto al triangolo è stata trovata (Probl. IV) essere

$$r = \frac{abc}{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}};$$

perciò mettendo in luogo del denominatore di questa frazione il suo valore $4S$, ricavato dall'equazione (3), abbiamo

$$r = \frac{abc}{4S}.$$

7. PROBLEMA VI. Trovare il raggio del circolo inscritto ad un triangolo.

Sia ABC (Tav. XXIV, fig. 5) il triangolo dato, ed O il centro del circolo inscritto a questo triangolo. Si conducano dal centro O ai vertici degli angoli del triangolo le rette OA, OB, OC, ed ai punti di contatto del circolo inscritto i raggi OP, OQ, OR, che faremo eguali ad r' .

Ora i tre triangoli ABO, ACO, BCO, danno per la loro superficie

$$\triangle ABO = \frac{cr'}{2}, \triangle ACO = \frac{br'}{2}, \triangle BCO = \frac{ar'}{2};$$

dunque riunendo insieme le superficie di questi tre triangoli, si ha per la superficie S del triangolo ABC

$$S = r' \left(\frac{a+b+c}{2} \right),$$

e per conseguenza

$$r' = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2}}{2a+2b+2c},$$

ponendo in luogo di S il suo valore trovato nel precedente problema. Se adesso si applicano alla quantità sotto il segno radicale le medesime riduzioni praticate nel Problema IV, e se si fa al solito $2p = a+b+c$, si troverà

$$r' = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}.$$

Se il triangolo fosse equilatero, se cioè si avesse $a=b=c$, questa espressione si camberebbe nella seguente

$$r' = \frac{a}{2\sqrt{3}},$$

donde si avrebbe $a = 2r'\sqrt{3}$ per il lato del triangolo equilatero circoscritto. Questo valore, confrontato col valore trovato nel Corollario del Problema IV, ci fa vedere che il lato del triangolo equilatero circoscritto è doppio del lato del triangolo simile inscritto.

8. PROBLEMA VII. *Trovare la relazione che esiste fra la retta condotta dal vertice di un triangolo rettilineo al mezzo della sua base e i tre lati di questo triangolo.*

Siano (Tav. XXIV, fig. 6)

$$AB=c, AM=c', BM=c'',$$

$$AP=x, PM=y, ME=z.$$

I triangoli rettangoli APM, BPM, daranno rispettivamente le equazioni

$$y^2 = c'^2 - x^2, \quad y^2 = c''^2 - (c-x)^2,$$

dalle quali si ha

$$x = \frac{c^2 + c'^2 - c''^2}{2c} \dots \dots (1),$$

$$y^2 = \frac{2c^2c'^2 + 2c^2c''^2 + 2c'^2c''^2 - c^4 - c'^4 - c''^4}{4c^2} \dots \dots (2).$$

Quando $c'' > c'$, AP è il segmento minore, e si ha

$$PE = AE - AP = \frac{c}{2} - x,$$

e, sostituendo il valore di x , e riducendo,

$$PE = \frac{c'^2 - c'^2}{2c};$$

ora, poichè il triangolo rettangolo EMP dà $\overline{EM^2} = \overline{PM^2} + \overline{PE^2}$, abbiamo, servendoci delle espressioni algebriche trovate di sopra,

$$z^2 = \frac{2c^2c'^2 + 2c^2c'^2 + 2c'^2c'^2 - c^4 - c'^4 - c'^4 + c'^4 - 2c'^2c'^2 + c'^4}{4c^2},$$

e, togliendo il denominatore e riducendo, si ottiene per la relazione cercata

$$4z^2 = 2c'^2 + 2c'^2 - c^2,$$

ovvero, eangiando c in $2a$, c' in a' , e c'' in a'' ,

$$2z^2 + 2a^2 = a'^2 + a''^2. \dots (3)$$

L'analisi precedente conduce a diverse conseguenze, le quali meritano di essere notate. Per esempio, scrivendo l'equazione (1) nel modo seguente

$$c^2 - 2cx = c'^2 - c'^2,$$

e decomponendo i suoi due membri in fattori, si ha

$$c(c - 2x) = (c' + c')(c' - c'),$$

donde risulta questa proporzione

$$c : c' + c' :: c' - c' : c - 2x,$$

vale a dire che la base di un triangolo sta alla somma degli altri due lati, come la differenza di questi medesimi lati sta alla differenza dei segmenti formati dalla perpendicolare abbassata sulla base

Adesso, se si moltiplicano per $\frac{1}{4}c^2$ i due membri dell'equazione (2), si avrà,

osservando che $\frac{1}{4}y^2c^2$ è il quadrato dell'area S del triangolo ABM ,

$$4S = \sqrt{2c^2c'^2 + 2c^2c'^2 + 2c'^2c'^2 - c^4 - c'^4 - c'^4}.$$

D'altronde, siccome

$$y^2 = c^2 - x^2 = c^2 - \left(\frac{c^2 + c'^2 - c'^2}{2c} \right)^2,$$

si troverà, decomponendo in fattori il secondo membro, il quale è formato della differenza di due quadrati,

$$y^2 = \left(c' + \frac{c^2 + c'^2 - c'^2}{2c} \right) \left(c' - \frac{c^2 + c'^2 - c'^2}{2c} \right) = \left[\frac{(c + c')^2 - c'^2}{2c} \right] \left[\frac{c'^2 - (c - c')^2}{2c} \right].$$

Effettuando una simile decomposizione nel secondo membro di questo valore, si ottiene

$$4c^2y^2 = (c + c' + c'')(c + c' - c'')(c + c'' - c')(c' + c'' - c),$$

Dis. di Mat. Vol. I.

e indicando con p il semiperimetro del triangolo, si avrà

$$\frac{1}{4}r^2c^2 = p(p-c)(p-c')(p-c'').$$

Laonde l'area di un triangolo rettilineo, del quale si conoscono i tre lati, ha per espressione

$$S = \sqrt{p(p-c)(p-c')(p-c'')},$$

risultato eguale a quello già trovato nel Problema V.

9. PROBLEMA VIII. *Essendo date le tre linee che dividono gli angoli di un triangolo rettilineo, e che vanno a terminare al mezzo dei lati opposti, trovare l'espressione analitica di questi lati.*

Siano (Tov. XXIV, fig. 7)

$$AB = 2c, \quad AC = 2c', \quad BC = 2c'',$$

$$CD = d, \quad BF = d', \quad AE = d''.$$

Si avranno per l'equazione (3) del problema precedente le tre equazioni

$$4c^2 + 4c'^2 = 2d''^2 + 2c''^2,$$

$$4c^2 + 4c''^2 = 2d'^2 + 2c'^2,$$

$$4c'^2 + 4c''^2 = 2d^2 + 2c^2,$$

ovvero

$$\left. \begin{aligned} 2c^2 + 2c'^2 &= d''^2 + c''^2 \\ 2c^2 + 2c''^2 &= d'^2 + c'^2 \\ 2c'^2 + 2c''^2 &= d^2 + c^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A).$$

Sottraendo la seconda delle equazioni (A) dalla prima, quindi la terza dalla prima, ed in fine la terza dalla seconda, si otterranno le tre seguenti equazioni:

$$\left. \begin{aligned} 3c'^2 - 3c''^2 &= d''^2 - d'^2 \\ 3c^2 - 3c''^2 &= d''^2 - d^2 \\ 3c^2 - 3c'^2 &= d'^2 - d^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (B).$$

Ora, siccome qualunque di queste tre equazioni risulta da una combinazione delle altre due, è evidente che non esistono realmente per quello che sappiamo dall'Algebra che due equazioni fra le incognite c, c', c'' : ma non segue lo stesso allorché si unisce a queste ultime una delle equazioni (A). Prendendo, per esempio, la terza divisa per 2, si ha

$$c'^2 + c''^2 = \frac{d^2 + c^2}{2},$$

e dividendo per 3 la prima delle equazioni (B), si ottiene

$$c'^2 - c''^2 = \frac{d''^2 - d'^2}{3};$$

ora, sommando queste due equazioni, si trova la seguente

$$c'^2 = \frac{3c^2 + 3d^2 - 2d''^2 + 2d'^2}{12}$$

Adesso se si sostituisce questo valore nella terza equazione (B), si avrà, dopo le necessarie riduzioni,

$$9c^2 = 2d'^2 + 2d''^2 - d^2;$$

e con un metodo analogo si dedurrebbe pure

$$9c'^2 = 2d^2 + 2d''^2 - d'^2,$$

$$9c''^2 = 2d^2 + 2d'^2 - d''^2.$$

Tali sono le equazioni dalle quali si possono ricavare i valori dei lati del triangolo.

10. PROBLEMA IX. *Trovare l'espressione del raggio di un circolo tangente a tre rette date, le quali si tagliano due a due.*

Quattro saranno le soluzioni che si potranno avere.

Consideriamo prima di tutto il circolo inscritto nel triangolo ABC (Tav. XXIV, fig. 8), formato dall'incontro delle tre rette date. Indichiamo con a, b, c , i suoi tre lati, con S la sua superficie, e con R il raggio del circolo inscritto; si avrà

$$S = AOC + BOC + BOA = \frac{1}{2}bR + \frac{1}{2}aR + \frac{1}{2}cR;$$

donde

$$R = \frac{2S}{a+b+c};$$

ma facendo $2p = a+b+c$, ed osservando che nel Problema V abbiamo trovato

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, si avrà dopo l'opportuna sostituzione

$$R = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Similmente si troverà pel centro O' ,

$$S = AO'C + BO'A - BO'C = \frac{1}{2}bR' + \frac{1}{2}cR' - \frac{1}{2}aR';$$

donde

$$R' = \frac{2S}{b+c-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

Si avrà egualmente per gli altri due circoli O'' , O''' ,

$$R'' = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}, \text{ ed } R''' = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}.$$

COROLLARIO I. Moltiplicando i quattro raggi trovati, si avrà

$$RR'R''R''' = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c) \cdot p(p-b)(p-c) \cdot p(p-a)(p-b) \cdot p(p-a)(p-c)}{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

donde

$$RR'R''R''' = p(p-a)(p-b)(p-c) = S^2.$$

Dunque il prodotto dei quattro raggi dei circoli tangenti a tre rette, le quali si tagliano due a due, è eguale al quadrato della superficie del triangolo determinato da queste tre rette.

COROLLARIO II. Se si suppone che, restando fissi tanto i due punti B, C, quanta la direzione BA, il punto A si allontani indefinitamente, le due rette BA, CA tenderanno a divenire parallele. Cerchiamo dunque ciò che diviene la formula che dà il raggio R, quando CA diventa parallela a BA. Conducendo la perpendicolare CD ad AB, e facendo $CD = h$, $BD = n$, le linee a, h, n saranno costanti, mentre le linee b, c saranno variabili, e tenderanno a divenire infinite; ma il loro rapporto avrà l'unità per limite, poichè

$$b^2 = h^2 + (c-n)^2, \text{ e } \frac{b^2}{c^2} = 1 + \frac{n^2 + h^2}{c^2} - \frac{2n}{c}.$$

Ora,

$$R = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2(a+b+c)};$$

ossia

$$R = \frac{\sqrt{[b^2 - (a-c)^2][(a+c)^2 - b^2]}}{2(a+b+c)};$$

dunque sostituendo in luogo di b^2 il suo valore $h^2 + c^2 - 2cn + n^2$, si ha

$$R = \frac{\sqrt{(h^2 - a^2 + n^2 - 2cn + 2ac)(a^3 - h^2 - n^2 + 2ac + 2cn)}}{2(a+b+c)}.$$

Dividendo per c il denominatore e ciascuno dei fattori sotto il radicale, facendo

quindi c infinita, ed osservando che $\frac{b}{c}$ si riduce ad 1, si trova

$$R = \frac{1}{4} \sqrt{(2a-2n)(2a+2n)} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - n^2};$$

vale a dire che il raggio R è la metà della perpendicolare CD, il che si poteva prevedere.

11. PROBLEMA X. Trovare le due diagonali di un quadrilatero inscritto ABCD (Tav. XXIV, fig. 3) in funzione dei suoi lati a, b, c, d .

Indichiamo con x, x' le diagonali AC, BD, e rappresentiamo con (a, b) l'angolo ABC; allora l'angolo dei due lati c, d sarà $180^\circ - (a, b)$. Dalla Trigonometria si ha, pei due triangoli ABC, ACD,

$$\left. \begin{aligned} x^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(a, b) \\ x'^2 &= c^2 + d^2 + 2cd \cos(a, b) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1),$$

donde si trae

$$\left. \begin{aligned} \cos(a, b) &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \\ \sin(a, b) &= \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \right)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2).$$

Sostituendo adesso in alcuna delle equazioni (1) il valore di $\cos(a, b)$, si ottiene

$$z^2 = \frac{ac(ad+bc)+bd(ad+bc)}{ab+cd};$$

ossia

$$z^2 = \frac{(ad+bc)(ac+bd)}{ab+cd}.$$

Con un calcolo analogo si troverà per l'altra diagonale

$$z'^2 = \frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc};$$

ed ecco così ottenute le due espressioni delle diagonali del quadrilatero inscritto, come si ricercava nel Problema.

COROLLARIO I. Moltiplicando queste due espressioni, ed estraendo quindi la radice quadrata si avrà

$$zz' = ac+bd.$$

Ciò dimostra che *il rettangolo delle diagonali di un quadrilatero inscritta è eguale alla somma dei rettangoli dei lati opposti*. Teorema celebre di cui si attribuisce il ritrovamento a Tolomeo.

COROLLARIO II. Dividendo l'una per l'altra le medesime due espressioni, ed estraendo la radice quadrata, si otterrà

$$\frac{z}{z'} = \frac{ad+bc}{ab+cd};$$

donde risulta che *le due diagonali di un quadrilatero inscritta stanno fra loro come le somme dei rettangoli dei lati, i quali partono dall'estremità di ciascuna di esse*.

12 Possiamo adesso ad accennare alcune importanti conseguenze che derivano dalle precedenti espressioni.

Indicando con S ed S' le superficie dei due triangoli ABC , ADC , che compongono il quadrilatero, e che hanno per base comune la diagonale z , si avrà

$$\text{area del quadrilatero inscritto} = S+S' = \frac{ab}{2} \sin(a, b) + \frac{cd}{2} \sin[180^\circ - (a, b)],$$

poichè dalla trigonometria sappiamo che la superficie di un triangolo è eguale al semi-prodotto di due de' suoi lati pel seno dell'angolo formato da essi. Di più siccome $\sin[180^\circ - (a, b)] = \sin(a, b)$; così si ha sostituendo.

$$\text{area del quadrilatero inscritto} = S+S' = \frac{ab+cd}{2} \sin(a, b).$$

Sostituendo a $\sin(a, b)$ il suo valore (2), avremo

$$S+S' = \frac{ab+cd}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \right)^2},$$

e quindi

$$S+S' = \frac{1}{4} \sqrt{4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \sqrt{(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)\left(\frac{a+b+d-c}{2}\right)\left(\frac{c+d+a-b}{2}\right)\left(\frac{c+d+b-a}{2}\right)};
\end{aligned}$$

e facendo $p = \frac{a+b+c+d}{2}$, si avrà in fine

$$S+S' = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

espressione molto simmetrica dell'area del quadrilatero inscritto.

13. Si potrebbe desiderare ancora di conoscere, in funzione dei quattro lati del quadrilatero inscritto, l'angolo dei due lati opposti e quello delle due diagonali. Questa nuova questione si trova risolta nel seguente modo negli *Annales des mathématiques* di Gergonne, Tom. XIII, pag. 314.

Supponendo $a > c$, i lati b e d prolungati s'incontreranno dalla parte di c , e formeranno col lato a un triangolo, nel quale si ha necessariamente l'angolo (b, d) eguale a $180^\circ - [(a, d) + (a, b)]$; perciò

$$\text{sen}(b, d) = \text{sen}(a, d) \cos(a, b) + \text{sen}(a, b) \cos(a, d).$$

Ora se per abbreviare si fa

$$b+c+d-a = A, \quad a+b+d-c = C,$$

$$a+c+d-b = B, \quad a+b+c-d = D,$$

avremo per quello che precede

$$\text{sen}(a, d) = \frac{\sqrt{ABCD}}{2(ad+bc)}, \quad \text{sen}(a, b) = \frac{\sqrt{ABCD}}{2(ab+cd)},$$

$$\cos(a, d) = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}, \quad \cos(a, b) = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)};$$

sostituendo dunque questi valori in quello di $\text{sen}(b, d)$, avremo

$$\text{sen}(b, d) = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)\sqrt{ABCD} + (a^2+d^2-b^2-c^2)\sqrt{ABCD}}{4(ad+bc)(ab+cd)},$$

e ponendo fuori $\sqrt{ABCD}$ e riducendo, si trova

$$\text{sen}(b, d) = \frac{(a^2-c^2)\sqrt{ABCD}}{2(ad+bc)(ab+cd)}.$$

Con uno stesso metodo si trova pure

$$\text{sen}(a, c) = \frac{(b^2-d^2)\sqrt{ABCD}}{2(ad+bc)(ab+cd)}.$$

Non è difficile vedere che si ha ancora

$$\cos(b, d) = \text{sen}(a, b) \text{sen}(a, d) - \cos(a, b) \cos(a, d),$$

e sostituendo i soliti valori

$$\cos(b, d) = \frac{ABCD - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)}{4(ab + cd)(ad + bc)};$$

ovvero eliminando A, B, C, D e riducendo

$$\cos(b, d) = \frac{(ab + cd)^2 + (ad + bc)^2 - (a^2 - c^2)^2}{2(ab + cd)(ad + bc)}.$$

Ora dalla trigonometria si ha

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(b, d) = 1 - \cos(b, d),$$

donde, sostituendo il valore di $\cos(b, d)$, si ottiene

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(b, d) = 1 - \frac{(ab + cd)^2 + (ad + bc)^2 - (a^2 - c^2)^2}{2(ab + cd)(ad + bc)}.$$

Riducendo adesso, sviluppando, e osservando che $(a - c)^2$ è fattore in tutti i termini e quindi estraendo la radice, si ottiene

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b, d) = \frac{a - c}{2} \sqrt{\frac{(a + c)^2 - (b - d)^2}{(ab + cd)(ad + bc)}};$$

e siccome $B \times D$ è eguale ad $(a + c)^2 - (b - d)^2$, così si giunge in ultima analisi a questa espressione

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b, d) = \frac{a - c}{2} \sqrt{\frac{BD}{(ab + cd)(ad + bc)}}.$$

Inoltre avendosi dalla trigonometria

$$\cos \frac{1}{2}(b, d) = \frac{\operatorname{sen}(b, d)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(b, d)},$$

così sostituendo si ottiene

$$\cos \frac{1}{2}(b, d) = \frac{a + c}{2} \sqrt{\frac{AC}{(ab + cd)(ad + bc)}}.$$

Dividendo adesso $\operatorname{sen} \frac{1}{2}(b, d)$ per $\cos \frac{1}{2}(b, d)$ si ha

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(b, d) = \frac{a - c}{a + c} \sqrt{\frac{BD}{AC}}.$$

Tali sono le nove espressioni date dagli autori della citata soluzione. Non resta che determinare l'angolo (z, z') delle due diagonali. Ora, l'area del quadri-

latero inscritto è eguale per quello che abbiamo veduto a $\frac{1}{4} \sqrt{ABCD}$, e di più la

stessa area è eguale alla somma dell'area dei quattro triangoli AEB, BEC, CED, DEA; se dunque si prende dalla trigonometria l'area dei quattro triangoli, si ha

$$\frac{1}{4} \sqrt{ABCD} = \frac{AE \cdot BE}{2} \operatorname{sen}(z, z') + \frac{BE \cdot CE}{2} \operatorname{sen}(z, z') + \frac{CE \cdot DE}{2} \operatorname{sen}(z, z') + \frac{DE \cdot AE}{2} \operatorname{sen}(z, z'),$$

$$\frac{1}{4} \sqrt{ABCD} = \frac{(AE+CE)(BE+DE)}{2} \operatorname{sen}(z, z');$$

ma $AE+CE=AC=z$, e $DE+BE=BD=z'$, dunque si trova finalmente

$$\frac{1}{4} \sqrt{ABCD} = \frac{zz'}{2} \operatorname{sen}(z, z'),$$

donde

$$\operatorname{sen}(z, z') = \frac{\sqrt{ABCD}}{zz'} = \frac{\sqrt{ABCD}}{2(ac+bd)}.$$

D'altronde, $\cos^2(z, z') = 1 - \operatorname{sen}^2(z, z')$; perciò, sostituendo il valore di $\operatorname{sen}(z, z')$, e per A, B, C, D i valori di sopra fissati, si trova dopo gli opportuni sviluppi e riduzioni

$$\cos(z, z') = \frac{a^2+c^2-b^2-d^2}{2(ac+bd)}.$$

Da questi due valori, operando come antecedentemente, si deducono naturalmente i tre seguenti

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}(z, z') = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{AC}{ac+bd}},$$

$$\cos \frac{1}{2}(z, z') = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{BD}{ac+bd}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(z, z') = \sqrt{\frac{AC}{BD}}.$$

14. **PROBLEMA XI.** *Essendo data un quadrato OCMN (Tav. XXV, fig. 1), condurre dal vertice M una retta tale, che la distanza compresa sopra questa retta, fra le linee AA' e BB' che formano l'angolo O opposto al vertice M, sia eguale ad una lunghezza data m.*

Supponiamo che MQP sia una linea che soddisfaccia al problema; siccome l'enunciato lascia l'incognita a piacere, e d'altronde basta che essa possa servire a determinare facilmente la linea cercata, perciò si prenda OP per incognita. Sia $OP=x$, $OC=MC=a$; inoltre si ha, dall'enunciato medesimo, $QP=m$. Ciò posto, i triangoli simili OQP, CMP danno $QO : MC :: OP : PC$; ma $PC=x+a$; dunque sostituendo

$$QO : a :: x : x+a, \text{ donde } QO = \frac{ax}{x+a}.$$

Ora il triangolo rettangolo OQP dà

$$PQ^2 = x^2 + \frac{a^2 x^2}{(x+a)^2};$$

ma PQ deve essere eguale ad m; dunque

$$x^2 + \frac{a^2 x^2}{(x+a)^2} = m^2,$$

donde

$$x^4 + 2ax^3 - (m^2 - 2a^2)x^2 - 2am^2x - a^2m^2 = 0 \dots (1).$$

Da ciò risulta che il problema dipende da un'equazione del quarto grado.

Abbiamo supposto, in ciò che precede, la linea QP posta nell'angolo BOA'. Ora il problema richiede che essa sia situata fra le rette AA', BB', senza indicare particolarmente alcuno dei quattro angoli retti. Da ciò risulta che possiamo soddisfare alle condizioni dell'enunciato in quattro maniere, come si rileva dalla figura. Le due soluzioni rappresentate negli angoli BOA', AOB' sono sempre possibili; ma le due altre rappresentate nell'angolo AOB non sono possibili che quando la linea data m è sufficientemente grande.

Per formare le equazioni che determinano le tre ultime soluzioni, non occorrono che leggeri cambiamenti da farsi ai precedenti ragionamenti. Indicando con x l'incognita OP', o OP'', o OP''', si giunge sempre all'equazione

$$x^4 - 2ax^3 - (m^2 - 2a^2)x^2 + 2am^2x - a^2m^2 = 0.$$

Un'osservazione si presenta da sé stessa in questa equazione, che cioè, cambiando x in $-x$, si ricade nell'equazione (1); dunque questa basta per dare tutte le soluzioni del problema, purché si osservi di portare i valori negativi di x dalla parte di OA, mentre il valore positivo si porterà dalla parte di OA'.

15. L'equazione (1) è completa; ma facendo una scelta più adattata per l'incognita, si può giungere ad un'equazione più semplice, e più facile a risolversi. Sia sempre MQP una retta che soddisfaccia al problema, e sia H il mezzo di PQ: si prenda MH per incognita, e si faccia $MH = y$. Avremo

$$MQ = y - \frac{m}{2}, \quad MP = y + \frac{m}{2}, \quad CP = \sqrt{\left(y + \frac{m}{2}\right)^2 - a^2}.$$

Quindi, a motivo di MC parallela a QO, si ha

$$CP : OC :: MP : MQ,$$

donde

$$MQ \times CP = OC \times MP.$$

Sostituendo alle linee i loro valori, questa eguaglianza diviene

$$\left(y - \frac{m}{2}\right) \sqrt{\left(y + \frac{m}{2}\right)^2 - a^2} = a \left(y + \frac{m}{2}\right),$$

ovvero, quadrando e riducendo,

$$y^4 - \left(2a^2 + \frac{m^2}{2}\right)y^2 + \frac{m^4}{16} - \frac{a^2m^2}{2} = 0 \dots (2),$$

equazione che risolta dà

$$y = \sqrt{a^2 + \frac{m^2}{4}} \pm a \sqrt{a^2 + m^2}.$$

Il primo di questi due valori è sempre reale; ed è quello che dà le due linee MQP, MP'Q'. Il secondo può divenire immaginario, ed è quello che dà le linee P''MQ'', P'''MQ'''. Quanto ai valori negativi di y , non se ne fa verun conto poichè sono inutili.

16. Era facile il prevedere che l'incognita y sarebbe risultata da equazioni del secondo grado. Infatti, siccome il punto M è ad egual distanza dai lati dell'angolo AOB, così è evidente che quando si conosce la soluzione MQP, prendendo OP' = OQ, e conducendo MP'Q', avremo P'Q' = PQ = m ; dunque MP'Q'

sarà un'altra soluzione del problema. Similmente, se $P''Q''$ è una retta eguale ad m , prendendo $OP'' = OQ''$ e conducendo $P'''M'Q'''$, si avrà ancora $P'''Q''' = m$. È egualmente evidente che, prendendo le metà II, H', H'', H''' , di $PQ, P'Q', P''Q'', P'''Q'''$, la distanza MH' sarà eguale ad MH , e la distanza MH''' eguale ad MH'' ; dunque adottando per incognita la distanza dal punto M al mezzo della retta eguale ad m , la quale deve essere inscritta, siamo sicuri che questa incognita non avrà che due valori differenti, e non dovrà perciò dipendere che da un'equazione di secondo grado.

Non seguiva lo stesso quando si prendeva per incognita la distanza dal punto O al punto ove la retta domandata taglia la linea AA' . Allora l'incognita, che veniva indicata da x , doveva avere quattro valori tutti differenti, i quali sono: $x = OP, x = -OP', x = -OP'', x = -OP'''$.

Da quello che abbiamo detto risulta questa regola importante che, *per determinarsi nella scelta dell'incognita, è necessario esaminare quante è quella che deve avere un minor numero di valori.*

17. In forza di questa regola, se accade che due quantità abbiano una tale somiglianza di relazione con le altre quantità del problema, che prendendo l'una o l'altra per incognita, si giunga ad equazioni interamente simili, bisognerà rigettarle tutte e due egualmente, e prendere in loro vece, per incognita, una quantità che abbia una stessa relazione con l'una e con l'altra, per esempio, la loro somma, o la loro differenza, o una media proporzionale, o finalmente qualunque altra quantità convenientemente scelta.

Altre volte si vede subito che una quantità non può avere un valore positivo $+a$, senza averne ancora uno negativo $-a$. Questa circostanza può determinarci a prendere questa quantità per incognita: poichè siamo sicuri che l'equazione finale da cui essa dipende avrà tutte le sue radici eguali due a due e con segni contrarii, e che per conseguenza questa equazione non conterrà che potenze pari dell'incognita.

In alcuni casi ancora si riconosce che prendendo per incognita il rapporto di due quantità, questa incognita non può avere un valore a senza avere pure il valore $\frac{1}{a}$. Allora siamo certi che l'incognita sarà data da un'equazione reciproca.

Ora si sa che una tale equazione si abbassa ad un grado minore della metà, quindi questa considerazione può determinarci a scegliere questa quantità per incognita.

18. Ma, fra le incognite che a prima vista compariscono potere essere impiegate con egual vantaggio, vi è ancora una scelta da fare, quando si vuole avere la soluzione la più semplice possibile; ma una tale scelta è alcune volte tanto difficile, che la fortuna o il caso sembra avervi una maggior parte che la sagacità. L'ultimo problema può ancora servirci di esempio.

Supponiamo, come abbiamo fatto di sopra (14), che la linea MQP soddisfaccia all'enunciato, ed alziamo sopra MP la perpendicolare PR , la quale incontri in R il prolungamento di MN . È chiaro che il punto P è determinato quando si conosce il punto R : poichè allora basta descrivere una semicirconferenza sopra MR come diametro. Senza dubbio non è facile che venga in mente di prendere la distanza NR per incognita; tuttavia vedremo che con questo mezzo si ottiene un risultato della massima semplicità.

Sia dunque $NR = z$. Si faccia inoltre $MQ = u$, e si abbassi PS perpendicolare sopra MR . I triangoli MNQ, PRS sono eguali, perchè hanno $MN = PS$, ed inoltre sono equiangoli per essere i lati dell'uno rispettivamente perpendicolari ai lati dell'altro; dunque $PR = MQ = u$. Ciò posto, il triangolo rettangolo MPR ,

e il paragone dei lati omologhi dei due triangoli simili MPA, PRS , danno le due eguaglianze

$$\overline{MA}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PR}^2, \quad MR \times PS = MP \times PR;$$

sostituendo alle linee le loro espressioni analitiche, abbiamo

$$(z+a)^2 = (m+u)^2 + u^2, \quad (z+a)u = (m+u)u;$$

e così si hanno due equazioni fra due incognite. Se si fa passare il punto P nelle quattro posizioni che esso può occupare, si vedrà che queste equazioni sussistono sempre, con la sola differenza che z cangia di segno quando il punto R cade dalla parte NR' , e che u cangia pure di segno quando Q cade dall'altra parte del punto M rapporto al punto P , il quale deve sempre restare sopra la linea AA' .

Si elimina u sottraendo dalla prima equazione due volte la seconda, e si ha

$$z^2 = a^2 + m^2, \quad \text{dove} \quad z = \pm \sqrt{a^2 + m^2},$$

risultato di una semplicità inaspettata, e che come in breve vedremo dà luogo ad una costruzione semplicissima.

Questi esempi basteranno per dare un'idea di quanto l'applicazione dell'algebra ai problemi di geometria ne faciliti la soluzione; e quelli che volessero esercitarsi maggiormente in questo ramo importante di geometria analitica potranno consultare: Reynaud e Duhamel, *Problèmes et développemens sur diverses parties des Mathématiques*, Parigi, 1823 in-8; Puissant, *Recueil de diverses propositions de Géométrie résolues ou démontrées par l'analyse algébrique*, Parigi, 1824, in-8; Gergonne, *Annales de Mathématiques*, ec. ec.

19. Fin qui abbiamo veduto come indicando con lettere la lunghezza delle diverse linee che entrano in un problema geometrico, e facendo uso dei teoremi e delle verità insegnate dalla geometria, si possano esprimere con equazioni algebriche le relazioni che legano tra loro le linee date con quelle che si cercano; ed abbiamo pure veduto come risolvendo le equazioni trovate si giunga ad espressioni algebriche finali, nelle quali non rimane a fare altro che sostituire alle lettere i loro valori numerici, ed eseguire i calcoli che vi sono indicati per ottenere il valore delle linee cercate. La geometria però ci somministra il mezzo di dedurre dalle semplici formule algebriche dei metodi puramente geometrici, mediante i quali si giunge a trovare i valori dell'incognita evitando qualunque operazione numerica. Questa parte finale della risoluzione dei problemi è conosciuta sotto il nome di *costruzione delle formule algebriche*; ma prima di cominciare ad esporne le regole è necessario di dare un cenno sopra due principj importanti, il primo dei quali riguarda l'interpretazione da darsi alle incognite quando i loro valori sono negativi, ed il secondo riguarda la necessità che le formule siano omogenee per potersi costruire.

20. Quando s'impiega l'algebra per trattare un quesito numerico, alenne volte s'incontrano per le incognite dei valori negativi. Sappiamo che questi valori non convengono al quesito preso con tutte le restrizioni contenute nel suo enunciato, o con quelle che spesso vi s'introducono mediante certe supposizioni che si fanno o nel principio o nel corso del calcolo; e si sa ancora come cangiando nelle equazioni il segno delle lettere che rappresentano le incognite si possono levare queste differenti specie di restrizioni. Simili osservazioni sono applicabili egualmente ai problemi di geometria che si risolvono per mezzo dell'algebra, come adesso passiamo a far vedere con un esempio.

Si tratti di *dividere una retta in media ed estrema ragione*; vale a dire in due parti, di cui la maggiore sia media proporzionale tra la intera retta e l'altra

parte. Indicando con a la linea data e con x il segmento maggiore, l'altro segmento sarà $a-x$, e l'enunciato del problema darà subito l'equazione

$$x^2 = a(a-x) \dots \dots (1),$$

le di cui radici sono

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}, \quad x = -\frac{a}{2} - \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Il secondo valore è negativo e non conviene in modo alcuno al problema, poiché è evidente che il segmento cercato non può essere che una quantità positiva. Dunque non si ha che la sola prima soluzione; ed è chiaro che quando si sarà espressa in numeri la linea data per mezzo di una determinata unità di lunghezza, non resterà a fare altro che eseguire i calcoli indicati nella formula, per conoscere il numero delle unità lineari contenute nel segmento cercato.

Ma indipendentemente ancora dal calcolo possiamo trovare questo segmento con una semplice costruzione geometrica indicata dalla stessa formula algebrica. Si elevi all'estremità della linea data AB (Tav. XXIII, fig. 13) una perpendicolare BC eguale alla metà di AB , e si tiri AC : l'ipotenusa AC sarà eguale

a $\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$. Descrivendo ora dal centro C col raggio BC una circonferenza che

taglia AC in D , si ha evidentemente

$$AD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2};$$

dunque $x = AD$. Così, per risolvere il problema, non rimane che a portare AD in AM sopra AB . Si osservi che questa costruzione è precisamente quella che si conosce nella geometria elementare.

La circonferenza descritta col centro C taglia il prolungamento di AC in D' , e se si porta AD' in AM' sopra AB prolungata, si avrà

$$AM' = AD' = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{2};$$

dunque il secondo valore è $x = -AM$. Vediamo qual senso possa attribuirsi a questo valore negativo.

Cangiando nell'equazione (1) il segno di x , essa diviene

$$x^2 = a^2 + ax \dots \dots \dots (2);$$

e prendendo positivamente il valore di x , che nell'equazione (1) era negativo, si avrà l'espressione

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}},$$

che dovrà necessariamente soddisfare all'equazione (2). Ora quest'ultima equazione è precisamente quella che si trova se si cerca sul prolungamento della retta AB , al di là di A , un punto M' , tale che la distanza AM' sia media proporzionale tra la distanza BM' e la retta data, AB . Da ciò risulta che portando il valore positivo di x dalla parte AB , alla destra del punto A , e il valore negativo di x dalla parte AX , alla sinistra di A , si avranno tutte le soluzioni del problema proposto, che può esser generalizzato nel modo seguente:

Sopra una retta indefinita, che passa per due punti A e B, determinare un punto la di cui distanza dal punto A sia media proporzionale tra la sua distanza dall'altro punto B, e la distanza data AB.

Questo enunciato non è soggetto, come si vede, alla restrizione che esigea che il punto richiesto fosse situato tra A e B, e non altrove. Supponiamo dunque che il problema sia stato presentato sotto quest'ultimo enunciato, e cerchiamo di scioglierlo. A tale oggetto considerando il problema come risoluto, e supponendo che il punto M soddisfaccia a tutte le condizioni richieste, avremmo preso per incognita $AM = x$, e saremmo giunti alla stessa equazione (1) e agli stessi valori di x . Ma è chiaro che in tal modo avremmo introdotto, fino dal principio, una restrizione estranea all'enunciato, poichè avremmo sottoposto i nostri calcoli alla supposizione che il punto cercato M fosse situato tra i punti A e B. Il valore positivo è il solo che corrisponde a questa ipotesi, mentre il valore negativo, preso positivamente, è il valore di x che si sarebbe ottenuto se nello sciogliere il problema avessimo supposto il punto cercato in M': infatti in questa seconda supposizione saremmo giunti all'equazione (2), le di cui radici sono le stesse di quelle della equazione (1), ma con segni contrarii.

Così il valore negativo serve talora a completare la risoluzione di un problema, di cui il quesito proposto non è che un caso particolare, e talora a togliere una restrizione introdotta per facilitare i ragionamenti e i calcoli. Ma in tutti i casi bisogna osservare che la grandezza assoluta di questo valore si porta dalla parte opposta a quella in cui doveva esser situata la distanza cercata. In conseguenza di ciò stabiliremo il seguente principio: *Quando si fa uso dell'algebra per risolvere un problema di geometria, se per incognita si è presa una distanza contata sopra una data linea, partendosi da un punto fisso situato su questa linea, i valori negativi dell'incognita dovranno esser portati in un senso opposto a quello nel quale si è supposto che questa distanza fosse situato.* Questo principio non è nel numero di quelli che si possono dimostrare a priori: ma vi si giunge per analogia o per estensione d'idee, e quindi vengono le applicazioni a confermarlo.

21. Dobbiamo però avvertire che se i valori negativi dell'incognita indicano sempre una direzione della linea cercata in un senso opposto a quello nel quale era stata in principio supposta, non sempre l'errore della supposizione caduto nella direzione viene manifestato da valori negativi per l'incognita.

Nel nostro esempio non abbiamo supposto che il punto cercato potesse trovarsi dalla parte di BY, perchè, per un punto qualunque N situato da questa parte, la distanza AN essendo maggiore di AB e di BN, non potrebbe averi $\overline{AN} = AB \times BN$ come lo richiede il quesito. Ma ammettiamo per un momento che una tale osservazione sia sfuggita alla nostra riflessione, che si voglia determinare il punto N dietro la condizione $\overline{AN} = AB \times BN$, e che per incognita si prenda la distanza BN. Facendo $BN = x$, si avrà $AN = a + x$, e l'equazione da risolvere sarà

$$(a+x)^2 = ax,$$

che risolta dà

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{3a^2}{4}}.$$

Le radici di questa equazione sono immaginarie, e indicano una impossibilità: ma ci inganneremmo grandemente se ne concludessimo l'impossibilità del quesito, che superiormente abbiamo dimostrato possibile. L'impossibilità in que-

sto caso risiede tutta intera nella supposizione che il punto cercato sia situato dalla parte BY. Per assicurarne cerchiamo se dall'altra parte BX esiste qualche altro punto che possa soddisfare alla condizione dell'enunciato. S'indicherà parimente con x la distanza del punto B da questo punto incognito, e la sua distanza dal punto A sarà $a-x$ o $x-a$, secondochè questo punto incognito si troverà avanti o dopo il punto A.

Nel primo caso si avrà $(a-x)^2=ax$; e nel secondo si avrà $(x-a)^2=ax$. Ma queste due equazioni si riducono alla seguente:

$$x^3-3ax+a^3=0;$$

per conseguenza quest'ultima darà il punto M e il punto M'. Infatti risolvendola si trovano due valori reali e positivi, cioè:

$$x=\frac{3a}{2}\pm\sqrt{\frac{5a^3}{4}}.$$

Si vede dunque che se si cerca una distanza incognita dalla parte opposta a quella dalla quale deve esser situata, l'errore della supposizione non è sempre rettificato da valori negativi, come forse potrebbe supporre. Questo errore infatti, nell'esempio superiore, non è manifestato che da espressioni immaginarie.

22. Il secondo principio di cui abbiamo parlato di sopra (19) è quello conosciuto sotto il nome di *Legge d'omogeneità*. Eccone l'enunciato: *Se le lettere a, b, c . . . , che entrano in un'equazione, rappresentano linee, ed inoltre nessuna linea particolare è stata presa per unità, l'equazione deve essere omogenea rapporto a queste lettere: vale a dire tutti i suoi termini debbono essere del medesimo grado rapporto a queste lettere.* Per convincersi della verità di questo principio basta riflettere che quando si vuol risolvere col calcolo un problema relativo a quantità di una natura qualunque, si suppongono tutte espresse in numeri rapporto a un'unità arbitraria della stessa specie, e si cerca di stabilire delle relazioni tra questi numeri, dietro le condizioni che legano tra loro le quantità che essi rappresentano. Se si può giungere a stabilire queste equazioni, è chiaro che la loro forma sarà indipendente dall'unità, sulla quale non si è fatta alcuna considerazione: i numeri soli che esprimono le quantità varieranno coll'unità, ma la loro combinazione sarà sempre la stessa; e finchè saranno rappresentati da simboli generali, le equazioni non subiranno cambiamento nessuno. Ciò posto, supponendo che una delle quantità date sia stata presa per unità, i numeri che rappresenteranno le altre saranno i loro rapporti con questa, ed è tra questi rapporti che le equazioni avranno luogo. Immaginando quindi che si passi ad un'altra unità qualunque, tutte le quantità saranno espresse da numeri che staranno ai primi nel rapporto inverso delle due unità, ma i loro rapporti non cangeranno, e per conseguenza le equazioni primitive avranno sempre luogo. Ora tutti i termini di queste equazioni, non essendo che funzioni di questi rapporti, conterranno nel numeratore e nel denominatore lo stesso numero di fattori provenienti dall'espressione delle quantità in numeri: se dunque si tolgono i denominatori, tutti i termini avranno uno stesso numero di fattori indicato dal loro denominatore comune; e questa eguaglianza nel numero dei fattori costituisce appunto ciò che dicesi *omogeneità* delle equazioni. È chiaro che essa esiste in tutte le equazioni che possono essere somministrato da un problema qualunque relativo a quantità di qualsivoglia natura, e che si conserverà in tutti i calcoli che si dedurranno da queste prime equazioni, poichè le trasformazioni non faranno mai che diminuire o aumentare egualmente il grado o il numero dei fattori di ogni termine.

Quando pertanto, all'oggetto di rendere i calcoli più semplici, si è convenuto di prendere per unità una delle linee, che l'enunciato del problema prescrive di introdurre nel calcolo, questa linea sparirà in tutti i termini in cui essa figurava o come fattore o come divisore, e quindi l'espressione algebrica non sarà più omogenea. Ma in questo caso sarà sempre facile restituirla alla sua forma primitiva introducendo nei suoi termini la linea stata presa per unità, o le sue diverse potenze atte a ristabilire la omogeneità della formula algebrica. Così, acciò che le quantità

$$\frac{3a^4c + a^2b - 4c}{a^2 + 3c - 5}, \quad \frac{a-1}{d+cb}, \quad \sqrt{\left(\frac{a^2+1}{c}\right)}$$

possano rappresentare delle linee, bisogna metterle sotto la forma seguente :

$$\frac{3a^4c + a^2br^2 - 4cr^4}{a^2r^2 + 3cr^2 - 5r^4}, \quad \frac{ar^2 - r^3}{dr + cb}, \quad \sqrt{\left(\frac{a^2r + r^3}{c}\right)};$$

rappresentando con r la retta che era stata presa per unità di misura.

23. Passiamo adesso ad esporre le regole generali per la costruzione delle formule algebriche. Per applicare le leggi dei numeri all'estensione, è necessario esprimere in *numeri* le linee, le superficie e i solidi; ciò si eseguisce facilmente prendendo per *unità* una retta qualunque di una grandezza determinata: ed è così, per esempio, che, essendo a il numero di unità lineari conteute nel lato di un quadrato, $\sqrt{a^2}$ esprimerà la diagonale di questo quadrato, ed a^2 la sua superficie. Egualmente, essendo a e b i numeri di unità lineari di due lati contigui di un rettangolo, $a \times b$ esprimerà la *superficie* di questo rettangolo; ed a , b , e essendo le tre costole contigue di un parallelepipedo rettangolo, il prodotto $a \times b \times c$ esprimerà la *solidità* di questo parallelepipedo.

In generale, un numero isolato a rappresenta sempre una *linea*; il prodotto di due numeri, come $a \times b$, rappresenta una *superficie*, e il prodotto di tre numeri, come $a \times b \times c$, rappresenta un *solido*.

Se si trattasse perciò di costruire geometricamente le tre estensioni espresse da a , ab , abc , si tirerebbe, per la prima, una retta la di cui lunghezza contenesse a volte l'unità lineare; per la seconda, si formerebbe un rettangolo la di cui base fosse a e l'altezza b ; per la terza, si costruirebbe un parallelepipedo rettangolo la di cui larghezza fosse a , la lunghezza b , e la profondità o altezza c .

24. In generale, si dice *costruzione* la rappresentazione con linee dell'estensione particolare espressa da ciascuna delle forme a , ab , abc ; e la costruzione di queste espressioni, o la valutazione delle loro grandezze numeriche, è specialmente l'oggetto di questa parte della geometria della quale ci occupiamo.

25. Qualunque espressione algebrica, il di cui valore finale non ha che una sola *dimensione*, è sempre una retta: così le espressioni $\frac{a^2}{b}$, $\frac{ab}{c}$, $\frac{a^3b}{c^2}$, ec. ec.,

rappresentano delle linee; infatti tutte queste forme non hanno in realtà che una sola dimensione, perchè il numero dei fattori del numeratore non supera che di un'unità quello dei fattori del denominatore. Le formule di questa specie, o di una sola dimensione, danno luogo alle *costruzioni del primo ordine*. Nella risoluzione delle questioni geometriche si riduce per quanto è possibile la costruzione delle formule di grado più elevato alle *costruzioni di primo ordine*; il che si eseguisce facilmente tutte le volte che queste questioni possono ridursi alla ricerca del valore di una linea retta.

26. Allorché un problema geometrico è proposto, bisogna in primo luogo descri-

vere una figura la quale rappresenti le parti e le condizioni del problema; osservare quindi con accuratezza i rapporti che le differenti parti hanno fra loro, o con altre rette arbitrarie che si possono condurre a piacere nella figura; esprimere finalmente i rapporti trovati con segni generali, e stabilire l'eguaglianza che deve rappresentare il rapporto delle linee incognite o cercate con quelle che sono cognite. Stabilita una volta l'eguaglianza, si potranno valutare numericamente le incognite, o costruirle geometricamente mediante le regole generali che andiamo ad esporre.

27. La costruzione delle formule di una sola dimensione si riduce a cinque casi, i quali si possono esprimere nella seguente maniera, indicando con x il valore cercato, e con a, b, c, d , ec., le rette date, dalle quali esso dipende:

$$1^{\circ} \dots x = a - b + c - ec.,$$

$$2^{\circ} \dots x = \frac{ab}{c},$$

$$3^{\circ} \dots x = \sqrt{ab},$$

$$4^{\circ} \dots x = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$5^{\circ} \dots x = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

28. Per costruire la formula $x = a - b + c - d + e - ec.$, si riuniranno tutte le quantità negative all'oggetto di dare all'espressione la forma

$$x = (a + c + e + ec.) - (b + d + f + ec.).$$

Essa rappresenta, in questa maniera, la differenza fra la somma delle rette a, c, e , ec., e quella delle rette b, d, f , ec.

Si prenderà dunque, sopra una retta indefinita AD (Tav. XXIII, fig. 9), a partire dal punto A , $AB = a$, $BC = c$, $CD = e$; e supponendo che non vi siano che queste tre rette, si avrà

$$AD = a + c + e.$$

Si porterà quindi, da D verso A , $DE = b$, $EF = d$, $FH = f$; così si determinerà

$$DH = b + d + f,$$

e si avrà

$$AH = AD - DH = (a + c + e) - (b + d + f) = x.$$

AH è dunque la linea domandata.

Si terrebbe lo stesso metodo qualora si avesse un maggior numero di linee.

È importante osservare che l'addizione deve sempre effettuarsi da sinistra a destra, e la sottrazione da destra a sinistra.

29. Per costruire la formula $x = \frac{ab}{c}$, la ridurremo alla proporzione

$$c : a :: b : x;$$

il che prova che x è una quarta proporzionale alle tre rette c, a, b . Ora, una quarta proporzionale può ottenersi in due maniere.

1^o. Formiamo un angolo qualunque colle rette indefinite AX, AY (Tav. XXIII, fig. 10); e, a partire dal punto A , prendiamo sopra AX , $AB = c$, $AC = a$, e sopra AY , $AD = b$; conduciamo BD , e tiriamo per il punto C una parallela CM

a BD: il punto M, ove questa parallela taglia AY, determinerà $AM = x$. Infatti i triangoli simili ABD, ACM danno

$$AB : AC :: AD : AM,$$

ossia

$$c : a :: b : AM.$$

Dunque

$$AM = \frac{ab}{c} = x.$$

2°. Sopra una retta indefinita AY, prendiamo $AD = c$, $AM = a$; dal punto D tiriamo una retta qualunque DB, e prendiamo $DB = b$; per i punti A e B conduciamo AX, e per il punto M, MC parallela a BD: la linea MC sarà eguale ad x , poichè questa costruzione dà

$$AD : AM :: BD : MC,$$

ossia

$$c : a :: b : MC,$$

donde

$$MC = \frac{ab}{c} = x.$$

3°. Sia ancora

$$x = \frac{2a^2bc}{d^2e};$$

decomponiamo questa espressione nella seguente maniera:

$$x = \frac{2aa}{d} \times \frac{bc}{de}.$$

Con alcuno dei metodi stabiliti di sopra si troverà una quarta proporzionale $y = \frac{2aa}{d}$, ed avremo

$$x = \frac{ybc}{de},$$

la quale si può scrivere come segue:

$$x = \frac{yb}{d} \times \frac{c}{e};$$

e cercando ancora una quarta proporzionale $z = \frac{yb}{d}$, si trova $x = \frac{zc}{e}$, espressione che si costruisce anch'essa per mezzo di una quarta proporzionale.

3°. Se si avesse

$$x = \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm^2}{n^2} + \frac{cm}{n},$$

è chiaro che basterebbe cercare delle quarte proporzionali. Ma, in questo caso, le costruzioni si concatenano con molta eleganza come segue.

Siano (Tav. XXIII, fig. 11) $RM = m$ e $RN = n$: si faccia un angolo qualunque RNS, si conduca MT parallela ad NS, si prenda $NA = a$, e si tiri RA che taglierà MT in F. Si avrà

$$RN : RM :: NA : MF,$$

ossia

$$n : m :: a : MF, \quad \text{donde } MF = \frac{am}{n}.$$

Si conduca FF' parallela ad RN , e si prenda $F'B = b$.

Si avrà
$$NB = MF + F'B = \frac{am}{n} + b;$$

dunque se si tira RB , che incontri MT in G , si dedurrà

$$RN : RM :: NB : MG,$$

ovvero
$$n : m :: \frac{am}{n} + b : MG,$$

donde
$$MG = \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n}.$$

Finalmente sia pure GG' parallela ad RN , e si prenda $G'C = c$.

Si avrà $NC = MG + G'C = \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n} + c$, e per conseguenza, dopo aver condot-

to RC , che taglierà MT in H , si otterrà

$$n : m :: \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n} + c : MH,$$

donde
$$MH = \frac{am^2}{n^2} + \frac{bm}{n} + \frac{cm}{n};$$

dunque
$$MH = x.$$

32. Sia adesso

$$x = \frac{abc - d^3}{mn + p^2}.$$

Osservando che la linea d trovasi ripetuta in questa espressione più volte delle altre, si faccia $abc = d^2q$, $mn = dr$, $p^2 = ds$, e si avrà

$$x = \frac{d^2q - d^3}{dr + ds} = \frac{d(q - d)}{r + s}.$$

Si otterrà perciò x costruendo una quarta proporzionale alle tre linee $r + s$, $q - d$, e d . Quanto alle linee incognite q , r , s , esse sono determinate dalle equazioni stabilite di sopra, che danno

$$q = \frac{abc}{d^2}, \quad r = \frac{mn}{d}, \quad s = \frac{p^2}{d},$$

monomj simili a quelli dei precedenti esempj.

Da quanto abbiamo esposto si vede che tutto l'artificio del metodo consiste nel trasformare il numeratore e il denominatore in prodotti di fattori del primo grado.

33. Sia finalmente

$$x = \frac{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}{a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc}.$$

L'abitudine del calcolo suggerisce alcune volte delle felici decomposizioni, e ciò appunto accade in questo esempio.

Infatti osservando con attenzione questa espressione si riconosce che può cambiarsi nella seguente :

$$x = \frac{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(a-b-c)}{(a+b)(a+c)(b+c)},$$

la quale è facile a costruirsi, poichè non contiene che prodotti di linee cognite.

Passiamo adesso alle espressioni, le quali contengono radicali del secondo grado.

34. La formula $x = \sqrt{ab}$ esprime una *media proporzionale* fra a e b ; poichè essa diviene

$$x^2 = ab, \text{ donde } a : x :: x : b.$$

Una media proporzionale può costruirsi in due maniere.

1°. Sopra una linea indefinita AD (Tav. XXIII, fig. 12) prendiamo $AB = a$, $BD = b$, quindi sopra $AD = a+b$, presa per diametro, descriviamo una semicirconfenza ACD, ed eleviamo la perpendicolare BC. Questa perpendicolare è, per una proprietà del circolo, media proporzionale fra i due segmenti AB e BD del diametro (Vedi CIRCULO). Abbiamo dunque

$$AB : BC :: BC : BD,$$

ossia

$$a : BC :: BC : b.$$

Dunque

$$BC^2 = ab, \text{ e } BC = \sqrt{ab} = x.$$

2°. Sopra una linea $AD = a$ descriviamo una semicirconfenza; prendiamo $AB = b$, e dal punto B eleviamo la perpendicolare BC; tiriamo quindi la corda AC, e questa sarà eguale ad x . Infatti, da una proprietà conosciuta del circolo si ricava

$$AB : AC :: AC : AD,$$

ossia

$$b : AC :: AC : a.$$

Dunque

$$AC^2 = ab, \text{ e } AC = \sqrt{ab} = x.$$

35. L'espressione $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ rappresenta l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui i lati dell'angolo retto sono a e b (Vedi RETTANGOLO). Basta dunque, per costruirla, fare un angolo retto BAC (Tav. XXV, fig. 3), prendere $AB = a$, $AC = b$, e tirare BC; poichè si ha

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = x.$$

36. Finalmente la formula $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ rappresenta uno dei lati dell'angolo retto di un triangolo rettangolo, di cui a è l'ipotenusa e b l'altro lato. Possiamo costruirla in tre maniere.

1°. Si faccia un angolo retto YAX, si prenda $AC = b$, e dal punto C come centro, con un raggio $BC = a$, si descriva un arco di circolo che tagli AX in un punto B; AB sarà eguale ad x , poichè si ha

$$AB^2 = BC^2 - AC^2 = a^2 - b^2, \text{ ossia } AB = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

2°. Sopra $AD = a$ (Tav. XXIII, fig. 12), come diametro, descriviamo la semi-

circonferenza ACD, e prendiamo la corda $AC=b$; conduciamo CD, ed avremo $CD=x$; il che è evidente, poichè il triangolo ACD è rettangolo in C.

3º. L'espressione $\sqrt{a^2-b^2}$ può ancora mettersi sotto la forma $\sqrt{(a+b)(a-b)}$, ed allora rappresenterà una media proporzionale fra $a+b$ e $a-b$, che si costruirà per mezzo dei processi del nº. 34, dopo avere determinato le rette $a+b$ e $a-b$.

37. Consideriamo adesso un valore complicato qualunque, per esempio,

$$x = \frac{ac}{b} + \sqrt{\frac{a^2b^2 - abc^2 + c^4}{ac + b^2}}.$$

Si trasformi in primo luogo la quantità che è sotto il radicale in una frazione di cui il numeratore e il denominatore siano prodotti di linee, come al nº. 33. Si faccia perciò $a^2b^2=c^2m$, $abc^2=c^2n$, $b^2=cp$, ed allora avremo

$$x = \frac{ac}{b} + \sqrt{\frac{c^2(m-n+c)}{c(a+p)}} = \frac{ac}{b} + \sqrt{\frac{c^2(m-n+c)}{a+p}}.$$

Si cerchino, per mezzo di quarte proporzionali, due linee q e q' eguali ad $\frac{ac}{b}$ ed

a $\frac{c(m-n+c)}{a+p}$; si avrà $x = q + \sqrt{cq'}$. Infine essendo v una media proporzionale fra c e q' , si troverà $x = q + v$, e non si dovrà fare altro che sommare le due linee q e v .

Quanto alle linee rappresentate da m , n , p , si trovano per mezzo di quarte proporzionali: poichè abbiamo

$$m = \frac{a^2b^2}{c^2}, \quad n = \frac{ab}{c}, \quad p = \frac{b^2}{c}.$$

38. Le costruzioni non presenterebbero maggiori difficoltà, se i radicali avessero per indice una potenza di 2. Per esempio, sia

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^7 - 3a^4b^3 + b^7}{a^3 + b^3}};$$

si trasformerà facilmente la quantità sotto il radicale in un prodotto di quattro fattori semplici. A tale oggetto si faccia $b^3=a^2m$, $b^7=a^2n$, ed avremo

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^4(a-3m+n)}{a^2(a+m)}} = \sqrt[4]{\frac{a^4(a-3m+n)}{a+m}}.$$

Si rappresenti con p la quarta proporzionale eguale ad $\frac{a(a-3m+n)}{a+m}$, e con s la media proporzionale eguale a $\sqrt{up}$, e si avrà

$$x = \sqrt[4]{a^2p} = \sqrt{\sqrt{a^2p}} = \sqrt{a\sqrt{ap}} = \sqrt{as}.$$

Ciò fatto, non si tratterà che di trovare una media proporzionale fra a ed s .

39. Le equazioni del secondo grado si riducono alla forma $x^2+ax=q$. Se a

ed x sono linee, l'omogeneità esige che q , astrazione fatta dal suo segno, rappresenti una superficie, o un prodotto di due linee. Sia b^2 il quadrato equivalente, facciamo nell'equazione tutte le combinazioni che possono dare i segni dei suoi termini, e si avranno le quattro seguenti:

$$x^2 - ax = -b^2 \dots (1) \quad x^2 + ax = -b^2 \dots (2)$$

$$x^2 - ax = +b^2 \dots (3) \quad x^2 + ax = +b^2 \dots (4)$$

Ritrovando da queste equazioni i valori di x , non si avrebbero che radicali del secondo grado; ma quello che bisogna bene osservare si è che non è necessario di risolverle per costruirne le radici.

La prima equazione $x^2 - ax = -b^2$, essendo messa sotto la forma

$$x(a-x) = b^2,$$

prova che x ed $a-x$ sono due linee, la di cui somma è eguale ad una lunghezza data a , e il di cui rettangolo è eguale ad un quadrato b^2 . Si descriverà dunque un semicircolo sopra un diametro AB eguale ad a (Tav. XXV, fig. 5); perpendicolarmente ad AB , si eleverà $BC = b$; quindi parallelamente ad AB si condurrà la linea CF che taglierà la semicirconferenza in D ; finalmente si abbasserà DE perpendicolare sopra AB . I segmenti BE ed AE saranno i valori dell'incognita. Infatti sia x uno dei segmenti, l'altro sarà $a-x$. Ora si ha $BE \times AE = DE^2$; dunque $x(a-x) = b^2$, che era l'equazione da risolversi.

Se $BC = \frac{1}{2}AB$, o $b^2 = \frac{1}{4}a^2$, la linea CF diviene tangente, e i due segmenti,

AE , BE , sono eguali ad $\frac{1}{2}a$: questo caso corrisponde a quello in cui le radici dell'

equazione sono eguali. Ma se BC supera $\frac{1}{2}AB$, la linea CF cessa d'incontrare

il circolo, circostanza che corrisponde al caso delle radici immaginarie.

L'equazione (2), $x^2 + ax = -b^2$, non ha radici positive. Cangiandovi x in $-x$, essa diviene $x^2 - ax = -b^2$, equazione simile alla prima, dunque dopo aver trovato le radici di questa, sarà necessario dar loro il segno $-$.

Prendiamo adesso l'equazione (3), e scriviamola come segue:

$$x(x-a) = b^2.$$

Sotto questa forma, si vede che x ed $x-a$ sono due linee, la di cui differenza è eguale ad a , e il di cui rettangolo è eguale a b^2 . Per trovarle, si descriva un circolo sopra il diametro $AB = a$ (Tav. XXIV, fig. 9), si conduca la tangente $BC = b$, e si tiri la secante CDE pel punto C e pel centro. I valori di x saranno $x = CE$, $x = -CD$: poichè mettendo ciascuno di essi nell'equazione $x(x-a) = b^2$, si giunge all'eguaglianza

$$CD \times CE = BC^2,$$

la quale è dimostrata in geometria.

L'equazione (4) ha per radici quelle dell'equazione (3), prese con segni contrarii; per conseguenza i valori di x sono $x = CD$, $x = -CE$.

Tutte le espressioni algebriche le più complicate, le quali non oltrepassano il secondo grado, o che sono riducibili al secondo grado, possono costruirsi per mezzo di quelle che precedono. Frattanto passiamo a fare uso di queste costruzioni

nella soluzione di alcuni quesiti geometrici, i quali renderanno più chiara la loro applicazione e la loro utilità.

40. PROBLEMA I. *Determinare il valore del lato di un quadrato inscritto in un triangolo dato.*

Sia ABC il triangolo dato (Tav. XXV, fig. 6). Supponiamo che il quadrato sia inscritto, e che EG ne sia il lato. Abbassiamo la perpendicolare CD, ed indichiamo AB con a , CD con h , ed EG con x . Avremo $GH = FH = EF = EG = ID = x$, e per conseguenza $CI = CD - ID = h - x$. Ciò posto, i triangoli simili ABC, CEF danno la proporzione

$$AB : CD :: EF : CI,$$

ovvero

$$a : h :: x : h - x :$$

da essa si ricava $a(h - x) = hx$, o $ah = x(a + h)$, ed infine

$$x = \frac{ah}{a + h}.$$

Questa espressione darà il valore numerico del lato del quadrato inscritto conoscendo la base e l'altezza del triangolo dato.

Per costruirlo geometricamente, o per trovare una retta eguale ad un lato del quadrato inscritto in un triangolo, si cercherà una quarta proporzionale alle tre linee $a + h$, a ed h col metodo del numero 29.

Ma per fare immediatamente uso dell'altezza h , ci serviremo dell'angolo CDB. Prolungando dunque AB, porteremo AB da D in P, e CD da P in Q. Uniremo i punti C e Q con una retta, e pel punto P condurremo PI parallela a CQ. La quarta proporzionale cercata, o il lato del quadrato, sarà ID. Dobbiamo qui fare osservare che le costruzioni geometriche sono tanto più eleganti, quanto minore è il numero delle linee ausiliari delle quali si fa uso.

41. PROBLEMA II. *Dato un triangolo qualunque, cangiarlo in un triangolo equilatero equivalente.*

Sia ABC (Tav. XXV, fig. 4) il triangolo dato, la sua base $AC = m$, la sua altezza $BD = n$; abbiamo trovato nel problema V n.º 6, che la superficie di un triangolo qualunque è

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

in cui a, b, c rappresentano i lati di un triangolo, ed in cui si ha $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Ma la condizione necessaria acciocchè nel nostro caso il nuovo triangolo sia equilatero è $a = b = c$; dunque introducendo questa condizione nel secondo membro

della nostra formula, ed osservando che il primo è eguale ad $\frac{mn}{2}$, si ha

$$\frac{mn}{2} = \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}},$$

cioè

$$\frac{mn}{2} = \sqrt{\frac{3a^4}{16}} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3},$$

dalla quale si ricava per il lato del triangolo equilatero cercato

$$a = \sqrt{\frac{2mn}{\sqrt{3}}}.$$

Per costruire il valore rappresentato da questa espressione, si prenderà sopra la perpendicolare BD, una lunghezza DF = 1, e fatto centro in F, e con un raggio FG = 2, si segnerà un punto G sopra il lato AC, prolungato se è necessario; quindi si unirà il punto F col punto G, e si avrà

$$DG = \sqrt{FG^2 - FD^2} = \sqrt{3}.$$

Ciò fatto, si prolungherà la base AC indefinitamente, se ne prenderà una porzione DM = 2m, e dal punto M si condurrà una parallela MN ad FG: i triangoli simili DFG, DMN daranno

$$DG : DM :: DF : DN,$$

donde

$$DN = \frac{DM \cdot DF}{DG} = \frac{2m}{\sqrt{3}},$$

e perciò

$$a = \sqrt{DN \cdot n} = \sqrt{DN \cdot BD}.$$

Non rimano ora che cercare una media proporzionale fra BD, e DN, la quale sarà il lato del triangolo equilatero domandato. A tale oggetto, sopra BD come diametro, si descriva una semicirconfenza, dal punto N si alzi l'ordinata NP, e si unisca D con P: DP sarà il lato del triangolo equilatero equivalente al triangolo dato; infatti dalla geometria abbiamo

$$DB : DP :: DP : DN;$$

dunque

$$DP = \sqrt{BD \cdot DN} = \sqrt{\frac{2mn}{\sqrt{3}}} = a.$$

42. PROBLEMA III. Conoscendo i raggi dei cerchi inscritto e circoscritto ad un triangolo, come pure la sua altezza, determinare questo triangolo.

Siano x, y, z , i tre lati incogniti del triangolo; h la sua altezza data; p la metà del suo perimetro; r ed R i raggi dei cerchi inscritto e circoscritto; e finalmente s l'area del triangolo proposto.

Avremo per i n.° 6 e 7 le quattro seguenti equazioni

$$R = \frac{xyz}{4s} \dots (1), \quad r = \frac{2s}{x+y+z} \dots (2),$$

$$s = \frac{xh}{2} \dots (3), \quad s = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} \dots (4),$$

dalle quali facilmente si dedurrà l'espressione della base x , col seguente sistema di eliminazione.

Se s' introduce nelle equazioni (1), (2), (4), in luogo di s , il suo valore dato dall'equazione (3), avremo

$$2hR = yz \dots (1'),$$

$$\frac{x+y+z}{2} = \frac{xh}{2r} = p \dots (2'),$$

$$\frac{xh}{2} = \sqrt{\frac{xh}{2r} \left(\frac{xh}{2r} - x \right) \left(\frac{xh}{2r} - y \right) \left(\frac{xh}{2r} - z \right)} \dots (4')$$

Elevando quest' ultima equazione a quadrato, si otterrà, dopo aver diviso tutto per x^2h e tolto i denominatori,

$$4r^4h = (h-2r)(xh-2yr)(xh-2zr);$$

sviluppando il secondo membro, sostituendo a yz il suo valore (1') e dividendo per h , si avrà

$$4r^4 = x^2h^2 - 2xhr(x+y+z) + 4xr^2(y+z) + 8hr^2R - 16r^3R;$$

sostituendo inoltre a $(x+y+z)$ e $(y+z)$ i loro valori dedotti dall' equazione (2'), otterremo un' equazione dalla quale si otterrà

$$x = \frac{2r\sqrt{2hR-4rR-r^2}}{h-2r}.$$

Passiamo adesso alla costruzione di questo valore.

Sopra il diametro AE del circolo circoscritto (Tav. XXV, fig. 2) si prenderà la parte $AH = h - 2r$; quindi, dopo avere elevato sopra questo diametro la perpendicolare HK, si descriverà sopra AK come nuovo diametro la semicirconferenza AHFK; in seguito si condurrà dal punto K la corda $KF = r$; ed infine si tirerà la retta indefinita AFG; ciò fatto, per mezzo di teoremi conosciuti della geometria elementare, avremo

$$HK = \sqrt{AH \cdot HE} = \sqrt{(h-2r)(2R+2r-h)},$$

$$AK = \sqrt{HK^2 + AH^2} = \sqrt{(h-2r)(2R+2r-h) + (h-2r)^2} = \sqrt{2hR-4rR-r^2},$$

$$AF = \sqrt{AK^2 - KF^2} = \sqrt{2hR-4rR-r^2};$$

se dunque si prende $AM = 2r$, e si conduce MG parallela alla corda FH, si otterrà la proporzione

$$AH : AM :: AF : AG,$$

donde

$$AG = \frac{2r\sqrt{2hR-4rR-r^2}}{h-2r}.$$

Segue da ciò che inscrivendo nel circolo ACB una corda $AB = AG$, la sua parallela FC, condotta ad una distanza $BP = h$, taglierà la circonferenza ACB in due punti C, C', ognuno dei quali potrà esser preso a piacere pel vertice del triangolo.

43. PROBLEMA IV. Essendo date tre parallele FG, HI, KL (Tav. XXIV, fig. 10), trovare i lati di un triangolo i di cui angoli siano dati, e i di cui vertici debbano essere situati sopra queste parallele.

Sia ABC il triangolo domandato: per ipotesi, gli angoli A, B, C sono dati; ma i lati sono incogniti. Sia $BC = x$, $AC = y$, $AB = z$; si abbassi sopra KL la perpendicolare AE, che taglia HI in D, e si faccia $AD = a$, $AE = b$.

Ciò posto, i triangoli rettangoli ABD, ACE danno

$$\cos BAD = \frac{a}{z}, \quad \cos CAE = \frac{b}{y};$$

e quindi si ha

$$\sin BAD = \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{z}, \quad \sin CAE = \frac{\sqrt{y^2 - b^2}}{y}.$$

Ma $\angle CAE + \angle BAD$ è eguale all'angolo A ; dunque $\cos(\angle CAE + \angle BAD) = \cos A$, ovvero, sviluppando,

$$\cos A = \cos CAE \cos BAD - \sin CAE \sin BAD.$$

Sostituendo in luogo dei seni e coseni i loro valori, facendo sparire i radicali, ed effettuando le altre riduzioni, avremo per prima equazione

$$y^2 x^2 \sin^2 A - a^2 y^2 - b^2 x^2 + 2ab y x \cos A = 0. \dots (1).$$

Ma in qualunque triangolo i lati stanno tra loro come i seni degli angoli opposti; dunque nel triangolo ABC si ha

$$y : x :: \sin B : \sin A, \quad \text{dove } y = \frac{x \sin B}{\sin A},$$

$$x : z :: \sin C : \sin A, \quad \text{dove } z = \frac{x \sin C}{\sin A}.$$

Mettendo questi valori nell'equazione (1), si avrà, dopo tutte le riduzioni, e dopo aver diviso per x^2 ,

$$x^2 = \frac{a^2}{\sin^2 C} + \frac{b^2}{\sin^2 B} - \frac{2ab \cos A}{\sin C \sin B}.$$

È facile adesso avere il valore di x , e quindi i valori di y e di z per mezzo delle precedenti relazioni. Il problema proposto è dunque risoluto.

Il valore di x è facile a costruirsi. FG , HI , KL , essendo le parallele date, si facciano gli angoli RBH , RCL rispettivamente eguali agli angoli dati C , e B ; quindi si uniscano i punti B , C : la retta BC sarà il lato cercato, indicato da x . Per convincersene, si abbassi la perpendicolare RD/E' , e i triangoli rettangoli RBD' , RCE' daranno

$$RB = \frac{a}{\sin C}, \quad RC = \frac{b}{\sin B}.$$

Adesso se si prolunga RB , si avrà l'angolo $ROC = RBH = C$: ora l'angolo RCO è fatto eguale a B ; dunque CRO , terzo angolo del triangolo RCO , è eguale all'angolo A ; quindi dal triangolo RBC si ha

$$\overline{BC}^2 = \overline{RB}^2 + \overline{RC}^2 - 2RB.RC.\cos A,$$

e ponendo in luogo di RB e di RC i loro valori

$$\overline{BC}^2 = \frac{a^2}{\sin^2 C} + \frac{b^2}{\sin^2 B} - \frac{2ab \cos A}{\sin C \sin B}.$$

Questa espressione è la stessa di quella di x^2 ; dunque BC è il lato cercato, situato come deve esserlo, fra le parallele date HI , KL .

Per terminare il triangolo domandato, si farà passare per i punti R , B , C , una circonferenza che taglierà la linea FG in un secondo punto A , poi si condurranno le rette AB , AC ; ed ABC sarà il triangolo domandato.

Se si vuole dimostrare questa costruzione *a posteriori*, si osserverà che le proprietà delle secanti parallele danno l'arco ASC eguale all'arco RBT ; dunque l'angolo ABC , inscritto nel primo arco, è eguale all'angolo RCO , inscritto nel secondo. Ma per costruzione, l'angolo RCO è eguale a B ; dunque ancora l'angolo $ABC = B$. Il triangolo ABC avendo due angoli, CAB ed ABC , eguali ad A e B , il terzo è necessariamente eguale a C .

Si possono fare le stesse costruzioni dall'altra parte del punto B, descrivendo un secondo triangolo A'BC', che non differirà dal primo che per la situazione. È d'altronde evidente che ciascun punto della parallela HI può servire a determinare due triangoli eguali a quelli già costruiti, ed atti anch'essi a risolvere il problema.

44. PROBLEMA V. Essendo dato un quadrato OCMN (Tav. XXV, fig. 1), condurre dal vertice M una retta tale, che la distanza compresa sopra questa retta, fra le linee AA', e BB', che formano l'angolo O opposto al vertice M, sia eguale ad una lunghezza data m.

Diverse soluzioni analitiche di questo problema sono state date ai n°. 14, 15, e 18: quella però che abbiamo ottenuta al n°. 18, prendendo per incognita la lunghezza NR, è la più elegante, e si costruisce con molta semplicità.

Infatti la formula che si trovò al citato numero è

$$x = \pm \sqrt{a^2 + m^2},$$

in cui a è eguale al lato del quadrato, ed m alla lunghezza della linea cercata. Eccone la costruzione.

Perpendicolarmente ad MN, si prenda $MT = m$, e si tiri NT: si avrà $NT = \sqrt{a^2 + m^2}$. Bisogna dunque portare NT da N in R, e in R', sopra MN prolungata, quindi descrivere, sopra MR ed MR', due semicirconferenze le quali incontreranno la linea AA' nei punti P, P', P'', P''', ed allora si otterranno le soluzioni del problema conducendo le quattro rette MQP, MP'Q', P''MQ'', P'''MQ'''. Le intersezioni P'' e P''' spariscono quando si ha $MR' < 2MC$, vale a dire $\sqrt{a^2 + m^2} - a < 2a$. Da ciò si deduce facilmente $m < 2a\sqrt{2}$, ovvero $m < 2OM$, osservando che la diagonale $OM = a\sqrt{2}$. Dunque la più piccola linea che si possa condurre per il punto M, nell'angolo AOB, è eguale al doppio della distanza OM.

Questa costruzione si conosceva da Pappo geometra di Alessandria, che viveva verso l'anno 400 dell'era cristiana.

45. I problemi dei quali ci siamo fino ad ora occupati erano determinati, cioè suscettibili di un numero limitato di soluzioni, perciò dopo averli posti in equazione ed aver risolta l'equazione, non abbiamo fatto altro che costruire geometricamente il valore o i valori dell'incognita con aiuti dei metodi di sopra esposti: ma può succedere che in un quesito di geometria, in cui sia proposto di trovare un punto, la condizione data dall'enunciato convenga a tutti i punti di una medesima linea; il problema in questo caso è indeterminato, e l'Algebra deve far conoscere questa stessa linea. Per esempio, si domanda un punto tale, che prendendolo per vertice di un triangolo di una base data, la somma dei quadrati dei lati di questo triangolo sia eguale al quadrato della base. È evidente che tutti i punti della circonferenza descritta sopra la base, come diametro, godono della proprietà enunziata.

Se si vuole applicare il calcolo a questo problema semplicissimo, si supponrà che dal punto cercato M (Tav. XXV, fig. 7), si abbassi una perpendicolare MP sopra la base data: le distanze AP ed MP saranno due incognite che bisogna conoscere perchè il punto M sia determinato. Si farà $AP = x$, $MP = y$, $AB = a$; e i triangoli rettangoli AMP, BMP daranno

$$\overline{AM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{AP}^2 = y^2 + x^2,$$

$$\overline{BM}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PB}^2 = y^2 + (a - x)^2.$$

Ma l'enunciato non dà che la sola condizione $\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 = \overline{AB}^2$, dunque si

metteranno in luogo delle linee i loro valori, ed avremo per determinare x e y l'unica equazione

$$y^2 + x^2 + y^2 + (0 - x)^2 = 0^2,$$

o, riducendo e trasportando,

$$y^2 = 0x - x^2.$$

Questa equazione non rancia, qualunque posizione si supponga al punto M , tanto al di sopra, quanto al di sotto di AB . Siccome essa contiene due incognite, si può dare ad una di esse, ad x , per esempio, un valore arbitrario AP ; l'altra incognita y si calcolerà mediante l'equazione, e si conoscerà l'altezza MP , corrispondente alla distanza AP . Facendo passare x per tutti gli stati di grandezza, si troveranno tutti i punti della circonferenza che risolvono il problema. Si osservi frattanto che y ha due valori, $y = \pm \sqrt{0x - x^2}$, e che si può stabilire come convenzione, che il valore negativo venga portato al di sotto di AB in M' .

Senza entrare in maggiori particolarità, ciò che precede basta per far conoscere, come accada che i problemi indeterminati conducano alla ricerca di certe linee, tutti i punti delle quali godono di una medesima proprietà, che l'enunciato fa conoscere. Le linee considerate in tal modo, vale a dire come composte di punti che hanno una proprietà comune, sono indicate sotto il nome di *luoghi geometrici*.

Ora questi luoghi geometrici possono essere di più ordini: si chiamano di *primo ordine* quelli nei quali le quantità variabili entrano nell'equazione al primo grado, di *secondo*, di *terzo* ec., quelli in cui le potenze delle variabili sono del secondo, del terzo grado, ec. I luoghi del *primo ordine* si costruiscono per mezzo della linea retta, quelli del *secondo ordine* si costruiscono per mezzo delle sezioni coniche, e i luoghi degli ordini superiori al secondo per mezzo delle curve superiori.

46. Dicemmo di sopra che tutte le relazioni che esistono fra le quantità si esprimono con *rapporti*, o con *equazioni*.

Perciò, quando si considerano le diverse specie di estensione come altrettante quantità diverse, le loro relazioni devono egualmente esprimersi con *rapporti*, o con *equazioni*. Abbiamo fatto vedere come la costruzione dei rapporti conduce alla soluzione delle questioni geometriche: ed è facile prevedere che la costruzione delle *equazioni*, di cui quella dei *rapporti* non è che un caso particolare, deve abbracciare tutte le proprietà dell'estensione.

Ora le relazioni dell'estensione, prese nella loro più grande generalità, non sono che relazioni di linee rette o curve descritte sopra uno stesso piano, o condotte nello spazio; infatti solamente per mezzo di linee si forma qualunque estensione lineare, piana o solida.

Per studiare queste relazioni, è necessario dunque prima di tutto determinare la situazione arbitraria delle linee sia sopra un piano indefinito, sia nello spazio assoluto, riportandole a qualche cosa di fisso e d'invariabile che permetta di seguirne con esattezza tutte le circostanze. Da ciò risultano due suddivisioni per questa parte della geometria generale, corrispondenti al piano indefinito, e allo spazio assoluto, nei quali si tratta di considerare le relazioni delle linee.

La prima è ciò che presentemente chiamasi GEOMETRIA ANALITICA A DUE DIMENSIONI; la seconda, GEOMETRIA ANALITICA A TRE DIMENSIONI. Avanti di esporre le loro leggi fondamentali, dobbiamo ancora fare osservare che il termine *analitico*, derivato da quello d'*analisi* dato all'algebra, non esprime esattamente la natura di questi rami della geometria, poichè il metodo analitico non vi è niente affatto esclusivamente impiegato. Se la parola *algoritmo* venisse adot-

tata dai geometri, tutte le parti che compongono l'applicazione dell'algebra alla geometria dovrebbero essere riunite sotto il titolo generale di *Geometria Algebrica*.

47. Essendo date sopra un piano due rette indefinite, perpendicolari l'una sopra l'altra, la posizione di un punto qualunque preso sopra questo piano sarà interamente determinata quando si conoscerà la sua distanza da ciascuna di queste rette. Infatti, siano XX', YY' (Tav. XXV, fig. 10) due rette rettangolari; a , la distanza da un punto o alla retta YY' ; e b la distanza da questo medesimo punto alla retta XX' . È evidente che prendendo $Ax=a$, e conducendo per il punto x , zo parallela a YY' , tutti i punti di questa parallela si troveranno ad una distanza a da YY' , e il punto o sarà necessariamente uno di questi punti; egualmente, prendendo $Ay=b$, e per il punto y conducendo yo parallela a XX' , tutti i punti di questa parallela si troveranno ad una distanza b da XX' , e il punto o sarà ancora uno di questi punti. Ora, il punto o dovendosi trovare nel medesimo tempo sopra le due rette yo e zo , non può evidentemente essere situato che all'intersezione di queste rette. Dunque, quando Ax e Ay , ossia a e b , sono conosciute, la posizione del punto o rimane fissata.

Tuttavia, la costruzione che abbiamo fatta potendo egualmente aver luogo in ciascuno dei quattro angoli $X'AY$, $X'AY'$, XAY , XAY' , è necessario inoltre conoscere in quale di questi quattro angoli deve trovarsi il punto o , perchè la sua situazione sia interamente determinata sopra il piano infinito delle rette XX' , YY' . Quest'ultima condizione è adempita nel modo seguente: tutte le distanze misurate sopra XX' , partendo dal punto A , si considerano come *positive* quando le loro direzioni vanno da A verso X , e come *negative* quando sono dirette da A verso X' ; in egual modo tutte le distanze misurate sopra YY' , partendo dal punto A , si considerano come *positive* quando sono dirette da A verso Y , e come *negative* quando sono dirette da A verso Y' . In questa guisa, i segni delle quantità a e b determinano sempre l'angolo nel quale il punto si trova. Se queste quantità sono tutte e due positive il punto è in o nell'angolo YAX ; se a è negativa e b positiva, il punto è in o' nell'angolo $X'AY$; se a è positiva e b negativa, il punto è in o'' nell'angolo XAY ; e finalmente se a e b sono negative, il punto è in o''' nell'angolo $X'AY'$.

Le quantità a e b si chiamano ambedue le *coordinate* del punto o . In particolare, a si chiama l'*ascissa*, e b l'*ordinata*. Le due rette XX' , YY' sono gli *assi delle coordinate*, cioè: XX' , l'*asse delle ascisse*, e YY' l'*asse delle ordinate*. Il punto d'intersezione A si chiama l'*origine delle coordinate*, o semplicemente l'*origine*. S'indica ancora, per abbreviare, XX' sotto il nome di *asse delle x*, e YY' sotto quello di *asse delle y*, perchè le ascisse generalmente vengono espresse con la lettera x , e le ordinate con la lettera y .

Le eguaglianze

$$x=a, \quad y=b$$

si chiamano le *equazioni del punto*. Queste equazioni presentano le quattro combinazioni

$$\begin{array}{cccc} x=+a & x=-a & x=-a & x=+a \\ y=+b & y=+b & y=-b & y=-b \end{array}$$

che caratterizzano, come abbiamo detto, le quattro posizioni differenti o, o', o'', o''' , che può avere il punto che esse rappresentano.

48. Quando nelle equazioni generali del punto, $x=a$, $y=b$, a è eguale a zero, l'espressione $x=0$ indica che la distanza del punto dall'asse delle y è nulla; il punto è dunque allora situato sopra quest'asse medesimo ad una distanza b dall'origine; quando al contrario b è eguale a zero, l'espressione $y=0$ indica che la

distanza del punto dall'asse delle x è nulla; il punto è dunque allora situato sopra l'asse delle x , ad una distanza a dall'origine. Finalmente, quando si ha nel medesimo tempo, $x=0$ e $y=0$, il punto è situato all'origine stessa.

49. Se in luogo di riferire la posizione di un punto a due assi rettangolari, si facesse uso di assi obliqui, formanti fra loro un angolo qualunque, è evidente che ciò non altererebbe punto le precedenti considerazioni, poichè le coordinate sono sempre parallele agli assi. È essenziale, in diversi casi importanti, di fare uso di assi obliqui; ma siccome è sempre facile passare da un sistema di assi qualunque al sistema degli assi rettangolari, e reciprocamente (*Vedi TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE*), così non considereremo in seguito che questi ultimi, quando altro non si avverta in contrario.

50. Se da tutti i punti di una linea retta o curva, condotta in una maniera qualunque nel piano di due assi rettangolari, si abbassano delle perpendicolari ai due assi, avremo, per ciascun punto, due equazioni della forma

$$x=a, \quad y=b.$$

Ora, se esiste la stessa relazione fra le coordinate di tutti questi punti, vale a dire un legame o dipendenza scambievolmente fra l'ascissa e l'ordinata che non cangi quando si passa da un punto della linea ad un altro, succede in un gran numero di casi, che questa relazione sia suscettibile di essere espressa in una maniera generale, e si possa stabilire ciò che si chiama l'*equazione della linea*. Quando dunque l'equazione di una linea sarà conosciuta, si conosceranno ancora le equazioni di ciascuno dei suoi punti, e per conseguenza tutte le circostanze del suo andamento.

Se si trattasse, per esempio, di una linea retta, come AB (*Tav. XXV, fig. 8*), la quale divide in due parti eguali l'angolo yAx delle coordinate, si osserva che, per ciascun punto di questa linea, l'ordinata è eguale all'ascissa; dunque la relazione di queste due coordinate sarà espressa dall'equazione

$$y=x.$$

Per mezzo di questa equazione si possono trovare tanti punti della retta quanti si vorranno, dando ad x dei valori particolari. Quando si daranno ad x dei valori positivi, si troveranno per y dei valori positivi, e così si determineranno i punti della retta situati nell'angolo yAx . Dando ad x dei valori negativi, y sarà negativa il che determinerà i punti situati nell'angolo $x'Ay'$. È chiaro infatti che tutti i punti del prolungamento della retta AB, nell'angolo $x'Ay'$, hanno le ascisse e le ordinate negative e sempre eguali.

51. Una linea data non può avere un'equazione che quando si conosce o la definizione, o la generazione, ovvero ancora una proprietà di questa linea. Così, non si saprebbe rappresentare per mezzo di un'equazione la linea che descrive la penna di uno che scrive, perchè ignoriamo assolutamente la legge della sua generazione; ma si avrà facilmente l'equazione del circolo partendo dalla sua definizione, cioè, che tutti i suoi punti sono egualmente lontani dal centro. Quanto al luogo di un'equazione, esso è facile a determinarsi, o almeno non vi si incontra altra difficoltà che quella di risolvere l'equazione.

52. Sia CD (*Tav. XXV, fig. 9*), una retta indefinita e situata a piacere in un piano. Si prendano in questo piano due assi AX, AY, che facciano fra loro un angolo qualunque $YAX=(y,x)$, e rapporto ai quali la retta sia situata in una maniera qualunque. Se da differenti punti $o, o', o'', \dots$ di questa retta si conducono le ordinate $ox, o'x', o''x'', \dots$ parallele all'asse delle ordinate, e se dal punto B ove la retta incontra l'asse delle y , si conduce BN parallela ad AX,

avremo dai triangoli simili $oBn, o'Bn', o''Bn'', \dots$ una serie di rapporti eguali

$$\frac{on}{Bn} = \frac{o'n'}{Bn'} = \frac{o''n''}{Bn''} = \dots,$$

ovvero

$$\frac{ox - nx}{Bn} = \frac{o'x' - n'x'}{Bn'} = \frac{o''x'' - n''x''}{Bn''} = \dots;$$

donde risulta, a motivo di $nx = n'x' = n''x'' = \dots = AB$, che la differenza fra l'ordinata di un punto qualunque della retta e l'ordinata all'origine, sta all'ascissa dello stesso punto in un rapporto costante.

Ora siano $Ax = x, ox = y$ le coordinate di uno qualunque di questi punti, $(p, x), (p, y)$ gli angoli che la retta data fa con gli assi delle x e delle y , e b la distanza AB , che altro non è che l'ordinata all'origine; avremo sempre

$$\frac{on}{Bn} = \frac{ox - nx}{Bn} = \frac{\text{sen } oBn}{\text{sen } yBo},$$

e sostituendo i valori analitici

$$\frac{y - b}{x} = \frac{\text{sen}(p, x)}{\text{sen}(p, y)} = \frac{\text{sen}(p, x)}{\text{sen}[(x, y) - (p, x)]};$$

donde

$$y = \frac{\text{sen}(p, x)}{\text{sen}(p, y)} x + b.$$

Tale è l'equazione della linea retta, poichè si otterrebbe evidentemente la medesima espressione, qualunque fosse il punto che si scegliesse sopra la retta CD .

Se l'angolo delle coordinate è retto, si ha

$$\text{sen}(p, y) = \text{sen}[90^\circ - (p, x)] = \cos(p, x);$$

e chiamando a ciò che in questo caso diviene il rapporto $\frac{\text{sen}(p, x)}{\text{sen}(p, y)}$, avremo

$$a = \frac{\text{sen}(p, x)}{\cos(p, x)} = \text{tang}(p, x)$$

e la nostra equazione si cangia in

$$y = ax + b \dots (1),$$

nella quale a rappresenta la tangente dell'angolo che la retta fa coll'asse delle x .

53. Esaminiamo prima di tutto come l'equazione generale $y = ax + b$ rappresenti tutte le circostanze della situazione di una retta nel piano degli assi XX', YY' .

In primo luogo dalla forma stessa di questa equazione possiamo facilmente riconoscere, che tutti i punti ai quali essa appartiene sono situati sopra una linea retta. Infatti dopo averla posta sotto la forma

$$\frac{y - b}{x} = a,$$

se si riguarda il punto o , come uno qualunque di quelli che soddisfanno a questa equazione, e se per il punto B , in cui $AB = b$, si conduce una parallela BN

all'asse dello x , on sarà $y=b$, Bn sarà eguale ad x ; o poichè dalla natura dell'equazione il rapporto di $y=b$ ad x è costante, avremo

$$\frac{on}{Bn} = \frac{o'n'}{Bn'}, \text{ ec.,}$$

e così successivamente per tutti i punti o , o' , ec., che verificheranno l'equazione proposta; donde segue che i triangoli Bon , $Bo'n'$, ec., sono simili, e per conseguenza tutti questi punti sono in linea retta.

Quindi, se in questa equazione si fa $x=0$, essa diviene $y=b$, e le due espressioni

$$x=0, \quad y=b$$

sono (n^o. 4⁸) le equazioni di un punto situato sopra l'asse delle y ad una distanza b dall'origine. Questo punto è quello ove la retta CD taglia l'asse YY' .

Se poi si fa $y=0$, l'equazione generale diviene $0=ax+b$, o $x=-\frac{b}{a}$, e le due equazioni

$$x=-\frac{b}{a}, \quad y=0$$

sono quelle di un punto situato sopra l'asse delle x ad una distanza $\frac{b}{a}$ dall'origine, nella direzione AX' . Questo punto è quello in cui la retta CD taglia l'asse XX' .

La posizione di CD è dunque interamente determinata dalla sua equazione, poichè non vi è che una sola retta la quale possa passare per i punti C e B .

Se la quantità b fosse negativa, e si avesse l'equazione $y=ax-b$, tenendo lo stesso metodo che abbiamo praticato di sopra per determinare la situazione della retta CD ; avremmo trovato che la retta rappresentata da questa equazione ha la situazione CD indicata dalla figura 1 della Tavola XXVI.

Similmente se a è negativa, vale a dire se si avesse l'equazione $y=-ax+b$, la retta CD avrebbe la situazione rappresentata dalla figura 2 della Tavola XXVI.

Finalmente, se a e b fossero ambedue negative, e si avesse l'equazione $y=-ax-b$, la retta CD verrebbe ad essere situata, come si vede nella figura 3 della Tavola XXVI.

54. Le quantità a e b , che entrano nell'equazione generale $y=ax+b$, devono essere considerate come quantità indeterminate, suscettibili di tutti gli stati di grandezza, ed alle quali basta attribuire i valori dipendenti dalle condizioni imposte ad una retta per ottenere l'equazione particolare di questa retta. Questi valori sono in generale: la tangente trigonometrica dell'angolo che fa la retta con l'asse delle x , tangente che abbiamo indicato con a , e l'ordinata del punto ove questa retta taglia l'asse delle y , ordinata che abbiamo indicata con b . Tutti i quesiti che si possono proporre sopra le linee rette si riducono dunque alla determinazione delle quantità a e b dell'equazione $y=ax+b$. Ma avanti di passare all'esame di questi quesiti, dobbiamo ancora esaminare le forme particolari che questa equazione può prendere in certi casi che meritano di essere osservati.

55. Se la retta dovesse passare per l'origine, la sua equazione sarebbe semplicemente

$$y=ax,$$

poichè in questo caso b che rappresenta l'ordinata all'origine è eguale a zero.

56. Se la retta fosse parallela all'asse delle x la sua equazione si semplificherebbe ancora, poichè allora l'angolo DCX essendo nullo, la sua tangente sarebbe zero, e l'equazione diverrebbe

$$y=b,$$

vale a dire che qualunque valore si volesse dare ad x si avrebbe sempre $y=b$. Ciò evidentemente esprime che la retta è parallela all'asse delle x .

57. Egualmente, un'equazione della forma $x=m$ appartiene ad una retta di cui tutti i punti sono ad una medesima distanza m dall'asse delle y . Essa rappresenta dunque una parallela a quest'asse, lontana dall'origine di questa quantità m .

58. Essendo data l'equazione di una retta $y=mx+b$ calcolare l'angolo che questa retta fa con l'asse delle x .

Siano in questo caso gli assi delle coordinate obliqui.

Si conduca, per l'origine A (Tav. XXVI, fig. 4), AD parallela alla retta dell'equazione data; la sua equazione, siccome l'ordinata all'origine è zero, sarà $y=ax$. Si conduca l'ordinata MP , e s'indichi con m l'angolo domandato ECx , e con p l'angolo yAx delle coordinate, il triangolo AMP dà

$$a = \frac{MP}{AP} = \frac{\text{sen } DAx}{\text{sen } \angle MPD};$$

ma $DAx = m$, $\angle MPD = DAy = p - m$:

dunque il valore di a diviene

$$\frac{\text{sen } m}{\text{sen } (p - m)} = a.$$

Per dedurre m da questa equazione, si toglie il denominatore, e si sostituisce in luogo di $\text{sen } (p - m)$ il suo valore

$$\text{sen } p \cos m - \text{sen } m \cos p,$$

e si ottiene

$$\text{sen } m = a \text{sen } p \cos m - a \text{sen } m \cos p,$$

ossia

$$(1 + a \cos p) \text{sen } m = a \text{sen } p \cos m;$$

e da ciò, osservando che $\text{tang } m = \frac{\text{sen } m}{\cos m}$, si ricava

$$\text{tang } m = \frac{a \text{sen } p}{1 + a \cos p}.$$

La tangente dell'angolo m essendo conosciuta, lo stesso angolo m deve riguardarsi come conosciuto.

59. Trovare l'equazione di una retta che passa per due punti dati, o e o' (Tav. XXV, fig. 9).

Siano $x=x'$ ed $y=y'$ le equazioni del punto o , ed $x=x''$, $y=y''$ le equazioni del punto o' .

Nel punto o , le coordinate della retta dovendo essere le stesse di quelle di questo punto, tale circostanza si esprime facendo, nell'equazione generale, $x=x'$ e $y=y'$, e così si ha

$$y' = ax' + b \dots (m).$$

Per la stessa ragione abbiamo per il punto (x'', y'') l'equazione

$$y'' = ax'' + b \dots (n),$$

che esprimerà che nel punto o' le coordinate della retta sono le medesime di quelle di questo punto.

Ma la retta deve passare per i due punti: così le due equazioni (m) ed (n) sussistono nel medesimo tempo, e determinano col loro concorso i valori di a e di b che fissano interamente la posizione di questa retta. Se si risolvono dunque queste equazioni, prendendo a e b per incognite, (*Vedi* EQUAZIONE) avremo

$$a = \frac{y' - y''}{x' - x''}, \quad b = \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''}.$$

Sostituendo questi valori di a e di b nell'equazione generale, essa diviene

$$y = \frac{y' - y''}{x' - x''}x + \frac{x'y'' - x''y'}{x' - x''} \dots (p).$$

Tale è dunque l'equazione della retta che passa per i due punti (x', y') e (x'', y'') . Indicheremo d'ora in avanti un punto con le sue coordinate; in tal modo quando si nominerà un punto (x', y') , intenderemo un punto le cui coordinate sono x' ed y' .

Si può dare all'equazione (p) una forma più semplice operando come segue:

Se dall'equazione generale $y = ax + b$ si sottrae $y' = ax' + b$, si avrà

$$y - y' = a(x - x') \dots (q),$$

equazione, che appartiene ad una retta, che passa per il punto (x', y') .

In quest'ultima mettiamo il valore di a , ottenuto di sopra, ed avremo

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x') \dots (r),$$

per l'equazione della retta che passa per i punti (x', y') e (x'', y'') .

Faremo osservare che nell'equazione (q) la quantità a rimane indeterminata, poichè vi è un numero infinito di rette che possono passare per il punto (x', y') , e la condizione di passare per questo punto non determina in alcuna maniera l'angolo di cui a è la tangente. Non segue lo stesso nelle equazioni (p) ed (r) , nelle quali la condizione di passare per due punti (x', y') e (x'', y'') determina interamente la situazione della retta, e quindi la tangente a .

È facile l'accorgersi che le equazioni (p) ed (r) non differiscono che nella forma; poichè con facilità, sviluppando la prima, si giunge alla seconda.

Go. Si può ancora far vedere che l'equazione (r) è tanto generale che dà pore le rette parallele all'asse delle y , qualunque siano partiti dall'equazione $y = ax + b$, la quale non conviene a queste rette.

Se $y'' = y'$, l'equazione (r) si riduce a $y = y'$: il che dimostra che allora la retta è parallela all'asse delle x . Ciò deve infatti aver luogo, poichè essa passa per le estremità di due ordinate eguali MP ed $M'P'$ (*Tav. XXVI, fig. 5*).

Se $x'' = x'$, il moltiplicatore di $x - x'$, nel secondo membro, diviene infinito: ma risolvendo l'equazione rapporto ad $x - x'$, avremo

$$x - x' = \frac{x' - x''}{y' - y''}(y - y');$$

e se adesso si suppone $x'' = x'$, verrà $x = x'$, il che prova che la retta è parallela
Dis. di Mat. Vol. I.

all'asse delle y , come appunto deve essere, poichè essa passa per le estremità di due asisse eguali, MQ e M'Q' (Tav. XXVI, fig. 6).

Se si suppone nel medesimo tempo $x''=x'$ e $y''=y'$, l'equazione (r) diviene

$$y-y'=\frac{n}{0}(x-x').$$

Il coefficiente di $x-x'$ essendo indeterminato, la retta può prendere tutte le posizioni possibili intorno al punto di cui le coordinate sono x' e y' .

Questo è infatti quello che deve aver luogo: poichè i due punti dati non ne formano più che uno solo, e per un punto si può far passare un'infinità di rette.

61. *Trovare l'equazione di una retta DO (Tav. XXVI, fig. 11), che passi per il punto Q, e che di più sia parallela ad un'altra retta IL data di posizione.*

Sia $y=ax+b$ l'equazione della retta data IL, x' ed y' le coordinate del punto Q, e $y=a'x+b'$ l'equazione cercata.

Questa equazione, dovendo esprimere la circostanza che la retta DO passa per il punto Q, le coordinate del quale sono x' , y' , dopo l'opportuna eliminazione di b' , prenderà la forma

$$y-y'=a'(x-x').$$

Ma le due linee IL e DO essendo parallele, gli angoli che esse formano con l'asse delle x sono necessariamente eguali; così le tangenti di questi angoli sono eguali, e si ha

$$a'=a.$$

L'equazione domandata è dunque

$$y-y'=a(x-x').$$

62. Se le due rette DE e DF (Tav. XXVI, fig. 12) sono perpendicolari l'una sopra l'altra, nelle due equazioni generali di queste linee,

$$y=ax+b,$$

$$y=a'x+b',$$

si avrà $a'=-\frac{1}{a}$.

Infatti, per l'origine A conduciamo due altre rette AB ed AC rispettivamente parallele alle proposte, le equazioni di queste ultime saranno

$$y=ax, \quad y=a'x \dots \dots (t).$$

Ora, se si prende AP eguale al raggio trigonometrico, e se si conduce MN perpendicolare ad AP, PM sarà la tangente dell'angolo BAx, e PN quella dell'angolo CAx; cioè si avrà

$$PM=a \quad \text{e} \quad PN=a'.$$

Ma il triangolo rettangolo MAN dà

$$PN : AP :: AP : PM,$$

ossia

$$a' : 1 :: 1 : a;$$

dunque $a'=-\frac{1}{a}$, e siccome inoltre PN è negativa, le equazioni (t) saranno

$$y=ax, \quad y=-\frac{1}{a}x;$$

e le equazioni generali proposte diverranno

$$y = ax + b,$$

$$y = -\frac{1}{a}x + b'.$$

Tali sono le equazioni di due rette perpendicolari l'una sopra l'altra.

63. *Determinare il punto d'intersezione di due rette delle quali si conoscono le equazioni.*

Siano le equazioni delle due rette,

$$y = ax + b,$$

$$y = a'x + b'.$$

Nel punto in cui queste rette si tagliano, esse hanno le medesime coordinate: e reciprocamente le coordinate di queste linee non sono eguali che nel punto in cui esse s'incontrano; dunque per questo punto, e per questo punto solamente, si ha

$$ax + b = a'x + b',$$

il che dà

$$x = \frac{b - b'}{a' - a}.$$

Ponendo questo valore in luogo di x nell'equazione di una delle rette, si trova

$$y = \frac{a'b - ab'}{a' - a}.$$

64. Quando $a' = a$, questi valori divengono infiniti; dunque allora non vi è più intersezione. Sappiamo infatti (n.º 61) che le rette sono parallele quando si ha $a' = a$.

Quando abbiamo nel medesimo tempo $a' = a$ e $b' = b$, i valori di x e di y divengono $\frac{0}{0}$, vale a dire indeterminati; dunque si deve concludere che tutti i

punti di una delle rette sono comuni all'altra. Questo è infatti ciò che succede: poichè allora le equazioni delle rette divenendo identiche, le due rette non ne formano più che una sola.

65. *Trovare la distanza di due punti dei quali si conoscono le coordinate.*

Siano M ed N (Tav. XXVI, fig. 7) i punti dei quali si tratta. Se si conducono le ordinate MP, NQ, e la parallela NR all'asse delle x , il triangolo MNR, rettangolo in R, darà

$$MN = \sqrt{NR^2 + MR^2}.$$

Siano adesso x, y , le coordinate del punto M, ed x', y' , quelle del punto N; NR sarà eguale ad $x - x'$, e MR ad $y - y'$. Se dunque d rappresenta la distanza cercata, si avrà

$$d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Ponendo successivamente i punti M ed N in tutte le posizioni in cui la costruzione del triangolo MNR può offrire qualche cambiamento nella figura, e avendo riguardo alle convenzioni stabilite sopra i segni delle coordinate, si riconoscerà che questa formula non soffre alcuna eccezione.

Per esempio, se il punto N è all'origine (Tav. XXVI, fig. 8), avremo $x'=0$, $y'=0$, e quindi

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Questa è l'espressione della distanza di un punto qualunque dall'origine delle coordinate; ed è facile convincersene, poichè il triangolo rettangolo AMP dà

$$AM = \sqrt{AP^2 + MP^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Prendiamo per secondo esempio quello in cui i punti M ed N hanno la posizione rappresentata dalla figura 9 della Tavola XXVI. Allora le ascisse di questi punti sono $-AP$ e $-AQ$; e per conseguenza $x = -AP$ e $x' = -AQ$. L'ordinata del punto M è sempre MP , ma quella del punto N è $-NQ$; dunque $y = MP$ e $y' = -NQ$. Si pongano in luogo di x, y, x', y' , questi valori nella formula generale, e si avrà

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(-AP + AQ)^2 + (MP + NQ)^2} \\ &= \sqrt{(AP - AQ)^2 + (MP + NQ)^2} \\ &= \sqrt{NR^2 + MR^2} \end{aligned}$$

risultato simile a quello che si ricava immediatamente dal triangolo rettangolo MNR.

66. Supponiamo adesso gli assi obliqui (Tav. XXVI, fig. 10), e conduciamo parallelamente la linea NR, parallela all'asse delle x e terminata alle ordinate MP, NQ. Il triangolo MNR non sarà più rettangolo, ma per una formula conosciuta in trigonometria avremo

$$MN = \sqrt{NR^2 + MR^2 - 2NR \times MR \times \cos MRN}.$$

L'angolo MRN è il supplemento dell'angolo yAx ; indicando quest'ultimo colla lettera v , e conservando le stesse denominazioni del numero precedente, si avrà

$$d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos v}.$$

Se si suppone $v = 90^\circ$, si ha $\cos v = 0$, e quindi

$$d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2};$$

che è la formula trovata di sopra nel caso degli assi rettangolari.

67. Trovare l'equazione di una retta EF (Tav. XXVI, fig. 13), che sia perpendicolare sopra un'altra retta data CD, e che passi per un punto E.

Se $y = ax + b$ è l'equazione di CD; quella di EF avrà la forma $y = -\frac{1}{a}x + b'$

(n.º 62). Ma EF dovendo passare per il punto E, se indichiamo con x', y' le coordinate di questo punto, l'equazione di EF sarà per il n.º 59.

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

68. Se si domandasse la grandezza EF della perpendicolare, bisognerebbe nell'espressione generale

$$\sqrt{(y-y')^2+(x-x')^2},$$

che si trovò al n.º 65 per la distanza di due punti (x, y) e (x', y') , sostituire i valori delle coordinate dei punti E ed F. Ora le coordinate del punto E sono x', y' ; e quanto a quelle del punto F, considerando che questo punto è comune alle due rette EF ed FD, è evidente che esse sono quelle del punto della intersezione di queste rette. Ora, avendosi per le rette EF e DF le equazioni (n.º 67)

$$y = ax + b,$$

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x'),$$

potremo col metodo del n.º 63 dedurne le coordinate del punto F. Siccome però, nell'espressione della distanza di due punti, le coordinate dei punti non entrano che per le loro differenze, perciò arriveremo più presto al risultato, cercando immediatamente le quantità $x - x'$ e $y - y'$. Per ottenerle, si darà all'equazione

$$y = ax + b$$

la forma

$$y - y' = a(x - x') - y' + ax' + b;$$

dalla quale si sottrarrà l'equazione della perpendicolare

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x');$$

e così si otterrà

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)(x - x') = y' - ax' - b.$$

Di qui si dedurrà

$$x - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2},$$

e quindi

$$y - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}.$$

Adesso se s'indica con p la distanza compresa sopra la perpendicolare, fra il punto e la retta data, e se nell'espressione di questa distanza

$$p = \sqrt{(y - y')^2 + (x - x')^2},$$

si sostituiscono in luogo di $x - x'$, e $y - y'$ i loro valori, essa diviene

$$p = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Siccome il valore di p deve essere essenzialmente positivo, si prenderà il segno superiore quando il numeratore $y' - ax' - b$ sarà positivo, e il segno inferiore quando questo numeratore sarà negativo.

Se il punto dato è situato all'origine, bisogna fare $x'=0$, e $y'=0$: allora il valore di p si riduce al seguente

$$p = \frac{\pm b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Se il punto è situato sopra la retta data, le coordinate x' , ed y' devono soddisfare all'equazione di questa retta. Si ha dunque

$$y' = ax' + b,$$

e quindi il valore di p si riduce a zero, come è evidente.

Al n°. 71 si vedrà l'espressione della distanza di due punti nel caso che gli assi siano obliqui.

69. *Essendo date le equazioni di due rette, trovare l'angolo che queste rette fanno fra loro.*

Siano le equazioni date

$$y = ax + b$$

$$y = a'x + b'.$$

È evidente che l'angolo di queste rette non cangerà facendole muovere parallelamente a se stesse fintantoché il vertice dell'angolo sia all'origine. Così, si possono considerare solamente due rette AM ed AN (Tav. XXVI, fig. 14) le di cui equazioni sono allora

$$y = ax,$$

$$y = a'x.$$

Prendiamo sopra AM un punto M le di cui coordinate siano x' , y' , e abbassiamo da questo punto MN perpendicolare sopra AN; la grandezza di questa perpendicolare sarà (n°. 68)

$$MN = \frac{y' - a'x'}{\sqrt{1+a'^2}} \dots \dots (v),$$

a motivo di $b=0$

Ma considerando AM come il raggio trigonometrico, si avrà

$$\overline{AM}^2 = 1 = x'^2 + y'^2 \dots \dots (u);$$

e siccome il punto M è sopra la linea AM, la di cui equazione è $y = ax$, si avrà ancora

$$y' = ax',$$

e quindi

$$y'^2 = a^2 x'^2 \dots \dots (z).$$

Dalle espressioni (u) e (z) si ricava

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}, \quad y' = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}};$$

dunque, sostituendo questi valori in (v), si ottiene

$$MN = \frac{a - a'}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}.$$

Ma MN è il seno dell'angolo MAN; dunque l'angolo formato dalle due rette, di cui le equazioni sono

$$y = ax + b,$$

$$y = a'x + b',$$

ha, per il seno, il valore

$$\frac{a-a'}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}.$$

Per ottenere la tangente del medesimo angolo, si partirà dall'eguaglianza (*Vedi Saso*)

$$\cos^2 n = 1 - \sin^2 n,$$

n essendo un angolo qualunque.

Si avrà perciò

$$\cos^2 MAN = 1 - \frac{(a-a')^2}{(1+a^2)(1+a'^2)}.$$

Donde si dedurrà

$$\cos MAN = \frac{1+aa'}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}},$$

e quindi

$$\frac{\sin MAN}{\cos MAN} = \tan MAN = \frac{a-a'}{1+aa'},$$

e, facendo finalmente $MAN = V$,

$$\tan V = \frac{a-a'}{1+aa'}.$$

Questa formula risolve il problema, poichè fa conoscere la tangente dell'angolo domandato.

Quando le rette sono parallele, l'angolo V è nullo, $\tan V$ deve essere pure nulla; dunque $a' = a$, come abbiamo già veduto (nº. 61).

Quando esse fanno un angolo retto, $\tan V$ deve essere infinita, e perciò è necessario che si abbia

$$aa' + 1 = 0, \quad \text{donde} \quad a' = -\frac{1}{a},$$

come si trovò al nº. 62. Se la prima retta è perpendicolare alle ascisse, a è infinita, e si trova $a' = 0$; dunque la seconda retta è parallela alle ascisse, come deve essere. Similmente, se la prima retta è parallela alle ascisse, a è nulla, e si trova $a' = \infty$, il che prova che l'altra retta è parallela alle ordinate.

70. Supponiamo adesso che gli assi delle coordinate siano obliqui, e che facciamo fra loro un angolo v . In questo caso nell'equazione della retta il coefficiente a dell'ascissa non rappresenterà più la tangente dell'angolo che la retta fa coll'asse delle ascisse; ma esprimerà unicamente il rapporto tra i seni degli angoli che la retta stessa fa cogli assi delle x e delle y , come si trovò al nº 52. Se dunque, nell'espressione di $\tan V$ di sopra trovata, si sostituiscono in luogo di a e a' i valori delle tangenti degli angoli che le rette fanno coll'asse delle x , valori che si dedurranno facilmente dalla formula $\tan m = \frac{a \sin v}{1 + a \cos v}$ dimostrata al nº. 58,

si otterrà dopo le opportune riduzioni

$$\tan V = \frac{(a-a') \sin v}{1+aa' + (1+aa') \cos v}.$$

Se si vuole esprimere che le due rette date sono perpendicolari fra loro, bisogna eguagliare il denominatore a zero, cioè che dà la condizione

$$1 + aa' + (a + a') \cos \nu = 0, \quad \text{donde} \quad a' = \frac{-1 - a \cos \nu}{a + \cos \nu}.$$

71. Siamo attualmente in grado di trovare la distanza da un punto ad una retta, ancora nel caso che gli assi delle coordinate siano obliqui, infatti allora a' non è più eguale a $-\frac{1}{a}$, condizione necessaria perchè le rette siano perpendicolari fra loro nel caso degli assi rettangolari, ma invece, chiamando ν l'angolo delle coordinate, per quello che abbiamo detto di sopra si ha $a' = \frac{-1 - a \cos \nu}{a + \cos \nu}$, e l'equazione della perpendicolare è

$$y - y' = \frac{-1 - a \cos \nu}{a + \cos \nu} (x - x').$$

Combinando questa equazione con quella della retta data $y = ax + b$, messa sotto la forma

$$y - y' = a(x - x') + b + ax' - y',$$

si trova

$$x - x' = \frac{(a + \cos \nu)(y' - ax' - b)}{1 + a^2 + 2a \cos \nu},$$

e quindi

$$y - y' = \frac{-(1 + a \cos \nu)(y' - ax' - b)}{1 + a^2 + 2a \cos \nu};$$

e, per avere la lunghezza p della perpendicolare, bisogna prendere la formula

$$d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y') \cos \nu},$$

trovata al n°. 66, e sostituirvi i valori di $x - x'$, e di $y - y'$. Dopo tutte le riduzioni, si otterrà

$$p = \frac{(y' - ax' - b) \sin \nu}{\sqrt{1 + a^2 + 2a \cos \nu}}.$$

O che gli assi siano rettangolari o che siano obliqui, l'espressione generale della perpendicolare p è sempre del primo grado rapporto alle coordinate, x' ed y' , del punto donde essa è abbassata. Questa osservazione può qualche volta essere utile.

Passiamo ad applicare ciò che precede alla soluzione di alcuni problemi geometrici.

72. PROBLEMA I. Due rette CA e CB (Tav. XXVI, fig. 15) essendo date di posizione con gli angoli che esse formano con una terza retta AB = p , trovare sopra una quarta retta AY, perpendicolare ad AB, un punto G, tale che conducendo GK parallela ad AB, la parte HK intercetta fra le rette AC e CB sia eguale ad una linea data m .

Siano a ed a' le tangenti degli angoli CAB e CBA.

Prendiamo il punto A per l'origine delle coordinate: l'equazione di AC sarà

$$y = ax;$$

e quella di CB sarà

$$y = -a'(x-p),$$

perchè deve passare per il punto B, di cui le coordinate sono $x=p$ ed $y=0$, e perchè essendo a' la tangente dell'angolo CBA, sarà $-a'$ la tangente dell'angolo CBX supplemento di CBA.

Ora per trovare i punti H e K, in cui le rette AC e CB incontrano GK, basta che nelle equazioni di queste rette si faccia $y=AG$, o $y=z$, indicando con z l'incognita AG. Queste equazioni diverranno

$$z = ax,$$

$$z = -a'(x-p).$$

La prima dà

$$x = \frac{z}{a},$$

e la seconda,

$$x = \frac{pa' - z}{a'}.$$

Questi valori sono quelli delle ascisse Ah ed Ak, di cui la differenza $Ak-Ah$ è hk o $HK=m$, linea data. Si ha dunque

$$m = \frac{pa' - z}{a'} - \frac{z}{a},$$

equazione nella quale tutto è conosciuto, eccettuata z , per la quale si trova il valore

$$z = \frac{(p-m)a'}{a+a'}.$$

Se in luogo di dare a HK un valore determinato m , si fosse domandato di avere $HK=AG$, il che equivale a trovare il lato del quadrato inscritto in un triangolo, avremmo fatto

$$\frac{pa' - z}{a'} - \frac{z}{a} = z;$$

ed avremmo avuto

$$z = \frac{pa'}{aa' + a + a'}.$$

73. PROBLEMA II. *Essendo date tre linee che si tagliano due a due, trovare gli angoli che esse fanno fra loro, come pure la superficie del triangolo del quale esse sono i lati.*

Siano AB, BC, AC le rette date (Tav. XXVII. fig. 1). Supponiamo il vertice di uno degli angoli situato all'origine delle coordinate, e facciamo

$$\begin{aligned} Ap &= m, & Bp &= n, \\ Aq &= m', & Cq &= n'; \end{aligned}$$

l'equazione di AB sarà

$$y = \frac{n}{m}x,$$

quella di AC

$$y = \frac{n'}{m'} x,$$

e quella di BC

$$y - n = \frac{n - n'}{m - m'} (x - m).$$

Le distanze comprese fra i punti A e B, A e C, B e C, ovvero i lati AB, AC, BC del triangolo, saranno

$$AB = \sqrt{m^2 + n^2},$$

$$AC = \sqrt{m'^2 + n'^2},$$

$$BC = \sqrt{(m - m')^2 + (n - n')^2}.$$

Se si fa $AE = a$, $AC = b$, $BC = c$, avremo

$$a^2 = m^2 + n^2$$

$$b^2 = m'^2 + n'^2$$

$$c^2 = (m - m')^2 + (n - n')^2 = m^2 + m'^2 - 2mm' + n^2 + n'^2 - 2nn',$$

e quindi

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2(mm' + nn'),$$

ossia

$$mm' + nn' = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Ora, il coseno dell'angolo BAC è per il n°. 65

$$\frac{1 + \frac{nn'}{mm'}}{\sqrt{\left(1 + \frac{n^2}{m^2}\right)\left(1 + \frac{n'^2}{m'^2}\right)}} = \frac{mm' + nn'}{\sqrt{(m^2 + n^2)(m'^2 + n'^2)}}.$$

Sostituendo in questa espressione i valori in lati del triangolo, si avrà finalmente

$$\cos BAC = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

egualianza che dà il valore di un angolo per mezzo dei tre lati del triangolo.

Si otterrebbe nella stessa maniera, per gli altri due angoli,

$$\cos ABC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\cos BCA = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Per trovare la superficie del triangolo, è necessario abbassare dal vertice A una perpendicolare AD sopra il lato BC o c , di cui l'equazione è

$$y - n = \frac{n - n'}{m - m'} (x - m),$$

ossia (n°. 59)

$$y = \frac{n-n'}{m-m'}x + \frac{mn'-m'n}{m-m'}.$$

Ma la lunghezza di una perpendicolare abbassata da un punto (x', y') sopra una linea che ha per equazione

$$y = ax + b$$

è, per il n°. 68,

$$\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}};$$

dunque, avendosi nel caso attuale

$$x' = 0, y' = 0, \quad a = \frac{n-n'}{m-m'}, \quad b = \frac{mn'-m'n}{m-m'},$$

si troverà

$$AD = \frac{m'n - mn'}{\sqrt{(m-m')^2 + (n-n')^2}},$$

o, a motivo di $c = \sqrt{(m-m')^2 + (n-n')^2}$,

$$AD = \frac{m'n - mn'}{c}.$$

Ma, indicando con S la superficie del triangolo, si ha

$$S = \frac{1}{2} AD \times BC = \frac{AD \times c}{2};$$

dunque, sostituendo il valore di AD , si ha

$$S = \frac{m'n - mn'}{2}.$$

Per cangiare questa espressione in un'altra che non dipenda che dai lati del triangolo, è necessario cercare l'espressione di $m'n - mn'$ in funzione di questi lati. Ora si ha

$$a^2 = m^2 + n^2$$

$$b^2 = m'^2 + n'^2$$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = mm' + nn'.$$

Moltiplicando le due prime eguaglianze l'una per l'altra, e sottraendo dal prodotto il quadrato della terza, si trova

$$(m'n - mn')^2 = a^2 b^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2,$$

il che dà

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2},$$

risultato simile a quello che si trovò nel Problema V del n°. 6, con un metodo affatto differente.

74. Se si avesse un quarto punto D (Tav. XXVII, fig. 2) di cui le coordinate fossero m'', n'' , indicando con d, d', d'' , le distanze AD, BD, CD di questo punto dai vertici dei tre angoli del triangolo, si avrebbe

$$m''^2 + n''^2 = d^2,$$

$$(m'' - m)^2 + (n'' - n)^2 = d'^2,$$

$$(m'' - m')^2 + (n'' - n')^2 = d''^2;$$

sviluppando le due ultime eguaglianze, e sostituendo i valori delle coordinate espressi per mezzo dei lati, si trova

$$mm'' + nn'' = \frac{a^2 + d^2 - d'^2}{2} = p,$$

$$m'm'' + n'n'' = \frac{b^2 + d^2 - d''^2}{2} = q;$$

indicando, per brevità, con p e con q i secondi membri di queste eguaglianze.

Dalle medesime si ottiene

$$m'' = \frac{n'p - nq}{mn' - m'n},$$

$$n'' = \frac{mq - m'p}{mn' - m'n}.$$

Sostituendo questi due valori nell'equazione $m''^2 + n''^2 = d^2$, essa diviene

$$\left(\frac{n'p - nq}{mn' - m'n} \right)^2 + \left(\frac{mq - m'p}{mn' - m'n} \right)^2 = d^2,$$

e, sviluppando, e togliendo i denominatori,

$$n'^2 p^2 + n^2 q^2 - 2nn'pq + m^2 q^2 + m'^2 p^2 - 2mm'pq = d^2(mn' - m'n)^2,$$

cioè

$$p^2(m'^2 + n'^2) + q^2(m^2 + n^2) - 2pq(mm' + nn') = d^2(mn' - m'n)^2.$$

Sostituendo, in quest'ultima, i valori delle coordinate dati pei lati, si ottiene

$$a^2 q^2 + b^2 p^2 - 2pq \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right) = 4d^2 S^2,$$

equazione che comprende tutte le proprietà dei quadrilateri.

Facendo $d = d' = d''$, allora il punto D si trova ad egual distanza dai tre vertici: possiamo dunque considerarlo come il centro d'un circolo circoscritto (*Fedi Circolo*). Le espressioni superiori divengono

$$p = \frac{a^2}{2}, \quad q = \frac{b^2}{2},$$

e quindi si trova

$$4d^2S^2 = \frac{a^2b^4}{4} + \frac{a^4b^2}{4} - \frac{2a^2b^2}{4} \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2} \right);$$

equazione che si riduce a

$$4dS = abc,$$

donde si trae

$$d = \frac{abc}{4S};$$

espressione notabilissima del raggio del circolo circoscritto data per i tre lati del triangolo, e simile a quella che si ottenne senza il soccorso delle coordinate (n°. 6, *Probl. V.*, COROLLARIO).

75. PROBLEMA III *Trovare il valore del raggio di un circolo inscritto in un triangolo.*

Le equazioni dei tre lati essendo, come abbiamo trovato di sopra (n°. 73),

$$y = \frac{n}{m}x, \quad y = \frac{n'}{m'}x, \quad y = \frac{n-n'}{m-m'}x + \frac{mn'-m'n}{m-m'},$$

si tratta di esprimere la circoscrizione della situazione del punto o (*Tab. XXVII, fig. 3*) ad egual distanza da questi tre lati. Ora, le coordinate di questo punto essendo $m'', n'',$ le perpendicolari op, oq, or avranno per valori (n°. 68)

$$op = \frac{n'' - \frac{n}{m}m''}{\sqrt{1 + \frac{n^2}{m^2}}} = \frac{mn'' - m'n}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

$$oq = \frac{n'' - \frac{n'}{m'}m''}{\sqrt{1 + \frac{n'^2}{m'^2}}} = \frac{m'n'' - m''n'}{\sqrt{m'^2 + n'^2}},$$

$$or = \frac{n'' - \frac{n-n'}{m-m'}m''}{\sqrt{1 + \left(\frac{n-n'}{m-m'}\right)^2}} = \frac{(m-m')n'' - (n-n')m'' - mn' + m'n}{\sqrt{(m-m')^2 + (n-n')^2}},$$

ovvero

$$op = \frac{mn'' - m'n}{a},$$

$$oq = \frac{m'n'' - m''n'}{b},$$

$$or = \frac{(mn'' - m'n'') - (m''n - m''n') - (mn' - m'n)}{c}.$$

Ma, la formula che dà l'espressione generale della perpendicolare risultando da un'estrazione di radice ha il doppio segno $\pm$; per conseguenza le espressioni precedenti possono esser prese in due sensi. Per non fare uso che dei valori positivi, che sono i soli necessari nella questione che ci occupa, si deve osservare che nella figura costruita si ha

$$\frac{n}{m} > \frac{n''}{m''}, \quad \frac{n''}{m''} > \frac{n'}{m'}, \quad \frac{n}{m} > \frac{n'}{m'},$$

e per conseguenza

$$m''n > mn'', \quad m'n'' > m''n', \quad m'n > mn'.$$

Donde segue che per non avere che valori positivi, è necessario cangiare i segni della prima, che diviene allora

$$op = \frac{m''n - mn''}{a}.$$

$m'n''$ essendo maggiore di $m''n'$, non è necessario cangiare nulla nella seconda. Quanto alla terza, l'equazione di BC essendo

$$y = \frac{n - n'}{m - m'}x + \frac{mn' - m'n}{m - m'},$$

se in questa equazione si fa $x = m''$, il punto di BC che corrisponde all'ascissa m'' ha necessariamente un'ordinata maggiore di n'' ; dunque si ha

$$n'' < \frac{n - n'}{m - m'}m'' + \frac{mn' - m'n}{m - m'},$$

ossia, cangiando $m - m'$ in $m' - m$ all'oggetto di rendere positivo il denominatore, e di moltiplicare per esso tutta l'ineguaglianza,

$$n'' < \frac{n' - n}{m' - m}m'' + \frac{m'n - mn'}{m' - m},$$

donde

$$m'n'' - mn'' < m''n' - m''n + m'n - mn',$$

ossia, sottraendo $m'n'' - mn''$ dai due membri,

$$0 < (mn'' - m'n'') - (m''n - m''n') - (mn' - m'n),$$

espressione che fa evidentemente conoscere che il valore della perpendicolare or è positivo. Non è necessario perciò cangiare i suoi segni.

Ciò posto, sia

$$op = e, \quad oq = e', \quad or = e'';$$

si avrà (n°. 73)

$$ae + be' + ce'' = m'n - mn' = 2S \dots (p).$$

Ma, nel caso del circolo inscritto, $e = e' = e''$, dunque

$$e = \frac{2S}{a + b + c}.$$

Questo è il valore del raggio del circolo inscritto, valore identico a quello trovato senza il metodo delle coordinate al n°. 7.

76. Se si facesse $a \equiv b \equiv c$ nell'equazione (p) si avrebbe

$$c + c' + c'' = \frac{2S}{a};$$

il che fa vedere che se da un punto qualunque, preso nell'interno di un triangolo equilatero, si abbassano delle perpendicolari sopra i lati, la somma di queste perpendicolari sarà eguale all'altezza del triangolo; poichè, prendendo a per base e chiamando h l'altezza, si ha

$$\frac{1}{2} ah = S, \quad \text{dove } h = \frac{2S}{a},$$

c, per conseguenza, $c + c' + c'' = h$.

77. Risulta dai principj che abbiamo precedentemente esposti, e dalle applicazioni che ne abbiamo fatte, che le soluzioni dei quesiti geometrici, che dipendono dalle relazioni delle linee rette, si riducono a determinare nell'equazione generale

$$y = ax + b$$

i valori particolari di a e b , che convengono alle rette cercate. Questa equazione essendo nel medesimo tempo l'equazione generale del primo grado a due incognite (*Vedi Equazioni*), si deve reciprocamente concludere che ogni equazione del primo grado può costruirsi per mezzo di una linea retta. Se da queste equazioni passiamo a quelle di gradi più elevati, vedremo che esse rappresentano delle linee curve di diversa natura: ma per elevarci successivamente alle nuove considerazioni che emanano da questa maniera di considerare le proprietà dell'estensione, cercheremo primieramente l'equazione della circonferenza del circolo, curva che la sua regolarità e la sua facile costruzione rendono quasi tanto semplice, quanto la linea retta; in seguito faremo vedere che questa equazione non è che un caso particolare dell'equazione generale del secondo grado, la quale nella sua generalità abbraccia tutte le curve chiamate *Sezioni Coniche*, come l'equazione generale del terzo grado abbraccia tutta un'altra specie di curve, e così successivamente. Questa ricerca ci darà frattanto un esempio del metodo che si deve seguire per trovare l'equazione di una curva, della quale sono conosciute alcune proprietà, mentre la costruzione delle equazioni generali ci offrirà il mezzo di determinare la natura delle curve, che esse rappresentano, e di giungere alla cognizione di tutte le loro proprietà.

Siano Ax ed Ay (*Tav. XXVII, fig. 4*) gli assi delle coordinate, ed o il centro di un circolo le di cui coordinate sono $oq = q$ ed $op = p$.

Se si prende sopra la circonferenza un punto qualunque c , le coordinate del quale indicheremo con x ed y , la distanza di questo punto dal punto o sarà per il n.º 65

$$oc = \sqrt{(x-q)^2 + (y-p)^2}.$$

Ma questa differenza è la medesima per tutti i punti della curva: se dunque indichiamo con r il raggio del circolo, cioè la quantità alla quale questa distanza deve essere costantemente eguale, avremo l'equazione

$$(x-q)^2 + (y-p)^2 = r^2. \dots (m),$$

ovvero

$$x^2 + q^2 - 2qx + y^2 + p^2 - 2py = r^2,$$

che sarà l'equazione della circonferenza di un circolo, poichè essa conviene a tutti i punti di questa curva.

Le tre quantità costanti p , q , r , che questa equazione contiene, servono ad indicare in che una circonferenza di circolo differisce in grandezza e in posizione da un'altra circonferenza di circolo.

L'equazione (m) cambia di forma secondo la posizione del circolo rapporto agli assi. Per esempio, se l'origine fosse situata sopra uno dei punti della circonferenza, si avrebbe

$$p^2 + q^2 = r^2,$$

e l'equazione prenderebbe la forma più semplice

$$x^2 + y^2 - 2qx - 2py = 0 \dots (n).$$

Se uno degli assi passasse per il centro, e l'altro toccasse la curva nel punto in cui essa è tagliata dal primo, si avrebbe

$$q = 0 \quad \text{e} \quad p = r,$$

ovvero

$$q = r \quad \text{e} \quad p = 0,$$

e l'equazione diverrebbe

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0,$$

ovvero

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0.$$

Se l'origine degli assi fosse al centro, si avrebbe nel medesimo tempo

$$q = 0 \quad \text{e} \quad p = 0,$$

e l'equazione generale si ridurrebbe a

$$x^2 + y^2 = r^2 \dots (o).$$

Quest'ultima è quella di cui più comunemente si fa uso.

Infine, se gli assi fossero obliqui, l'equazione è molto più complicata: poichè, chiamando v l'angolo dei due assi, e indicando sempre con q e p le coordinate del centro, dalla formula del n°. 66 si troverà per l'equazione della circonferenza nel caso degli assi obliqui

$$(x-q)^2 + (y-p)^2 + 2(x-q)(y-p)\cos v = r^2 \dots (p).$$

Se l'origine fosse al centro si avrebbe

$$q = 0, \quad p = 0,$$

e l'equazione si camberebbe in

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos v = r^2 \dots (s).$$

78. Per trovare l'equazione di una curva basta dunque esprimere algebricamente le relazioni fondamentali che esistono fra i suoi punti e le rette le quali vi si riferiscono in un modo determinato. Trovata una volta questa equazione, ne derivano naturalmente tutte le particolarità della curva, come pure quelle che possono risultare dal suo concorso con altre linee qualunque, di cui siano date le equazioni.

È in questa guisa che combinando le equazioni del circolo e della linea retta potremo dedurre tutte le proposizioni geometriche che si riferiscono a queste linee (*Vedi Circolo*).

Frattanto aggiungeremo alcune applicazioni, che sempre più faranno apprezzare le esposte teorie.

79. **PROBLEMA I.** *Se dai vertici degli angoli di un triangolo rettilineo qualunque si abbassano delle perpendicolari sopra i lati opposti, queste perpendicolari si taglieranno tutte e tre in un solo e medesimo punto.*

Sia AMP' (Tav. XXVII, fig. 5) il triangolo dato, e si conducano dai vertici del medesimo le tre perpendicolari sopra i lati; sia in A l'origine delle coordinate, e si faccia

$$AP = m, \quad PM = n, \quad AP' = m';$$

si avrà

$$PP' = m' - m.$$

1°. L'equazione della retta AM , che passa per l'origine delle coordinate, e per il punto $M(m, n)$, essendo $y = \frac{n}{m}x$, quella della retta $P'M''$, che le deve essere perpendicolare, e che di più deve passare per $P'(m', 0)$, sarà (n°. 67)

$$y = -\frac{m}{n}(x - m') \dots (1).$$

2°. La retta $P'M$ fa con l'asse delle ascisse un angolo la cui tangente trigonometrica è $-\frac{n}{m' - m}$, dunque la linea AM' , che passa per l'origine, e che è perpendicolare a questa medesima retta, avrà per equazione

$$y = \frac{m' - m}{n}x \dots (2).$$

Ciò posto, se si attribuisce alle variabili, x ed y , lo stesso valore nelle equazioni (1) e (2), esse rappresenteranno le coordinate del punto d'intersezione o delle due linee $AM', P'M''$, e si avrà

$$-\frac{m}{n}(x - m') = \frac{m' - m}{n}x,$$

donde si ricava $x = m$. L'ascissa del punto o essendo eguale a quella del punto M , ne segue che le tre perpendicolari $PM, AM', P'M''$, si tagliano nel solo e medesimo punto o. Seguirebbe lo stesso se queste perpendicolari si tagliassero al di fuori del triangolo proposto.

80. **PROBLEMA II.** *Se si conduce a piacere una parallela alla base di un triangolo, e se per i punti in cui questa parallela taglia gli altri due lati si conducono delle rette ai vertici degli angoli opposti, esse si taglieranno sempre sopra un punto della retta che unisce il mezzo della base e il vertice del triangolo.*

Sia AMP' (Tav. XXVII, fig. 6) il triangolo dato, A l'origine delle coordinate, e si faccia

$$Ap = m, \quad Ap' = m', \quad AP = x', \\ po = n, \quad p'o' = n, \quad PM = y', \quad AP' = a;$$

si avrà allora

$$pP' = a - m, \quad AB = \frac{n}{2}, \quad p'P' = a - m'.$$

In virtù di queste notazioni, l'equazione della retta AM che passa per l'origine è

$$y = \frac{n}{m} x \dots \dots (1);$$

quella della retta P'M

$$y = -\frac{n}{a-m'}(x-a) \dots \dots (2);$$

quella della retta P'a

$$y = -\frac{n}{a-m}(x-a) \dots \dots (3);$$

e quella della retta Ao'

$$y = \frac{n}{m'} x \dots \dots (4).$$

Per ottenere le coordinate del punto M si combineranno fra loro le equazioni (1) e (2), nelle quali si cangerà x in x' , ed y in y' ; il che darà

$$x' = \frac{am}{a-m'+m}, \quad y' = \frac{an}{a-m'+m},$$

e quindi

$$BP = AP - AB = \frac{a(m+m'-a)}{2(m-m'+a)}.$$

Da un'altra parte la retta BM dovendo passare per il punto B, mezzo di AP', e dovendo fare coll'asse delle ascisse un angolo che ha per tangente $\frac{PM}{BP}$, la sua equazione sarà

$$y = \frac{2n}{m+m'-a}(x-\frac{1}{2}a) \dots \dots (5).$$

Osservo adesso che, affinchè le tre rette Ao', P'o, BM si taglino in un medesimo punto, è necessario che in questo punto abbiano le stesse coordinate: il mezzo di verificare questa circostanza è dunque di combinare due a due le loro equazioni, e di esaminare se i punti delle loro intersezioni abbiano le stesse coordinate, nel qual caso è chiaro che questi punti si confondono e non ne formano che un solo. Ora si trova effettivamente che la (3) combinata colla (4) dà i medesimi risultati della (4) combinata colla (5), cioè

$$x = \frac{am'}{m'-m+a}, \quad y = \frac{an}{m'-m+a}.$$

Dunque le tre rette P'o, Ao', BM sono dotate della proprietà enuncziata di sopra.

81. Questo teorema può ancora dimostrarsi per mezzo di un principio secondo nelle sue applicazioni, il quale consiste in questo, che combinando le equazioni di due luoghi geometrici in una maniera qualunque, il terzo luogo geometrico risultante da questa combinazione passerà per i punti d'intersezione degli altri due: donde segue che se tre equazioni a due o tre variabili sussistono insieme, sarà possibile combinarne due in guisa che ne resulti una quarta equazione identica alla terza.

Siano, per esempio,

$$\left. \begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ A'x + B'y + C' &= 0 \\ A''x + B''y + C'' &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

le equazioni di tre rette aventi lo stesso punto d'intersezione: moltiplicando rispettivamente le due prime per le indeterminate m, m' , la somma dei prodotti sarà

$$(Am + A'm')x + (Bm + B'm')y + Cm + C'm' = 0, \dots \dots (7)$$

e rappresenterà il sistema di tutte le rette che passano per il punto d'intersezione delle due prime. La direzione di una delle rette di questo sistema dipendendo essenzialmente dai valori che si attribuiranno alle quantità m, m' , supponiamo che essa coincida con quella della terza retta (6); si avrà allora

$$Am + A'm' = A'', \quad Bm + B'm' = B'', \quad Cm + C'm' = C'',$$

ed eliminando m, m' fra queste tre relazioni, verrà l'equazione di condizione

$$(A'B'' - B'A'')C + (A''B - B''A)C' + (AB' - BA')C'' = 0 \dots \dots (8)$$

la quale deve aver luogo quando le tre rette (6) concorrono nel medesimo punto. Ora è evidente che le equazioni (3), (4), (5) soddisfanno a quest'ultima, dunque la proposizione enunciata si trova, con questo fatto, dimostrata.

82. PROBLEMA III. *Un angolo acuto di un triangolo rettangolo essendo dato, trovare la posizione dell'ipotenusa, in modo che questo triangolo sia equivalente ad un quadrato dato.*

Sia q^2 il quadrato dato, a la tangente dell'angolo conosciuto APD (Tav. XXVII, fig. 7), e z l'incognita AP.

La retta DP dovendo passare per un punto P ($z, 0$), preso sopra l'asse delle ascisse Ax, la sua equazione è

$$y = -a(x - z).$$

Ora facendo $x = 0$, si ha per l'ordinata AD corrispondente, $y = az$.

L'area del triangolo ADP essendo $\frac{AD \times AP}{2} = \frac{az^2}{2}$, ne segue che $q^2 = \frac{az^2}{2}$, e

per conseguenza

$$z = \pm \sqrt{\frac{2q^2}{a}}.$$

Se il valore positivo di z è rappresentato da AP, e il suo valore negativo da Ap, i triangoli APD, ApD, soddisfaranno alle due soluzioni del problema proposto.

83. PROBLEMA IV. *Da un punto M (Tav. XXVII, fig. 8.) dato di posizione rapporto ad un angolo conosciuto M'AN, condurre una retta MN, in modo che lo spazio triangolare AM'N sia equivalente ad un quadrato dato.*

Siano m ed n le coordinate rettangolari del punto M, A l'origine, q^2 il quadrato dato, a la tangente dell'angolo M'AN; e siano le incognite $P'M' = y$ ed $AN = m'$. Ciò posto si avrà

$$PN = m' - m.$$

L'equazione della retta M'A, che passa per l'origine, è

$$y = ax,$$

quella della retta MN, che deve passare pel punto M (m, n) e pel punto N ($m', 0$), sarà per l'equazione (r) del n.º. 59

$$y = \frac{-n}{m' - m} (x - m').$$

Quando le coordinate delle rette M'A, ed MN saranno comuni, esse rappresenteranno quelle del punto M' della loro intersezione; così avremo

$$y = \frac{am'n}{a(m' - m) + n}.$$

Ma l'area del triangolo AM'N è

$$\frac{m'y}{2} = q^2,$$

dunque, sostituendo in questa espressione il valore di y , si avrà

$$\frac{am'^2n}{a(m' - m) + n} = 2q^2,$$

ovvero

$$am'^2n = 2q^2am' - 2q^2am + 2q^2n. \dots (1).$$

Se si deducesse da questa equazione il valore di m' , si avrebbe un secondo punto N della linea cercata, ed allora il problema sarebbe risoluto; ma siccome la formula che bisognerebbe costruire o calcolare in questo caso è alquanto complicata, sarà utile il semplificarla per mezzo della seguente osservazione.

Poichè per tutti i punti M' della retta AM' si ha

$$\frac{y}{x} = a;$$

si faccia

$$a = \frac{n}{p};$$

in questo caso la quantità p esprimerà la parte A'P intercetta fra la perpendicolare PM e la linea A'M condotta parallelamente ad AM'; e indicando con d l'intervallo AA', si avrà $AP = m = p - d$. Questi valori di a e di m essendo sostituiti nell'equazione (1), si troverà, dopo avere effettuate le riduzioni opportune,

$$m'^2n = 2q^2m' + 2q^2d;$$

dalla quale si ricava

$$m' = \frac{q^2}{n} \pm \sqrt{\frac{2q^2d}{n} + \frac{q^4}{n^2}};$$

ovvero per la facilità della costruzione

$$m' = \frac{q^2}{n} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{n} + 2d\right) \frac{q^2}{n}}.$$

Sopra una linea indefinita PQ (Tav. XXVII, fig. 9) si elevi la perpendico-

lare $AC = n$; si prenda $CO = CM = q$; e, dopo aver tirato AM , si conduca per il punto O la parallela ON ad AM : avremo allora

$$CN : CM :: CO : CA,$$

e perciò

$$CN : q :: q : n;$$

donde

$$CN = \frac{q^2}{n}.$$

Si faccia adesso $\frac{q^2}{n} = c$, il valore di m' si cangerà in

$$c \pm \sqrt{(c+2d)c}.$$

Ora, siccome la parte radicale esprime una media proporzionale, si prenderà $CQ = 2d$, e sopra NQ come diametro si descriverà una semicirconfenza NVQ ; la corda NV sarà, per questa costruzione, eguale a $\sqrt{(c+2d)c}$. Così, facendo $PN = NV$, si avrà

$$PC = m'.$$

Quanto al secondo valore di m' , è necessario fare attenzione che esso soddisfa al caso in cui si volesse condurre la retta MN (*Tav. XXVII, fig. 8*) nell'angolo $A'AM'$; e può ancora accadere che d sia dal lato delle x positive, o che n sia negativa; tutte queste diverse circostanze del problema producono, nelle costruzioni, dei cangiamenti dei quali è facile rendersi ragione.

Osserveremo ancora che la soluzione precedente conviene naturalmente al problema in cui ci proponessimo di condurre, per un punto dato, una linea retta che dividesse una figura rettilinea qualunque in due parti che stessero fra loro in un rapporto conosciuto.

Ecco due altri problemi che hanno molta analogia col precedente, e le di cui soluzioni riposano sopra la considerazione delle coordinate oblique.

84. PROBLEMA V. *Per un punto M' (*Tav. XXVII, fig. 8*) dato in un angolo conosciuto $MA'N$, condurre una retta, in modo che il prodotto dei segmenti $A'M, A'N$ sia eguale ad un quadrato q^2 .*

Siano m, n le coordinate oblique $A'A, AM'$ del punto M' , A' la loro origine, e $A'N = x'$.

Se si considera che la retta $M'N$ deve passare per il punto N , la sua equazione sarà generalmente della forma $y = M(x - x')$, M non essendo più una tangente trigonometrica, ma il rapporto di AM' ad AN preso negativamente (n.º 52); così nel caso di cui si tratta abbiamo

$$M = -\frac{n}{x' - m},$$

e l'equazione della retta $M'N$ diviene

$$y = \frac{n}{m - x'}(x - x').$$

Siccome $A'M$ corrisponde ad $x = 0$, si ha

$$y = \frac{nx'}{x' - m}.$$

moltiplicando questo valore per x' , verrà

$$\frac{nx'^2}{x'-m} = q^2,$$

donde

$$x' = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{n} \pm \sqrt{\frac{q^2}{n} \left(\frac{q^2}{n} - 4m \right)} \right\}$$

valore che si costruirà col metodo del numero precedente.

85. PROBLEMA VI. *Da un punto dato in un angolo, e preso ad egual distanza dai due lati, condurre una retta terminata ai due lati dell'angolo in modo che questo punto la divida in due segmenti, la somma dei quadrati dei quali sia equivalente ad una superficie data.*

Si prendano i lati Ax , Ay dell'angolo dato yAx (Tav. XXVII, fig. 10) per gli assi delle coordinate oblique, e supponiamo che dal punto M , egualmente distante da questi assi, siasi condotta una delle quattro rette le quali soddisfanno al problema, per esempio, la retta $RM R'$. Il punto M avendo per coordinate $AP = m$, $PM = m$, la retta RR' , che passa per questo punto (m, m) , avrà generalmente per equazione,

$$y - m = M(x - m).$$

Se dunque AR ed AR' sono rispettivamente indicate da x e da y , si avrà, facendo successivamente y e $x = 0$,

$$(p) \dots \left\{ \begin{array}{l} x - m = -\frac{m}{M}, \text{ ossia } x = -\frac{m(1-M)}{M}, \\ y - m = -Mm, \text{ ossia } y = m(1-M). \end{array} \right.$$

Siano $MR = z$, $MR' = z'$, e l'angolo $R'AR = A$; si avrà per un teorema di trigonometria

$$\overline{MR}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{PR}^2 - 2MP \times PR \cos A,$$

$$\overline{MR'}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{QR'}^2 - 2MQ \times QR' \cos A;$$

e, sostituendo alle linee i loro valori, si otterrà

$$z^2 = m^2 + (x - m)^2 - 2m(x - m) \cos A,$$

$$z'^2 = m^2 + (y - m)^2 - 2m(y - m) \cos A;$$

e poichè la somma dei quadrati di questi due segmenti deve essere equivalente al quadrato q^2 , si ha necessariamente

$$z^2 + z'^2 = q^2 = (x - m)^2 + (y - m)^2 + 2m^2 - 2m[(x - m) + (y - m)] \cos A \dots (1).$$

Da nn'altra parte, a motivo che i tre punti R , M , R' sono in linea retta, si ha evidentemente

$$\frac{x - m}{m} = \frac{m}{y - m},$$

ovvero

$$(x - m)(y - m) = m^2 \dots (2).$$

Ma facendo, per brevità, $x-m=x'$, e $y-m=y'$, ed eliminando m^2 dall'equazione (1), si avrà

$$(x'+y')^2 - 2m(x'+y') \cos A = q^2 \dots (3);$$

equazione dalla quale si ottiene

$$x'+y' = m \cos A \pm \sqrt{q^2 + (m \cos A)^2} \dots (4);$$

d'altronde si ha per quello che precede

$$x'y' = m^2 \dots (5);$$

dunque si conosce adesso la somma, e il prodotto delle due incognite x', y' . In luogo di formare l'equazione del secondo grado di cui queste incognite sarebbero le radici, si può operare come segue.

Per costruire il doppio valore di $x'+y'$, si conduca primieramente MQ parallelamente ad Ax, e si abbassi sopra quest'asse la perpendicolare QE: si avrà allora $AE = m \cos A$. Quindi si prolunghi EQ, in modo che sia $ED = q$, e si descriva dal punto A come centro, col raggio AD, la semicirconferenza BDB': si avrà

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 = (m \cos A)^2 + q^2;$$

e per conseguenza

$$EB = AB + AE = \sqrt{q^2 + (m \cos A)^2} + m \cos A,$$

$$EB' = AB' - AE = \sqrt{q^2 + (m \cos A)^2} - m \cos A;$$

e, se si fa $x'+y' = t$, si avrà

$$t = EB, \text{ o } t = EB'.$$

È osservabile che a motivo delle equazioni (p), che danno

$$x'+y' = t = -m \left(M + \frac{1}{M} \right),$$

l'equazione (3) diviene

$$m^2 \left(M + \frac{1}{M} \right)^2 + 2m^2 \left(M + \frac{1}{M} \right) \cos A = q^2;$$

quindi, sviluppando e togliendo i denominatori, si giunge all'equazione reciproca del quarto grado,

$$m^2 M^4 + 2m^2 M^2 \cos A + 2 \left(m^2 - \frac{1}{2} q^2 \right) M^2 + 2m^2 M \cos A + m^2 = 0,$$

la di cui risoluzione non ha che le difficoltà che s'incontrano in quelle del secondo grado (Vedi EQUAZIONI RECIPROCHE). Ora, siccome $t = -m \left(M + \frac{1}{M} \right)$, si ha

$$M = \frac{-t \pm \sqrt{t^2 - 4m^2}}{2m};$$

e quindi

$$y = m(t - M) = \frac{2m + t \mp \sqrt{t^2 - 4m^2}}{2};$$

quantità che facilmente si costruisce, e che risolve il problema.

In questa equazione, t essendo suscettibile di due valori, è evidente che y ne avrà io generale quattro. Infatti, il problema proposto offre visibilmente quattro soluzioni; ma siccome la figura è simmetrica rapporto alla retta AM , basterà ottenere due soluzioni distinte per avere le altre due.

Questo problema è uno di quelli che furono proposti nel 1819 al concorso generale dei collegi reali di Parigi (Vedi *les Annales de Mathématiques*, tom. X. p. 73).

86. L'equazione generale del secondo grado a due incognite è della forma (Vedi EQUAZIONI)

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0.$$

Ora, supponendo $A=1$, $B=1$ e $C=0$, questa equazione diviene

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Facendo in quest'ultima

$$D = -2q, \quad E = -2p, \quad F = q^2 + p^2 - r^2,$$

essa si riduce a

$$x^2 + y^2 - 2qx - 2py + q^2 + p^2 - r^2 = 0,$$

equazione che abbiamo trovata per il circolo (n.º 77).

L'equazione del circolo non è dunque che un caso particolare dell'equazione completa del secondo grado.

87. Cercando le equazioni delle curve col metodo indicato (n.º 78), si trova

$$y^2 = Ay,$$

per quella della parabola (Vedi PARABOLA);

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2,$$

per quella dell'ellisse (Vedi ELLISSE); e

$$A^2y^2 - B^2x^2 = -A^2B^2$$

per quella dell'iperbola (Vedi IPERBOLA).

Queste tre equazioni sono ancora evidentemente casi particolari dell'equazione generale del secondo grado a due incognite.

88. Ma se invece di cercare queste equazioni per mezzo delle proprietà conosciute delle curve, si costruisce direttamente l'equazione generale del secondo grado che le abbraccia tutte, ciascuna di queste curve sarà determinata per mezzo di ipotesi particolari fatte sopra i coefficienti dell'equazione, e le loro proprietà fondamentali si dedurranno facilmente dalle loro equazioni individuali. Vedi COSTAZIONI.

Segue lo stesso per le equazioni dei gradi superiori. Vedi CURVE.

Del rimanente chiunque volesse acquistare una cognizione più precisa e completa di questo ramo importante delle Matematiche potrà consultare in questo Dizionario gli articoli CURVE, DISCUSSIONE, SEZIONI CONICHE, ec; come pure potranno consultarsi le seguenti opere. PUISANT, *Recueil de diverses propositions de géométrie résolues ou démontrées par l'analyse algébrique*, Parigi, 1824, in-8; BOURDON, *Application de l'Algèbre à la géométrie, contenant les deux trigonométries et la géométrie à trois dimensions*, Parigi, 1837 in-8; LEBESGUE de FOURCY, *Leçons de géométrie analytique*, Parigi, 1834, in-8; INGHIRAMI, *Elementi di matematiche*, Firenze, 1833, Vol. 2 in-8; LOTTERI, *Lezioni d'introduzione al Calcolo sublime*, Trento 1823, Vol. 2 in-4; ec., ec.

89. *Geometria a tre dimensioni.* La posizione di un punto nello spazio indefinito è determinata, quando si conoscono le sue distanze da tre piani fissi e dati di situazione.

Siano tre piani YOZ, XOZ, XOY (Tav. XXVII, fig. 11) perpendicolari fra loro, e le loro intersezioni siano le tre rette OZ, OY, OX, ognuna delle quali è in tal modo perpendicolare alle altre due. *Vedi PIANO.*

Indichiamo con a , b , c le distanze di un punto M da questi tre piani, e supponiamo inoltre che questo punto sia situato nell'angolo triedro OXYZ.

Sopra OX si prenda $OD=a$; sopra OY, $OE=b$; sopra OZ, $OF=c$, e si conducano pei punti D, E, F, dei piani paralleli ai piani dati. Il punto M sarà situato all'intersezione comune dei tre piani paralleli, e conseguentemente la sua situazione nello spazio sarà interamente determinata. Infatti, siccome i due piani MD ed ME hanno tutti i loro punti situati alle distanze a e b dai piani YOZ e XOZ, l'intersezione MC di questi piani avrà pure tutti i suoi punti a queste medesime distanze da YOZ e da XOZ: così, il punto M, dovendo trovarsi nel medesimo tempo sopra i due piani MD ed ME, non può trovarsi che sopra la retta MC che è comune ad ambedue. Di più, questo punto deve egualmente trovarsi sopra il terzo piano parallelo FM situato ad una distanza c da XOY; dunque questo punto non può essere che in M, ove il piano FM taglia l'intersezione MC.

S'indicano con x le distanze dal piano YOZ, contate sopra OX; con y , le distanze dal piano XOZ, contate sopra OY; e finalmente con z , le distanze dal piano XOY, contate sopra OZ. In questa maniera, le tre intersezioni OX, OY, OZ sono gli assi delle x , delle y e delle z . Si chiamano pure col nome di *assi coordinati*; e xy, xz , ossia le distanze dai tre piani, si chiamano le *coordinate* del punto.

Si chiama ancora, per brevità, *piano delle yz*, il piano YOZ perpendicolare all'asse delle x ; *piano delle xz*, il piano XOZ perpendicolare all'asse delle y ; e *piano delle xy*, il piano XOY perpendicolare all'asse delle z . Quest'ultimo piano si considera ordinariamente come avente una posizione orizzontale. Dietro queste definizioni, le equazioni del punto M sono

$$x=a, \quad y=b, \quad z=c,$$

e quando queste equazioni sono conosciute esse bastano per fissare la posizione del punto nello spazio.

90. Siccome, prolungando i tre piani coordinati indefinitamente in tutti i sensi, si vengono a formare otto angoli triedri nel punto O, per determinare in quale di questi angoli è situato il punto, si considerano come *positive* le distanze contate sopra OX alla destra di O, o da O verso X, e come *negative* le distanze contate alla sinistra di O, cioè da O verso X'. In egual modo, le distanze contate sopra OY ed OZ sono considerate come *positive* da O verso Y e Z, e come *negative* da O verso Y' e Z'.

Così, la posizione di un punto nello spazio si trova interamente determinata per mezzo dei *segni* delle distanze a, b, c , quando però queste distanze sono conosciute. Così le equazioni del punto sono:

Nell'angolo	OXYZ	$x=+a,$	$y=+b,$	$z=+c.$
	OX'YZ	$x=-a,$	$y=+b,$	$z=+c.$
	OXY'Z	$x=+a,$	$y=-b,$	$z=+c.$
	OXYZ'	$x=+a,$	$y=+b,$	$z=-c.$
	OX'Y'Z	$x=-a,$	$y=-b,$	$z=+c.$
	OX'YZ'	$x=-a,$	$y=+b,$	$z=-c.$
	OXY'Z'	$x=+a,$	$y=-b,$	$z=-c.$
	OX'Y'Z'	$x=-a,$	$y=-b,$	$z=-c.$

91. Quando nelle equazioni generali del punto,

$$x=a, \quad y=b, \quad z=c,$$

una delle quantità a, b, c è zero, questa circostanza indica che il punto è situato nel piano delle altre due coordinate: così, per esempio, l'equazione $z=0$, corrisponde ad un punto situato nel piano xy .

Quando due di queste distanze sono nulle nel medesimo tempo, il punto è situato sopra l'asse dell'ultima; così le equazioni

$$x=a, \quad y=0, \quad z=0$$

appartengono ad un punto situato sopra l'asse delle x .

Infine, le tre equazioni

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

indicano l'origine O dei piani delle coordinate.

92. Quando i piani coordinati non sono perpendicolari gli uni sopra gli altri, gli assi si chiamano *assi obliqui*, e le equazioni del punto esprimono allora semplicemente delle distanze contate parallelamente a questi assi. *Vedi TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE.*

93. I piedi A, B, C delle tre coordinate del punto M si dicono le *proiezioni* di questo punto: esse si chiamano *ortogonali* se ognuno dei piani coordinati è perpendicolare agli altri due; e prendono il nome di *oblique* se i piani coordinati sono obliqui. In tutti e due i casi è utile l'osservare:

1°. Che le proiezioni di un punto si trovano conducendo per questo punto delle parallele agli assi OX, OY, OZ .

2°. Che un punto dello spazio ha sempre due coordinate comuni con ciascuna delle sue proiezioni; così M , e C hanno evidentemente la stessa $x, AM=CE$, e la stessa $y, MB=CD$: M e B hanno le coordinate comuni $x=MA=BF$, e $z=MC=BD$: infine M e A hanno la stessa $y, MB=AF$, e la stessa $z, CM=AE$.

3°. Che due proiezioni di un medesimo punto hanno sempre una coordinata comune; così, le proiezioni B e C hanno la stessa $x, BF=CE$: B e A hanno la stessa $z, BD=AE$: A e C hanno lo stesso $y, AF=CD$.

94. Ciò posto, è facile accorgersi che le tre equazioni $x=a, x=b, z=c$, che determinano il punto M , equivalgono a conoscere due delle sue proiezioni, dati che servono nella Geometria descrittiva a fissare la posizione di questo punto. Infatti, per definire analiticamente la proiezione C sopra il piano xy , bisognerebbe dare due equazioni, come $x=a$ e $y=b$: per definire la proiezione B , bisognerebbe dare $x=a'$ e $z=c$; ma queste quattro equazioni si riducono a tre, poichè, per la terza osservazione del numero precedente, si deve sempre avere la condizione $a=a'$. Questa dipendenza fra le proiezioni di un medesimo punto sopra due piani si ritrova nella Geometria descrittiva, poichè si sa che dopo aver fatto coincidere i piani, piegandoli lungo la loro intersezione, le due proiezioni ortogonali devono sempre essere situate sopra una medesima perpendicolare all'intersezione.

95. Inoltre, quando una volta le due proiezioni C e B sono fissate dalle equazioni $x=a$ e $y=b, x=a$ e $z=c$, la terza proiezione A ne deriva necessariamente; poichè dovendosi avere (n°. 93, 3°) la stessa y della proiezione C , e la stessa z della proiezione B , essa si troverà definita dalle equazioni $y=b$ e $z=c$. Se poi si volesse dedurre graficamente il punto A dalle due proiezioni C e B , basterebbe evidentemente condurre sopra i piani fissi, e parallelamente agli assi, le rette CE, BF, EA e AF .

96. Poichè un punto è determinato dalle sue tre coordinate, se si dà il valore numerico di quelle dei punti M' e M'' (Tav. XXVII, fig. 12), deve potersi calcolare la distanza di questi due punti; il che adesso faremo, supponendo gli assi

rettangolari. Si condurranno dunque le coordinate $M'C' = x'$, $C'D' = y'$, $OD' = x'$ relative al punto M' , e le coordinate $M''C'' = x''$, $C''D'' = y''$, $OD'' = x''$, che appartengono al punto M'' ; quindi si uniscano questi due punti, e si tiri la retta $M''P$ parallela a $C''C'$. Il triangolo $M'M''P$ sarà evidentemente rettangolo in P , e darà

$$M'M'' = \sqrt{M'P^2 + (x' - x'')^2};$$

ma, se si conduce $C''Q$ parallela ad OX , il triangolo $C''Q(C')$ sarà pure rettangolo in Q , e darà l'equazione

$$M'P^2 = C'Q^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2;$$

donde si concluderà per la distanza cercata,

$$M'M'' = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2}.$$

Se si volesse avere la distanza del punto M' dall'origine O , basterebbe esprimere che il punto M'' coincide con quest'ultimo punto, facendo $x'' = 0$, $y'' = 0$, $z'' = 0$, e ne risulterebbe

$$OM' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

In queste due formule, si dovrà sempre prendere il radicale positivamente, poichè non si può cercare che la distanza assoluta dei due punti proposti.

97. Avanti di passare a trattare delle linee, è necessario generalizzare le idee che si possono avere sopra la significazione geometrica delle equazioni ad una o a più variabili, quando si comprendono le tre dimensioni dello spazio. Prima di tutto, un'equazione, come $x = a$, conviene non solamente quando gli assi sono rettangolari, ma ancora quando sono obliqui, a tutti i punti che si trovano ad una distanza a dal piano YZ , contandosi questa distanza parallelamente ad OX ; e d'altronde essa non conviene evidentemente che a questi soli punti: per conseguenza l'equazione $x = a$ rappresenta, nelle tre dimensioni, un piano indefinito parallelo ad YZ . Egualmente, $y^2 + py + q = 0$, che darà due valori costanti $y = a \pm b$, ha per luogo geometrico due piani paralleli a XZ ; e, in generale, qualunque equazione ad una sola variabile rappresenta uno o più piani paralleli ai due assi, le coordinate dei quali non entrano in questa equazione.

Resulta da ciò che $z = 0$ è l'equazione caratteristica del piano XY indefinitamente prolungato, e che $y = 0$ e $x = 0$ rappresentano gli altri due piani coordinati XZ e YZ .

98. Un'equazione a due variabili, $f(x, y) = 0$, appartiene, sopra il piano XY , ad una serie di punti i quali generalmente formano una curva $CC'C''$ (Tab. XXVII, fig. 13); ma se, per i diversi punti di questa linea, si conducono delle parallele all'asse OZ , si otterrà una superficie cilindrica, nel senso generale di questa parola. Ora ogni punto N di questa superficie, qualunque ne sia la z , avrà sempre la stessa x e la stessa y della sua proiezione C (n.º 93, 2.º); per conseguenza le coordinate di tutti i punti di questo cilindro soddisfaranno alla relazione $f(x, y) = 0$, la quale non contiene la variabile z ; mentre qualunque punto L , preso fuori di questa superficie, avendo una proiezione G la quale non cadrà sopra la curva $CC'C''$, non potrà verificare con le sue coordinate $x = OG$, $y = GH$, l'equazione proposta. Da ciò si deve concludere che l'equazione $f(x, y) = 0$ rappresenta una superficie cilindrica parallela all'asse OZ , la di cui traccia sopra il piano XY ci viene data dalla equazione stessa, quando ci limitiamo a considerare due sole dimensioni dello spazio. Un'analoga con-

sequenza si applica alle equazioni $f'(x,z)=0$, ovvero $f''(y,z)=0$, ognuna delle quali, presa isolatamente, appartiene ad un cilindro parallelo ad OY, o ad OX, cioè parallelo all'asse delle coordinate che non entrano nell'equazione.

99. Osserviamo, di passaggio, che volendo definire analiticamente la curva CC'C'' sola, sarebbe necessario impiegare le equazioni simultanee $f(x,y)=0$ e $z=0$; perchè allora non vi sarebbero più, sopra tutto il cilindro, che i punti della sua base che potessero verificare nel medesimo tempo le due citate relazioni.

100. Senza ripetere ragionamenti analoghi, si può concludere, come un caso particolare del precedente, che quando un'equazione a due variabili è del primo grado, cioè della forma $y=ax+b$, essa appartiene non solamente ad una retta PQ, di cui si sa determinare la posizione sopra il piano XY, ma ancora a tutti i punti del piano PQRS condotto per questa retta parallelamente all'asse OZ; infatti questo piano non è altro che un cilindro la di cui base è rettilinea. In egual modo un'equazione del primo grado, come

$$mx+nz=p, \text{ ovvero } my+nz=q,$$

rappresenterà un piano parallelo ad OY, o ad OX.

101. Finalmente, quando l'equazione proposta contiene tre variabili, come $F(x,y,z)=0$, ve ne sono necessariamente due alle quali si possono dare dei valori arbitrari; se dunque si fa solamente $z=c$, l'equazione $F(x,y,c)=0$ conterrà ancora due variabili, e rappresenterà (n.º 98) una superficie cilindrica parallela ad OZ; ma siccome non si devono prendere di questa superficie che i soli punti i quali soddisfanno alla condizione $z=c$, ne segue che, in questa prima ipotesi, si otterrà una curva, cioè la sezione fatta in questo cilindro dal piano $z=c$, parallelo ad XY. Se quindi si fa $z=c'$, si troveranno tutti i punti della curva condotta pel piano $z=c'$ nel nuovo cilindro $F(x,y,c')=0$; e, continuando così, otterremo un'infinità di curve diverse situate in piani paralleli ad XY, e tanto vicini quanto si vorrà gli uni agli altri; per conseguenza il luogo geometrico di un'equazione a tre variabili, $F(x,y,z)=0$, è una superficie, la di cui natura dipenderà dalla forma della funzione F. D'altronde non si potrebbe pretendere che questo luogo fosse un solido, poichè allora ciascun piano secante dovrebbe dare per sezione un'area, mentre esso non produce, tagliando la superficie cilindrica $F(x,y,c)=0$, che una curva ad uno o più rami, identica con la base di questo cilindro.

102. Da questa discussione risulta che qualunque equazione isolata, tanto ad una, quanto a due, o tre variabili, rappresenta una superficie, la quale diviene nonostante affatto immaginaria quando nessun sistema di valori reali soddisfa all'equazione proposta; ovvero, se non può soddisfarsi che dividendo questa equazione in due o tre altre, la superficie si riduce ad un numero limitato di linee reali, o di punti reali, poichè allora si cade nel sistema di più equazioni simultanee. Non è necessario considerare adesso delle equazioni che contengano più di tre variabili propriamente dette; poichè ciascun punto dello spazio è sufficientemente determinato dalle sue tre coordinate.

103. Adesso, se si fanno concorrere due equazioni simultanee $F(x,y,z)=0$ e $F'(x,y,z)=0$, tali cioè che le variabili ricevano nel medesimo tempo gli stessi valori, cosicchè non ne rimanga arbitraria che una sola, z per esempio, questo sistema rappresenterà una linea retta o curva, poichè esso non potrà convenire che ai punti situati nel medesimo tempo sopra le due superficie, cioè alla loro comune sezione. Reciprocamente, il solo mezzo che si ha per definire una curva nello spazio, essendo quello di assegnare due superficie conosciute di cui essa sia l'intersezione, non potremo rappresentare analiticamente questa linea che con due equazioni simultanee. A questo infatti

si riduce il metodo delle proiezioni, che passiamo a far conoscere, e il di cui vantaggio principale consiste in questo, che, fra il numero indefinito di superficie differenti che possono passare per una curva data, un tal metodo impiega a preferenza due cilindri, ognuno dei quali è parallelo ad uno degli assi coordinati, e le di cui equazioni si trovano conseguentemente più semplici, poichè pel n°. 98 ciascuna di esse non contiene che due variabili.

104. Cominciamo dalle linee rette, e, per meglio fissare le idee, supponiamo gli assi rettangolari, e consideriamo OZ (Tav. XXVII, fig. 14) come verticale. Immaginiamo che da tutti i punti della retta MM'' nello spazio si conducano delle perpendicolari al piano XY (se gli assi fossero obliqui si condurrebbero invece delle parallele ad OZ); esse incontreranno questo piano nei punti C, C', C'', . . . l'insieme dei quali formerà ciò che si chiama la *proiezione* di MM'' sopra questo piano: questa proiezione sarà sempre rettilinea, poichè le perpendicolari saranno evidentemente situate tutte in un medesimo piano parallelo ad OZ, il quale si chiama *il piano proiettante* di MM''. Se in egual modo si proietta questa retta sopra gli altri due piani fissi per mezzo di perpendicolari (o in general per mezzo di linee parallele all'asse che è fuori del piano che si considera), si otterranno le tre proiezioni AA'', BB'', CC'', di cui due bastano per determinare la retta MM''. Infatti, supponiamo che siano date AA'', e BB''; immaginando per la prima un piano parallelo all'asse OX, e per la seconda un piano parallelo ad OY, questi due piani, la di cui situazione è interamente determinata, dovranno evidentemente contenere la retta MM'', e ne fisseranno la posizione nello spazio mediante la loro intersezione.

105. Ciò posto, la proiezione BB'' sarà determinata sopra il piano XZ quando sarà data la sua equazione, che si troverà della forma

$$x = ax + p \dots (1),$$

nella quale sappiamo che p indica l'ordinata OG del suo punto d'incontro con OX, e che $a = \tan GIZ$. L'altra proiezione AA'' sarà determinata sopra il piano YZ da un'equazione come

$$y = bz + q \dots (2),$$

in cui $q = OH$ e $b = \tan HKZ$. Per conseguenza l'insieme delle equazioni (1) e (2) determinerà completamente la retta MM'' nello spazio; e quantunque esse siano qui considerate come appartenenti alle sole proiezioni di questa linea, dobbiamo, dietro ciò che si è detto (n°. 100), riguardarle più generalmente come le equazioni di due piani proiettanti MBGR, MAHR, perpendicolari l'uno a XZ, e l'altro a YZ, i quali con la loro intersezione fissano la posizione di MM'' nello spazio. Questo conferma e schiarisce quanto si accennò al n°. 103.

106. È importante osservare che quando ancora gli assi fossero obliqui, le proiezioni BB'' e AA'', purchè siano fatte parallelamente agli assi come fu prescritto al n°. 104, sarebbero sempre espresse da equazioni della forma (1) e (2); solamente le costanti a e b cambierebbero di significazione, e rappresenterebbero allora dei rapporti di seni, come si è veduto nella geometria a due dimensioni.

107. Si osservi inoltre che nelle equazioni simultanee (1) e (2), le variabili x, y, z , si riferiscono ai punti corrispondenti delle proiezioni BB'' e AA'', vale a dire che ponendo, per esempio, $z = OF$, si deve trovare $x = FB$ e $y = FA$: Onde si vede 1°. che queste variabili rappresentano pure le coordinate MA, MB, MC di ciascun punto M situato sopra la retta nello spazio; così, queste equazioni possono dirsi quelle della linea MM'' medesima: 2°. che i valori $x = FB$, $y = FA$, sono pure eguali alle coordinate CE, CD del punto C della proiezione CC''; e per

conseguenza l'equazione di questa terza proiezione si dedurrà sempre dalle due prime, eliminando z fra le equazioni (1) e (2), il che darà

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b}, \quad \text{ossia} \quad y = \frac{b}{a}x + \frac{aq-bp}{a} \dots (3),$$

per l'equazione della linea CC'' , o del piano proiettante verticale MCR.

108. Da ciò si vede ancora che sarebbe facile dedurre graficamente la terza proiezione dalle altre due; poichè, se si prendono sopra AA'' e BB'' due sistemi di punti corrispondenti ad una medesima z , come A e B , A' e B' , basterà condurre sopra i piani fissi delle parallele ai diversi assi, per concluderne la posizione dei punti C, C' , che determineranno la retta CC' .

Questa costruzione diviene più semplice applicandola a due delle tracce R ed S della retta MM'' , tracce che sono facili a trovarsi pei primi principi della geometria descrittiva e per quello che diremo in appresso (n.º 112).

109. Quando si tratta di una curva $MM'M'' \dots$ (Tav. XXVIII, fig. 1), s'immaginano pure condotte per tutti i punti di questa linea delle perpendicolari al piano XY , o, se gli assi sono obliqui, delle parallele ad OZ ; queste rette, l'insieme delle quali formerà una superficie cilindrica, incontreranno il piano XY lungo una linea $CC'C'' \dots$, che in generale sarà curva, e che si chiama la proiezione di $MM'M''$ sopra questo piano. Se si concepiscono condotti in egual modo per la linea $MM'M''$ due cilindri proiettanti, paralleli l'uno ad OY , e l'altro ad OX , si otterranno le altre proiezioni $BB'B'' \dots$, $AA'A'' \dots$; e la curva nello spazio sarà evidentemente determinata, quando si daranno due delle sue tre proiezioni, poichè allora essa dovrà trovarsi all'intersezione di due cilindri conosciuti.

110. Ora, le due proiezioni $BB'B''$ ed $AA'A''$, per esempio, saranno determinate da equazioni della forma

$$\left. \begin{aligned} f(x, z) &= 0 \\ f'(y, z) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \text{ovvero} \quad \left\{ \begin{aligned} x &= F(z) \dots (4), \\ y &= F'(z) \dots (5), \end{aligned} \right.$$

le quali, nella loro significazione completa, rappresentano (n.º 98) i due cilindri proiettanti, i quali hanno per base le curve BB'' e AA'' ; dunque la linea MM'' sarà determinata dal sistema delle equazioni simultanee (4) e (5); e dietro le osservazioni del n.º 107, l'equazione della terza proiezione $CC'C''$ si dedurrà da queste, eliminandone la variabile z .

111. La costruzione grafica di questa terza proiezione, la quale in generale non sarà rettilinea, esigerebbe che si ripetessero le costruzioni indicate al n.º 108 per una retta, sopra diversi punti delle curve BB'' ed AA'' , abbastanza numerosi e vicini da potere unire i risultati con una linea continua.

Stabiliti una volta questi principi passeremo a risolvere diversi problemi relativi alle linee rette, i quali d'altronde somministreranno dei mezzi di soluzione per altre questioni più elevate.

112. Quando le equazioni di una retta

$$x = az + p \dots (1), \quad y = bz + q \dots (2),$$

sono date, cioè quando le costanti a, b, p, q sono conosciute, è facile ottenere le tracce di questa linea. Se si vuole infatti trovare la traccia R (Tav. XXVII, fig. 14) sopra il piano XY , conviene rammentarsi (n.º 97) che l'equazione $z=0$ caratterizza tutti i punti di questo piano; per conseguenza questa condizione introdotta nelle equazioni (1) e (2) somministrerà $x=p$ e $y=q$, per le coordinate del punto R . Si otterrebbero le altre due tracce ponendo successivamente $y=0$ e $x=0$.

113. Possiamo ancora proporci di determinare le costanti generali a, b, p, q , per mezzo di certe condizioni alle quali si assoggetterà la retta. Si voglia, per esempio, che questa linea passi per due punti conosciuti M' ed M'' (Tab. XXVII, fig. 12), le coordinate dei quali siano indicate con x', y', z' , e x'', y'', z'' . Allora sarà necessario che le equazioni (1) e (2) del numero precedente siano verificate mediante la sostituzione di questi due sistemi di coordinate in luogo di x, y, z , il che somministrerà le condizioni

$$x' = az' + p \dots (3), \quad y' = bz' + q \dots (4),$$

$$x'' = az'' + p \dots (5), \quad y'' = bz'' + q \dots (6),$$

donde si potrebbero ricavare i valori delle quattro costanti, per sostituirli quindi nelle equazioni (1) e (2): ma si giunge in una maniera più elegante ad un risultato equivalente, eliminando per mezzo di sottrazioni, come nella geometria piana, le incognite a e p fra le equazioni (1), (3) e (5), e le incognite b e q fra (2), (4), e (6). Con questo metodo si ottiene per le equazioni della retta $M' M''$

$$x - x' = \frac{x' - x''}{z' - z''} (z - z'), \quad y - y' = \frac{y' - y''}{z' - z''} (z - z').$$

114. Se la retta cercata dovesse passare solamente per il punto (x', y', z') , non si dovrebbero aggiungere alle equazioni generali (1) e (2), che le condizioni (3) e (4), il che, eliminando p e q , darebbe per le equazioni di una retta obbligatoria a passare per un punto,

$$x - x' = a(z - z'), \quad y - y' = b(z - z'),$$

nelle quali le costanti a e b resterebbero indeterminate, come dovevamo immaginarcelo. Ma se inoltre si vuole che la linea cercata sia parallela ad una retta conosciuta rappresentata da

$$x = a'z + p', \quad y = b'z + q' \dots (D'),$$

bisognerà evidentemente che i piani proiettanti di queste due rette, e quindi le loro proiezioni, siano rispettivamente paralleli; il che darà le nuove condizioni $a = a'$, $b = b'$; e finalmente la retta domandata sarà rappresentata da

$$x - x' = a'(z - z'), \quad y - y' = b'(z - z') \dots (D).$$

Se l'origine O è il punto dato pel quale si vuole condurre una parallela alla retta (D') , le equazioni (D) si ridurranno evidentemente alla forma semplicissima

$$x = a'z, \quad y = b'z.$$

115. Trovare il punto d'incontro di due rette conosciute, determinate dalle equazioni

$$x = az + p \dots (1), \quad y = bz + q \dots (2),$$

$$x = a'z + p' \dots (3), \quad y = b'z + q' \dots (4).$$

Osserviamo prima di tutto che le variabili x ed y prendono in generale dei valori differentissimi nei sistemi (1) e (2), (3) e (4), per una medesima ipotesi di $z = z'$: niente di meno, se le due rette si tagliano, le coordinate del punto comune dovranno verificare nello stesso tempo i due sistemi, e per conseguenza esse si otterranno considerando x, y, z , non più come variabili, ma come incognite che hanno i medesimi valori in queste quattro equazioni. Non si

tratta dunque che di risolverle sotto questo punto di vista: tuttavia, poichè il loro numero supera quello delle incognite, sarà necessario avere *un'equazione di condizione*, senza la quale il problema sarà impossibile, poichè infatti due rette nello spazio non s'incontrano sempre. Questa equazione si ottiene eliminando le tre incognite: ora, sottraendo l'equazione (1) dalla (3), e l'equazione (2) dalla (4), si ha

$$0 = z(a' - a) + p' - p, \quad 0 = z(b' - b) + q' - q;$$

quindi, eliminando z fra queste ultime, ovvero esprimendo che i due valori che esse danno per z si accordano fra loro, si giunge alla condizione

$$\frac{p' - p}{a' - a} = \frac{q' - q}{b' - b} \dots \dots (5).$$

Se dunque questa equazione non rimane verificata identicamente dalle costanti delle equazioni proposte, le due rette in questione non si taglieranno; e quando essa sarà soddisfatta, le coordinate del punto di sezione si otterranno sostituendo il valore comune

$$z = \frac{p' - p}{a' - a} = \frac{q' - q}{b' - b}$$

nelle equazioni (1) e (2), o nelle equazioni (3) e (4), indifferentemente.

116. Quando si ha $a = a'$, e $b = b'$, la condizione (5) si trova soddisfatta, e nondimeno le rette non s'incontrano, poichè esse sono parallele: ma, con la relazione (5), si deve evidentemente intendere, che il valore precedente di z non sia infinito; altrimenti è necessario dire che la condizione (5), presa isolatamente, esprime che le due rette sono in un medesimo piano, e possono tagliarsi, senza decidere a quale distanza avrà luogo il loro incontro.

Si osservi in questo punto che tutte le questioni, delle quali abbiamo parlato nei numeri 112, 113, 114, e 115, si trattano nella stessa maniera e conducono alle medesime formule, quando gli assi sono obliqui; soltanto rimane alterata la significazione geometrica dei coefficienti a, b, a', b' , come abbiamo già avvertito al n.º 106.

117. *Trovare gli angoli che forma con gli assi rettangolari OX, OY, OZ, (Tav. XXVIII, fig. 2) una retta data*

$$x = az + p, \quad y = bz + q.$$

Siccome questa linea può non incontrare gli assi, è necessario intendere con ciò gli angoli che formano questi con una retta OD, condotta per l'origine parallelamente alla retta primitiva.

Le equazioni di OD saranno (n.º 114) $x = az, y = bz$: se si prende sopra questa retta una lunghezza arbitraria OM' = r , e se con x', y', z' s'indicano le coordinate della sua estremità M', avremo, per determinare i loro valori, le tre equazioni

$$x' = az', \quad y' = bz', \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = r^2,$$

di cui le due prime esprimono che il punto M' è sopra la retta OD, e l'ultima è la formula trovata al n.º 96. Se ne deduce facilmente

$$z' = \frac{r}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad y' = \frac{br}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad x' = \frac{ar}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

Ciò posto, si compisca il parallelepipedo determinato dalle tre coordinate del

punto M' , e si facciano gli angoli cercati $M'OX=l$, $M'OY=m$, $M'OZ=n$: si troveranno, per mezzo dei triangoli rettangoli $M'QO$, $M'SO$, $M'TO$, le relazioni

$$\cos l = \frac{OQ}{OM'} = \frac{x'}{r}, \quad \cos m = \frac{OS}{OM'} = \frac{y'}{r}, \quad \cos n = \frac{OT}{OM'} = \frac{z'}{r} \dots (6);$$

donde, dopo la sostituzione dei valori delle coordinate di sopra trovati, si otterrà

$$\cos l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad \cos n = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \dots (7).$$

118. Si osservi, 1.^o che questi coseni contengono un radicale che è suscettibile di ricevere il doppio segno $\pm$; ma si dovrà sempre dare simultaneamente lo stesso segno ai tre coseni, e così non si avranno che due sistemi di valori, i quali corrisponderanno ai due angoli supplementari formati dalla porzione OD , e dal suo prolungamento OE , con i semi-assi positivi; poichè è in questa guisa che si devono sempre misurare gli angoli di una retta con gli assi coordinati.

2.^o Che questo radicale preso positivamente si riferirà sempre ai tre angoli che forma con gli assi la porzione della retta OD che si trova al di sopra del piano XY , o che fa un angolo acuto con OZ ; poichè allora, nelle formule (7), $\cos n$ avendo un valore positivo, è certo che l'angolo n è acuto. Tuttavia ciò non impedirà che gli altri due angoli l e m siano ottusi o acuti, secondo i segni che avranno i numeratori a e b .

119. Il parallelepipedo di cui abbiamo fatto uso di sopra dimostra che le coordinate $x'=OQ$, $y'=OS$, $z'=OT$ (Tav. XXVIII, fig. 2) di un punto qualunque M' , sono le proiezioni del raggio vettore $OM'=r$ sopra gli assi; e le equazioni (6) danno i valori di queste coordinate, o proiezioni, sotto la forma

$$x'=r \cos l, \quad y'=r \cos m, \quad z'=r \cos n.$$

In egual modo se una retta finita $M'M''$ (Tav. XXVII, fig. 12) ha per coordinate delle sue estremità x' , y' , z' , e x'' , y'' , z'' , e se si conducono per questi due punti sei piani paralleli ai piani coordinati, si formerà un parallelepipedo rettangolo, le di cui costole saranno evidentemente $x'-x''$, $y'-y''$, $z'-z''$; dimanierachè gli angoli l , m , n , formati dalla diagonale $M'M''=D$ con queste costole, o con gli assi, saranno determinati dalle seguenti relazioni, che sono frequentemente poste in uso,

$$\cos l = \frac{x'-x''}{D}, \quad \cos m = \frac{y'-y''}{D}, \quad \cos n = \frac{z'-z''}{D},$$

nelle quali d'altronde si sa (n.^o 96) che

$$D = \sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2}.$$

120. Quando si conoscono *a priori* gli angoli l , m , n , che forma una retta qualunque con gli assi, è facile concluderne i coefficienti a e b , che entrerebbero nelle equazioni delle sue proiezioni; poichè dalle formule (7) del n.^o 117 si deduce per mezzo della divisione,

$\frac{\cos l}{\cos n} = a$, $\frac{\cos m}{\cos n} = b$; e perciò quando una

retta dovrà passare per un punto dato (x'', y'', z'') , e fare con gli assi degli

angoli determinati l, m, n , le sue equazioni potranno scriversi sotto la forma molto simmetrica,

$$\frac{x-x''}{\cos l} = \frac{y-y''}{\cos m} = \frac{z-z''}{\cos n}.$$

121. Sommando le formole (7) del n.º 117, dopo averle elevate a quadrato, si ottiene questa relazione notabilissima.

$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1 \dots \dots (8),$$

la quale dimostra che i tre angoli formati da una medesima retta con gli assi non possono giammai essere presi tutti arbitrariamente. Quando sono dati l e m , per esempio, il terzo è determinato da

$$\cos n = \pm \sqrt{1 - \cos^2 l - \cos^2 m},$$

e non è più suscettibile che di due valori supplementari l'uno dell'altro; e di più è necessario che i due primi angoli soddisfacciano alla condizione

$$\cos^2 l + \cos^2 m < 1, \text{ ovvero } = 1.$$

Possiamo renderci ragione di queste diverse circostanze, per mezzo di due coni retti che abbiano per assi OX ed OY (Tav. XXVIII, fig. 2), e le di cui generatrici formino con questi assi degli angoli eguali ad l e m ; poichè allora la retta in questione dovrebbe essere nel medesimo tempo sopra le due superficie coniche, le quali non possono tagliarsi che lungo due generatrici situate simmetricamente, l'una al di sopra e l'altra al di sotto del piano XY.

122. Trovare l'angolo che formano fra loro due rette rappresentate da

$$\begin{aligned} x &= az + p & \text{e} & & y &= bz + q, \\ x &= a'z + p' & \text{e} & & y &= b'z + q'. \end{aligned}$$

Siccome queste linee possono non incontrarsi, bisogna intendere per l'angolo formato da esse l'angolo compreso fra due rette condotte da un medesimo punto, parallelamente alle linee primitive. Siano dunque OD ed OD' (Tav. XXVIII, fig. 2) queste due parallele, le loro equazioni saranno (n.º 114)

$$\begin{aligned} x &= ay, & y &= bz \dots \dots (D), \\ x &= a'z, & y &= b'z \dots \dots (D'); \end{aligned}$$

allora, se si prendono sopra queste rette due punti M', M'', ad una distanza qualunque dall'origine, tale per esempio che si abbia OM' = 1, OM'' = 1, e se si uniscono questi due punti, il triangolo obliquangolo OM'M'' darà, per un teorema conosciuto in trigonometria

$$M'M''^2 = OM'^2 + OM''^2 - 2OM'.OM''.\cos(M'OM'').$$

Ma se s'indicano con x', y', z' , e x'', y'', z'' le coordinate dei due punti M', e M'', questa equazione diverrà (n.º 96)

$$(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 = 1 + 1 - 2\cos(D, D'),$$

e sviluppando i quadrati, essa si ridurrà a

$$\cos(D, D') = x'x'' + y'y'' + z'z'' \dots \dots (9),$$

poichè si hanno evidentemente (n.º 96) le relazioni

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad x''^2 + y''^2 + z''^2 = 1.$$

Se inoltre vi si uniscono le seguenti

$$\begin{aligned} x' &= az', & x'' &= a'z'', \\ y' &= bz', & y'' &= b'z'', \end{aligned}$$

le quali esprimono che i punti M' , M'' sono sopra le rette (D) , (D') , si potranno facilmente calcolare le coordinate di questi punti, e si troverà (n.º 117)

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, & y' &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, & x' &= \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \\ z'' &= \frac{1}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}, & y'' &= \frac{b'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}, & x'' &= \frac{a'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}}; \end{aligned}$$

valori che sostituiti nell'equazione (9) daranno, per determinare l'angolo delle due rette, la seguente formula

$$\cos(D, D') = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}} \dots \dots (10).$$

Se si volesse calcolare il seno di questo angolo, si farebbe uso dell'a relazione generale $\text{sen} = \sqrt{1 - \cos^2}$, la quale condurrebbe all'espressione

$$\text{sen}(D, D') = \frac{\sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (ab' - a'b)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}},$$

e quindi se ne dedurrebbe la tangente.

123. La formula che abbiamo ottenuta per $\cos(D, D')$ contiene due radicali suscettibili ciascuno del segno $\pm$, il che somministra, volendo, quattro valori eguali a due a due, e corrispondenti ai quattro angoli formati dalle rette indefinite DOE , $D'OE'$ (Tav. XXVIII, fig. 2): ma è necessario osservare che tutte le volte che si prenderanno i due radicali col medesimo segno, cioè quando si prenderà il denominatore totale positivamente, il valore del coseno converrà necessariamente all'angolo DOD' formato dalle due porzioni, le quali fanno ciascuna un angolo acuto con OZ , o al suo opposto al vertice EOE' . Infatti, per questi due angoli, i punti M' ed M'' , i quali servono a costruire il triangolo sopra il quale riposa il calcolo, debbono avere le loro ordinate z' e z'' , tutte e due positive, o tutte e due negative: dunque, risalendo ai valori trovati di sopra per z' e z'' , è certo che i due radicali devono essere affetti dallo stesso segno. Si osservi nientedimeno che quest'angolo DOD' potrà ancora essere acuto o ottuso, secondo il segno del numeratore $aa' + bb' + 1$.

Quanto al valore di $\text{sen}(D, D')$, dobbiamo sempre prenderlo positivamente, poichè, sotto questa forma, esso conviene ai quattro angoli supplementari due a due; e d'altronde è impossibile distinguere degli angoli negativi nelle tre dimensioni dello spazio.

124. Possiamo ancora esprimere l'angolo che fanno fra loro le due rette OD ed OD' , in funzione degli angoli che ciascuna di esse forma con gli assi coordi-

nati. Siano infatti $DOX = l$, $DOY = m$, $DOZ = n$, e l' , m' , n' , gli angoli analoghi per la retta OD' ; troveremo, come al n.º 122, la relazione

$$\cos(D, D') = x'x'' + y'y'' + z'z'';$$

ma per l'osservazione fatta al n.º 119, e considerando che adesso si ha $OM' = 1 = OM''$, i valori delle coordinate saranno

$$\begin{aligned} x' &= OM' \cos l = \cos l, & y' &= \cos m, & z' &= \cos n, \\ x'' &= OM'' \cos l' = \cos l', & y'' &= \cos m', & z'' &= \cos n', \end{aligned}$$

i quali, sostituiti nell'equazione precedente, somministreranno per l'espressione domandata,

$$\cos(D, D') = \cos l \cos l' + \cos m \cos m' + \cos n \cos n' \dots \dots \dots (11);$$

ovvero, facendo uso della seguente notazione, che richiama con facilità la situazione di ciascun angolo,

$$\cos(D, D') = \cos(D, x) \cos(D', x) + \cos(D, y) \cos(D', y) + \cos(D, z) \cos(D', z) \dots (12).$$

125. È facile dedurre da ciò che precede la condizione necessaria perché le rette siano perpendicolari l'una all'altra; in tal caso è *necessario* ed è *sufficiente* che si abbia $\cos(D, D') = 0$; condizione che, dietro le formule (10) e (11), trae seco l'una o l'altra delle seguenti relazioni,

$$aa' + bb' + 1 = 0 \dots \dots \dots (13),$$

$$\cos l \cos l' + \cos m \cos m' + \cos n \cos n' = 0 \dots \dots (14),$$

le quali convengono tanto alle rette date primitivamente al n.º 122, quanto alle rette OD ed OD' che si tagliano. Riguardo a queste ultime, si deve osservare che la condizione (13) lascia la seconda retta in parte indeterminata, ancora quando la prima è completamente fissata dai valori di a e di b , poichè adesso non si ha che una sola equazione fra i due coefficienti a' , b' : e doveva essere così, poichè, nello spazio, esiste un'infinità di rette condotte dal medesimo punto O perpendicolarmente alla retta OD .

Se si volesse ancora esprimere con la formula (10) che le rette sono parallele, sarebbe necessario fare $\cos(D, D') = 1$, condizione che condurrebbe all'equazione

$$(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - a'b)^2 = 0,$$

la quale non può essere soddisfatta che facendo $a = a'$ e $b = b'$; e perciò si ritornerebbe alle condizioni trovate al n.º 114.

Passiamo adesso a parlare dei piani, e delle loro combinazioni con linee rette e con altri piani.

126. Per giungere a trovare l'equazione del piano, considereremo questa superficie come il luogo delle diverse posizioni che prende una retta mobile, obbligata a scorrere sopra una retta fissa, restando costantemente parallela ad una direzione data.

Siano dunque

$$x = az + p \dots \dots (1), \quad y = bz + q \dots \dots (2),$$

le equazioni della retta fissa, che si chiama la *direttrice*; si rappresenti la linea, alla quale la *generatrice mobile* deve restare costantemente parallela, con $x = a'z$, $y = b'z$; allora le equazioni di questa generatrice avranno generalmente la forma

$$x = a'z + p' \dots \dots (3), \quad y = b'z + q' \dots \dots (4);$$

ed in questo caso a', b' saranno costanti date ed invariabili, nel tempo che p' e q' varieranno a ciascuna posizione della generatrice, ma non in guisa del tutto arbitraria; poichè bisogna sempre esprimere che la retta mobile ha, in tutte le sue posizioni, un punto comune con la direttrice fissa, il che significa che le equazioni (1), (2), (3), (4), devono essere verificate da un medesimo sistema di valori per x, y, z . Ora, siccome il numero di queste equazioni supera di un'unità quello delle incognite, ciò avverrà soltanto quando esisterà fra i coefficienti una certa relazione, che si otterrà eliminando le tre incognite x, y, z , come abbiamo fatto al n°. 115, e che sarà

$$\frac{p'-p}{a'-a} = \frac{q'-q}{b'-b} \dots (5).$$

Questa è dunque una condizione che bisogna essenzialmente aggiungere alle equazioni (3) e (4), affinchè queste rappresentino completamente la generatrice. Ciò posto, attribuendo successivamente a p' diversi valori arbitrarii, $p' = 1, 2, 3, \dots$, e traendo dalla relazione (5) i valori corrispondenti di q' , per sostituire gli uni e gli altri nelle equazioni (3) e (4), si otterrebbero successivamente le equazioni determinate da ciascuna posizione particolare della generatrice; ma se, in luogo di fissare così i valori di p' e di q' , si eliminano queste due costanti fra le equazioni (3), (4), (5), l'equazione finale in (x, y, z) converrà allora a tutte le posizioni della generatrice, poichè non conterrà più traccia veruna delle quantità p' e q' , i di cui valori particolari potevano soli distinguere una generatrice da un'altra: per conseguenza, il risultato di questa eliminazione sarà l'equazione della superficie piana, luogo di tutte queste generatrici. Ora, sostituendo nell'equazione (5) i valori di p' e di q' ricavati dalle equazioni (3) e (4), si trova

$$\frac{x-a'z-p}{a'-a} = \frac{y-b'z-q}{b'-b},$$

ovvero

$$x(b-b') + y(a'-a) + z(ab'-ba') + p(b'-b) + q(a-a') = 0 \dots (6),$$

risultato, il quale dimostra che l'equazione di un piano è sempre del primo grado, e contiene generalmente le tre variabili; perciò essa è della forma

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

127. Reciprocamente, qualunque equazione del primo grado, come

$$Ax + By + Cz + D = 0 \dots (7),$$

appartiene a una superficie piana. Per dimostrarlo, cerchiamo prima di tutto la traccia della superficie (7), qualunque essa sia, sopra uno dei piani coordinati, XZ per esempio: siccome $y = 0$ esprime (n°. 97) la proprietà caratteristica di questo piano, combinando questa relazione con l'equazione (7), si vede che questa traccia è una retta PR (Tav. XXVIII, fig. 3) rappresentata da

$$y = 0 \dots (8) \text{ e } Ax + Cz + D = 0 \dots (9).$$

Ciò posto, si segua lo stesso metodo del n°. 101, e si tagli la superficie incognita (7) con diversi piani paralleli ad XY , tali che si abbia $z = m, z = m', \dots$: le sezioni saranno rappresentate dalle equazioni simultanee

$$z = m \dots (10) \text{ e } Ax + By + (Cm + D) = 0, \dots (11)$$

$$z = m' \text{ e } Ax + By + (Cm' + D) = 0,$$

ec. ec.

risultati la di cui forma dimostra (n°. 105 e 107) che queste diverse sezioni sono rette, tutte parallele fra loro (n°. 114), ed ognuna di esse ha un punto comune con la traccia PR; poichè se, dietro la regola data al n°. 115, si combinano insieme le equazioni (8), (9), (10) e (11) per eliminare y e z , si giunge alle due equazioni

$$Ax + (Cm + D) = 0, \quad Ax + (Cm + D) = 0,$$

le quali si accordano a dare per x lo stesso valore. Ora, siccome seguirebbe evidentemente lo stesso sostituendo $m', m'', \dots$ ad m , se ne conclude che la superficie (7) è il luogo di un'infinità di rette parallele, le quali si appoggiano tutte sopra un'altra retta fissa PR; donde segue che questa superficie è un piano (n°. 126).

Convien osservare che questo modo di dimostrazione resterebbe applicabile all'equazione (7), quando ancora uno o due dei coefficienti A, B, C, fossero nulli, purchè allora si scelga convenientemente la traccia che serve di direttrice fissa, e la direzione dei piani secanti; ma d'altronde sappiamo (n°. 100 e 97) che un'equazione del primo grado, della forma particolare

$$By + Cz + D = 0, \quad \text{o} \quad Cz + D = 0$$

rappresenta un piano parallelo ad uno o a due degli assi coordinati; così la reciproca enuncziata è vera in tutti i casi.

128. È importantissimo l'osservare ancora che i esecoli e i ragionamenti, di cui si è fatto uso nei n°. 126 e 127, restano i medesimi, e senza alcuna modificazione, nel caso degli assi obliqui; per conseguenza l'equazione del piano riferita a tali assi è sempre del primo grado, e la reciproca ha egualmente luogo. Segue da ciò che tutte le formule e le conseguenze alle quali giungeremo nei numeri 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 144 e 150, saranno egualmente vere per gli assi coordinati obliqui.

129. Quando l'equazione di un piano è data da $Ax + By + Cz + D = 0$ (n°. 126), si ottengono le sue tracce combinando la sua equazione volta per volta con una delle seguenti, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, che caratterizzano (n°. 97) ciascuno dei tre piani coordinati; così la traccia PQ (Tav. XXVIII, fig. 3) sopra il piano XY sarà data dalle due equazioni simultanee

$$z = 0, \quad Ax + By + D = 0;$$

la traccia PR sopra il piano XZ, da

$$y = 0, \quad Ax + Cz + D = 0;$$

e infine quella che si trova sopra il piano YZ, cioè QR, da

$$x = 0, \quad By + Cz + D = 0.$$

130. Per avere il punto in cui il piano taglia l'asse OX (Tav. XXVIII, fig. 3), si porranno simultaneamente le condizioni $y = 0$ e $z = 0$, che caratterizzano evidentemente quest'asse; e sostituendo questi valori nell'equazione (7), si otterrà per le coordinate di questo punto P,

$$y = 0, \quad z = 0, \quad x = -\frac{D}{A} = O';$$

si troverebbe egualmente per i punti Q ed R,

$$x = 0, \quad z = 0, \quad y = -\frac{D}{B} = OQ,$$

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{D}{C} = OR.$$

Se si fanno queste tre distanze $OP=p$, $OQ=q$, $OR=r$, e se s' introduce nell' equazione (7) in luogo di A , B , C , l' equazione del piano prenderà la forma assai simmetrica:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

131. Si osservi anco adesso 1° che se il piano proposto dovesse essere parallelo ad uno degli assi, OX per esempio, sarebbe necessario che il valore trovato di sopra per la distanza OP divenisse infinito, il che trarrebbe seco la condizione $A=0$; per conseguenza l' equazione (7) si ridurrebbe, per un tal piano, a

$$By + Cz + D = 0.$$

2°. Che se il piano fosse parallelo nel medesimo tempo ai due assi OX ed OY , ovvero parallelo al piano XY , i valori precedenti di OP ed OR dovrebbero essere tutti e due infiniti, donde $A=0$ e $B=0$: dunque l' equazione (7) si ridurrebbe, per un tal piano, a

$$Cz + D = 0, \quad \text{o} \quad z = h.$$

Questi due risultati si erano già ottenuti nei numeri 97 e 100; siccome però queste forme particolari dell' equazione di un piano sono importantissime e di un uso frequente, così abbiamo voluto ritrovarle e dimostrarle di nuovo, perchè rimanga sempre più impresso che *quando un piano è parallelo a uno o due degli assi coordinati, la sua equazione non contiene più LA VARIABILE o LE VARIABILI le quali si riferiscono a questi assi.*

132. Quando in luogo di dare immediatamente l' equazione di un piano, si assegnano certe condizioni alle quali questa superficie deve soddisfare, bisogna allora calcolare i coefficienti che entrano nell' equazione generale, con alcuno dei metodi che passeremo ad esporre percorrendo le diverse condizioni alle quali può soddisfare un piano.

Primieramente, se si vuole che il piano passi per tre punti, le di cui coordinate siano conosciute, ed indicate da x', y', z' , x'', y'', z'' , x''', y''', z''' , l' equazione generale

$$Ax + By + Cz + D = 0 \dots (1)$$

dovrà essere verificata sostituendo alle variabili le coordinate di ciascun punto, il che darà le relazioni

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0 \dots (2),$$

$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0 \dots (3),$$

$$Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0 \dots (4),$$

nelle quali non vi sono realmente che tre incognite, cioè i rapporti $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$;

potremo dunque calcolarli facilmente, e sostituirli nell' equazione (1), la quale non contiene che questi medesimi rapporti. Ecco il risultato, prendendo l' arbitraria D pel denominatore comune,

$$D = x'y''z''' - x'z'y''' + z'x'y''' - y'x'z''' + y'z'x''' - z'y'x''',$$

$$A = -y'z''' + z'y''' - z'y''' + y'z''' - y'z''' + z'y''',$$

$$B = -x'z''' + z'x''' - z'x''' + x'z''' - x'z''' + z'x''',$$

$$C = -x'y''' + x'y''' - x'y''' + y'x''' - y'x''' + x'y'''. \quad \text{---}$$

133. Si osservi che se fosse dato solamente un punto pel quale dovesse passare il piano, non si avrebbe allora che la condizione (2), che potrebbe almeno servire ad eliminare dall'equazione (1) la costante D , e l'equazione del piano prenderebbe la forma seguente, frequentemente in uso,

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') = 0,$$

nella quale non resterebbero veramente che due sole incognite.

134. *Condizioni perchè una retta sia situata in un piano.*

Rappresentiamo le equazioni del piano e della retta con

$$Ax + By + Cz + D = 0 \dots (1),$$

$$x = az + p \dots (2) \quad y = bz + q \dots (3).$$

Se la retta è tutta intera nel piano, è necessario che, per uno qualunque dei suoi punti, e per conseguenza lasciando una delle variabili, per esempio z , indeterminata, i valori di x ed y dedotti dalle equazioni (2) e (3) soddisfacciano all'equazione del piano; ora, sostituendo questi valori nell'equazione (1), si ottiene

$$(Aa + Bb + C)z + Ap + Bq + D = 0;$$

e poichè questa equazione deve verificarsi per qualunque valore di z , è necessario che si abbia contemporaneamente

$$Aa + Bb + C = 0 \dots (4), \quad Ap + Bq + D = 0 \dots (5):$$

tali sono le condizioni domandate. Quindi sarebbe facile ottenere l'equazione di un piano obbligato a passare per la retta (2) e (3), e per un punto dato (x', y', z') ; poichè si dovrebbe unire alle condizioni (4) e (5) la relazione

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

condizione che basterebbe per calcolare i valori di tre dei coefficienti A, B, C, D , in funzione del quarto, il quale in seguito spirebbe, per essere fattore comune.

135. *Relazione fra un piano ed una retta paralleli fra loro.*

Si conservino le precedenti notazioni, e si esprima che il punto d'incontro del piano con la retta è ad una distanza infinita. Per questo punto comune, le variabili devono avere i medesimi valori nelle equazioni (1), (2), (3). sostituendogli dunque come abbiamo fatto di sopra, avremo

$$z = -\frac{Ap + Bq + D}{Aa + Bb + C};$$

per conseguenza la relazione domandata è

$$Aa + Bb + C = 0 \dots (6),$$

e coincide con la prima delle condizioni trovate nel numero precedente. Dietro ciò, si potrà condurre per una retta data un piano parallelo ad un'altra retta; poichè si dovrà unire alle relazioni (4) e (5) la condizione (6), nella quale ad a e b si sostituiranno le costanti a' e b' della seconda retta.

136. *Relazioni fra un piano ed una retta che sono perpendicolari fra loro.*

Sotto il punto di vista geometrico, tali relazioni consistono in questo, che le tracce PQ, PR, QR (Tav. XXVIII, fig. 3) del piano dato, sono rispettivamente perpendicolari alle proiezioni corrispondenti CC', BB', AA' della retta in questione, perchè però si tratti di proiezioni ortogonali; poichè il teorema non è vero quando gli assi sono obliqui. Infatti, il piano che proietta la retta lungo CC' è, per la sua definizione, perpendicolare ad XY , e lo è pure al piano PQR , poichè passa per la retta nello spazio: dunque questo piano proiettante è perpendicolare all'intersezione PQ degli altri due; donde segue che questa traccia PQ

taglia ad angolo retto la linea CC' che è nel piano proiettante: altrettanto può dirsi delle tracce e delle proiezioni sopra gli altri piani coordinati. La reciproca di questa proposizione ha luogo; così se due delle proiezioni, per esempio BB' ed AA' , sono perpendicolari alle tracce PR e QR , la retta nello spazio è perpendicolare al piano. Osserviamo infatti che i piani proiettanti che passano per BB' ed AA' sono necessariamente perpendicolari l'uno a PR , e l'altro a QR , e perciò lo sono al piano PQR che contiene queste linee; dunque l'intersezione di questi due piani proiettanti, che non è altra cosa che la retta nello spazio, sarà pure perpendicolare al piano PQR .

Ciò non ostante, perchè questa reciproca sia certa, quando ci limitiamo ad esigere la perpendicolarità fra due sole proiezioni e le tracce corrispondenti, è necessario che i due piani proiettanti che s'impiegano siano distinti l'uno dall'altro, senza di che le due proiezioni, di cui ci serviamo, lascerebbero la retta indeterminata. Così, per esempio, quando le due tracce PR e QR saranno parallele ad OZ , le proiezioni BB' ed AA' potranno essere perpendicolari sopra OZ , senza che la retta nello spazio sia perpendicolare al piano dato, poichè allora i due piani proiettanti si confondono evidentemente in uno solo, e non bastano più a definire la retta; ma, in questo caso, si dovrà verificare se la terza proiezione CC' è pure perpendicolare alla traccia PQ .

137. Esprimiamo adesso queste condizioni per mezzo dell'analisi, cooservando le notazioni già impiegate al n°. 134. La traccia del piano dato sopra XZ è rappresentata da

$$y=0 \text{ e } Ax+Cz+D=0, \quad \text{ossia} \quad x=-\frac{C}{A}z-\frac{D}{A};$$

essa deve essere perpendicolare alla proiezione corrispondente, $x=az+p$; dunque si deve avere la relazione (n°. 62)

$$a=\frac{A}{C} \dots (7).$$

La traccia sopra YZ è data da

$$x=0 \text{ e } By+Cz+D=0, \quad \text{ossia} \quad y=-\frac{C}{B}z-\frac{D}{B};$$

e, perchè essa sia perpendicolare alla proiezione $y=bz+q$, è necessario avere

$$b=\frac{B}{C} \dots (8).$$

Così le condizioni (7) e (8) sono *necessarie e sufficienti* per esprimere che il piano è perpendicolare alla retta.

138. Conviene osservare che l'ultima conseguenza soffre un'eccezione nel caso particolare citato al n°. 136, nel quale si ha $C=0$ (n°. 131, 2°); poichè le formule (7) e (8) darebbero allora $a=\infty$ e $b=\infty$, il che ridurrebbe le equazioni (2) e (3) della retta ad una sola $z=h$, la quale non basta a determinare questa linea. In questo caso bisognerà far uso della terza proiezione, che sarà della forma

$$y=mx+k, \quad \text{e fare} \quad m=\frac{B}{A},$$

onde esprimere che questa proiezione è pure perpendicolare alla traccia del

piano proposto sopra XY. Così le condizioni complete della p-rrpendicularità fra la retta ed il piano sarebbero

$$a = \frac{A}{C} \dots (7), \quad b = \frac{B}{C} \dots (8), \quad m = \frac{B}{A} \dots (9):$$

ma quando non si debba operare direttamente sopra un esempio numerico nel quale sia $C=0$, basterà nei calcoli generali impiegare le relazioni (7) e (8): infatti esse comprenderanno sempre implicitamente la relazione (9), avendosi pel

$$\text{n.}^\circ 107, m = \frac{b}{a}.$$

139. Trovare la distanza da un punto dato (x', y', z') ad un piano rappresentato da

$$Ax + By + Cz + D = 0 \dots (1).$$

Se dal punto dato si conduce una retta indefinita perpendicolare al piano, essa avrà per equazioni (n.º 137)

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z') \dots (2), \quad y - y' = \frac{B}{C}(z - z') \dots (3);$$

e le coordinate del punto in cui la retta incontra il piano (1) si otterranno considerando le variabili x, y, z , come aventi i medesimi valori nelle equazioni (1), (2), e (3). Ma quando si saranno trovati i valori di queste coordinate, sarà necessario sostituirli nella formula che dà la distanza di due punti (n.º 96),

$$d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}:$$

per conseguenza è più utile preparare le equazioni superiori in modo che esse contengano i binomj $x - x', y - y', z - z'$. Perciò scriveremo l'equazione (1) sotto la forma

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') + D' = 0 \dots (4),$$

facendo, per abbreviare, $D' = Ax' + By' + Cz' + D$; ed allora sostituendo nell'equazione (4) i valori di $x - x', y - y'$, dedotti dalle equazioni (2) e (3) si troverà

$$z - z' = \frac{-D'C}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad y - y' = \frac{-D'B}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad x - x' = \frac{-D'A}{A^2 + B^2 + C^2};$$

e quindi la distanza domandata sarà

$$d = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Il radicale che figura in questa espressione è suscettibile di due segni, dei quali non si dovrà mai ritenere che quello il quale renderà la frazione totale *positiva*; poichè tutte le volte che si parla di distanze, che non sono contate parallelamente ad una linea fissa, non si può trattare che dei loro valori assoluti.

140. Quando il punto dato è all'origine degli assi, è necessario porre nel risultato precedente $x'=0, y'=0, z'=0$; ed allora si trova, per la distanza di un piano dall'origine delle coordinate,

$$d' = \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

formula nella quale bisognerà pure dare al radicale lo stesso segno, dal quale è affetto il numeratore D.

141. Calcolare la più corta distanza da un punto (x', y', z') ad una retta rappresentata da

$$x = ax + p \dots (1), \quad y = by + q \dots (2).$$

Per trovare questa distanza, si potrebbe condurre pel punto dato un piano perpendicolare alla retta, e l'equazione di questo piano sarebbe, per le relazioni trovate ai numeri 133 e 137,

$$a(x - x') + b(y - y') + z - z' = 0 \dots (3);$$

quindi, combinando le equazioni (1), (2), e (3), se ne trarrebbero i valori delle coordinate x, y, z , del punto in cui il piano taglia la retta. Ora la linea che unirà quest'ultimo punto con quello che ha per coordinate x', y', z' , misura evidentemente la distanza domandata; dunque sostituendo nella formula generale

$$d = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

i valori delle coordinate dei due punti, si otterrà questa distanza, la quale dopo le opportune riduzioni potrà scriversi così:

$$d = \sqrt{(x' - p)^2 + (y' - q)^2 + z'^2 - \frac{H^2}{a^2 + b^2 + 1}}.$$

ponendo, per brevità, $H = a(x' - p) + b(y' - q) + z'$.

142. Ma si giunge a questo risultato in un modo più semplice e più elegante, immaginando il triangolo $M'MT$ (Tav. XXVIII, fig. 3) formato dalla retta data MT , dalla perpendicolare $M'M$ abbassata dal punto dato M' , e dalla linea che unisce M' con la traccia T della retta sopra il piano XY , traccia che ha per coordinate $z = 0, x = p, y = q$. Infatti, questo triangolo rettangolo dà

$$MM' = \sqrt{TM'^2 - TM^2};$$

ora abbiamo evidentemente

$$TM'^2 = (x' - p)^2 + (y' - q)^2 + z'^2,$$

e $TM = TM' \cos(MTM') = TM'(\cos l \cos l' + \cos m \cos m' + \cos n \cos n')$,

indicando al solito con l, m, n , gli angoli di TM cogli assi, e con l', m', n' , quelli di TM' (n°. 124). D'altronde si sa (n°. 119) che

$$\cos l' = \frac{x' - p}{TM'}, \quad \cos m' = \frac{y' - q}{TM'}, \quad \cos n' = \frac{z'}{TM'};$$

dunque si ha

$$TM = (x' - p) \cos l + (y' - q) \cos m + z' \cos n,$$

valore che sostituito nell'espressione di sopra trovata per MM' darà la distanza domandata sotto la forma

$$MM' = \sqrt{(x' - p)^2 + (y' - q)^2 + z'^2 - [(x' - p) \cos l + (y' - q) \cos m + z' \cos n]^2},$$

la quale coinciderà con l'espressione trovata per d , se vi s'introdurranno i valori conosciuti

$$\cos l = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \cos m = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}, \quad \cos n = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

143. Trovare l'angolo di una retta e di un piano rappresentati dalle equazioni

$$x = az + p, \quad y = bz + q \dots (D),$$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \dots (P).$$

Questa inclinazione sarebbe una quantità indeterminata, se non si convenisse d'intendere per essa l'angolo compreso fra la retta (D) e la sua proiezione ortogonale sopra il piano (P); e questa scelta si fa sapendo che quest'angolo è il più piccolo di tutti quelli che la retta (D) forma con le diverse linee condotte per il suo piede nel piano, come si dimostra facilmente per mezzo della geometria. Risulta da questa definizione, che se da un punto della retta (D) si abbassa sopra il piano una normale (N), l'angolo di queste ultime due rette sarà il complemento di quello che si cerca. Ora, qualunque sia il punto donde si conduce la normale, le sue equazioni avranno la forma

$$x = a'z + p', \quad y = b'z + q' \dots (N),$$

con le relazioni $a' = \frac{A}{C}$, $b' = \frac{B}{C}$; e siccome, in virtù di quanto abbiamo detto di sopra (n°. 122), si ha per determinare l'angolo delle due rette (D) e (N),

$$\cos(D, N) = \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1} \sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}},$$

se ne concluderà, con la sostituzione dei valori precedenti di a' e b' , il seno dell'angolo del piano con la retta, cioè:

$$\sin(D, P) = \frac{Aa + Bb + C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{a^2 + b^2 + 1}}.$$

144. Paragoniamo adesso i piani fra loro, e cerchiamo prima di tutto le condizioni le quali esprimono che due piani sono paralleli. Siano

$$Ax + By + Cz + D = 0 \dots (P),$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \dots (P'),$$

le equazioni di questi piani. Sarà *necessario e sufficiente* che le loro tracce sopra ciascuno dei piani coordinati siano rispettivamente parallele; se dunque si pone successivamente nelle equazioni (P) e (P'), $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, si troveranno le condizioni

$$\frac{C}{B} = \frac{C'}{B'}, \quad \frac{C}{A} = \frac{C'}{A'}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A'}{B'},$$

le quali si riducono alle due seguenti,

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'};$$

vale a dire che i soli coefficienti dei termini variabili devono essere rispettivamente proporzionali nelle due equazioni; che anzi si potrà sempre rendere questi tre coefficienti rispettivamente eguali, dividendo il termine costante D' pel fattore comune che farà distinguere A' , B' , C' da A , B , C .

145. Trovare l'angolo di due piani dati dalle equazioni superiori (P) e (P').

Se s'immagina che la figura 4 della Tavola XXVIII sia eseguita sopra un piano

di proiezione perpendicolare ai due piani proposti, questi vi saranno rappresentati dalle loro tracce AP, AP', e l'angolo PAP' misurerà evidentemente l'inclinazione di questi piani. Ma se si conducono loro due perpendicolari pel punto A, si riconoscerà facilmente che l'angolo NAN' = PAP'; d'altronde, siccome queste rette prolungate indefinitamente formano, egualmente che i piani, quattro angoli supplementarij a due a due, si può dire generalmente che queste due normali comprendono fra loro i medesimi angoli dei piani di cui si tratta; e ciò sarà vero ancora di due altre rette parallele ad AN, AN', e condotte per un punto qualunque dello spazio. Ciò posto, conducendo per l'origine due perpendicolari ai piani (P) e (P'), esse avranno per equazioni

$$(N) \dots x = az, \quad y = bz \quad \text{con le condizioni} \quad a = \frac{A}{C}, \quad b = \frac{B}{C},$$

$$(N') \dots x = a'z, \quad y = b'z \dots \dots \dots a' = \frac{A'}{C'}, \quad b' = \frac{B'}{C'},$$

e gli angoli di queste due normali saranno determinati (n°. 122) dalla formula

$$\cos(N, N') = \frac{aa' + bb' + 1}{\pm \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}};$$

dunque, sostituendo in questa espressione i valori di a , a' , b , b' , avremo per gli angoli dei due piani

$$\cos(P, P') = \frac{AA' + BB' + CC'}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

formula nella quale il doppio segno da cui è affetto il secondo membro corrisponde agli angoli acuti e ottusi che comprendono i due piani indefiniti.

146. Per calcolare gli angoli che fa un piano (P) con i piani coordinati, basta esprimere nella formula precedente, che il secondo piano (P'), che era qualunque, viene a coincidere con uno di questi. Ora, perchè il piano (P') divenga, per esempio, il piano XY, bisogna evidentemente fare nella sua equazione $A' = 0$, $B' = 0$ e $D' = 0$; dunque in questo caso si ha per l'angolo del piano (P) col piano XY,

$$\cos(P, XY) = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \cos(N, Z);$$

si troverebbe in una maniera simile

$$\cos(P, XZ) = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \cos(N, Y),$$

$$\cos(P, YZ) = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \cos(N, X).$$

Questi tre angoli del piano (P) con i piani coordinati sono evidentemente i medesimi di quelli della normale (N) con i tre assi; e così, facendo la somma dei loro quadrati, si trova, come al n°. 121, la relazione

$$\cos^2(P, XY) + \cos^2(P, XZ) + \cos^2(P, YZ) = 1.$$

147. Gli angoli di un piano (I) con i piani coordinati lasciano sempre un'ambiguità la quale non può togliersi che sostituendo al piano, supposto primieramente trasportato parallelamente a sè medesimo fino all'origine degli assi, una normale condotta per questo punto, e prolungata verso una sola delle facce del piano. Gli angoli di questa normale con gli assi positivi sono allora completamente determinati, poichè nelle formule del n°. 146 sarà necessario prendere il radicale col segno stesso di quello del coefficiente C, quando la normale formerà un angolo acuto con OZ, e col segno contrario, quando essa formerà un angolo ottuso. Quanto alla maniera di definire la faccia del piano sopra la quale si vuole elevare questa normale, è necessario cercarne i mezzi in ciascun problema in particolare: per esempio, nelle questioni di Meccanica, in cui esistono delle forze le quali tendono a far girare il loro raggio vettore intorno all'origine, si può convenire che la normale venga elevata in modo che lo spettatore situato sopra questa retta, e coi piedi sopra il piano, veda il moto di rotazione effettuarsi sempre dalla sua sinistra verso la sua destra. Si potrebbe ancora adottare l'ipotesi contraria; ma la prima offre il vantaggio che quando la normale così definita formerà degli angoli acuti coi semiasse positivi disposti secondo l'uso consueto, la proiezione del raggio vettore sopra i piani coordinati si moverà nell'ordine alfabetico delle lettere, cioè: da OX verso OY, da OY verso OZ, e da OZ verso OX.

Eguualmente, per misurare senza ambiguità l'angolo di due piani (P) e (P'), sarà necessario prendere l'angolo compreso fra due normali dirette rapporto a ciascuno di questi piani, nel modo che abbiamo indicato per uno solo.

148. L'equazione del piano prende una forma degna di osservazione, e utile alcune volte ad impiegarla, quando vi s'introduce la perpendicolare d abbassata dall'origine sopra questo piano, e gli angoli t, u, v , che fa questa normale coi semiasse positivi, OX, OY, OZ. Per abbreviare la discussione, supponiamo che prima di tutto nell'equazione

$$Ax + By + Cz + D = 0 \dots (P)$$

si sia reso negativo nel primo membro il termine D mediante un opportuno trasporto; allora l'espressione della perpendicolare abbassata dall'origine (n°. 140) sarà della forma

$$d = \frac{D}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

e gli angoli t, u, v , saranno dati (n°. 146) dalle formule

$$\cos t = \frac{A}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos u = \frac{B}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos v = \frac{C}{+\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

poichè, dietro la preparazione effettuata sopra il termine D, tutti i radicali si debbono prendere positivamente. Infatti, il piano proposto taglia gli assi coordinati a distanze

$$x' = \frac{-D}{A}, \quad y' = \frac{-D}{B}, \quad z' = \frac{-D}{C},$$

le quali avranno evidentemente i medesimi segni di A, B, C: ora, quando la distanza x' sarà positiva, è facile accorgersi che l'angolo t della normale d sarà acuto, e che perciò $\cos t$ dovrà essere positivo; ma siccome allora si ha $A > 0$, bisogna perciò nell'espressione di questo coseno prendere il radicale col segno +.

Se al contrario la distanza x' fosse negativa, l'angolo ϵ sarebbe necessariamente ottuso; e siccome in questo caso si avrebbe $A < 0$, bisognerebbe parimente prendere il radicale positivo. La medesima discussione potendosi applicare agli altri angoli, ne risulta che i coseni devono essere scritti come abbiamo fatto di sopra; ed allora se ne conclude

$$A = \frac{-D}{d} \cos t, \quad B = \frac{-D}{d} \cos u, \quad C = \frac{-D}{d} \cos v,$$

donde, facendo le opportune sostituzioni nell'equazione (P), si ottiene per l'equazione del piano,

$$x \cos t + y \cos u + z \cos v = -d.$$

Sotto questa forma, il secondo membro d sarà sempre una quantità essenzialmente positiva, e i coseni soli potranno avere segni diversi, secondo la posizione del piano, o piuttosto della normale d , relativamente ai semi-assi delle coordinate positive.

149. *Condizione perchè due piani siano perpendicolari fra loro.*

In questo caso è necessario ed è sufficiente che il valore trovato (n° 145), per il coseno dell'angolo dei due piani, divenga nullo: dunque si dovrà avere la relazione

$$AA' + BB' + CC' = 0.$$

150. *Determinare l'intersezione di due piani rappresentati dalle equazioni*

$$Ax + By + Cz + D = 0 \dots (P),$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \dots (P').$$

Potremmo contentarci, dietro le riflessioni fatte al n°. 103, di dire che la retta domandata è sufficientemente determinata dal sistema delle equazioni (P) e (P') prese simultaneamente, supponendo cioè che x, y, z ricevano successivamente i medesimi valori. Infatti, sotto questo punto di vista, non rimane che una sola di queste variabili da prendersi arbitrariamente; dimanierachè se si pone successivamente $z = 1, 2, 3 \dots$, e se quindi si calcolano con le equazioni (P) e (P') i valori corrispondenti di x e di y , si determineranno tanti punti quanti si vorranno dell'intersezione dei due piani. Ma se si vogliono conoscere le proiezioni di questa retta, converrà rammentarsi (n°, 93 e 107) che le variabili, x e z , per esempio, rappresentano nel medesimo tempo le coordinate di un punto dell'intersezione nello spazio, e quelle della proiezione di questo punto sopra il piano XZ: dunque si otterrà l'equazione di questa proiezione eliminando y fra (P) e (P').

Lo stesso ragionamento dimostra che basta eliminare x per avere la proiezione sopra YZ; dimanierachè, senza sviluppare adesso i calcoli, arriveremo evidentemente a due equazioni della forma

$$x = az + p \dots (1), \quad y = bz + q \dots (2).$$

Se queste ultime sono più comode per rappresentare la posizione dell'intersezione, ciò dipende dall'appartenere esse (n°. 105) a due piani che passano per questa retta, e che hanno la proprietà di essere perpendicolari, l'uno ad XZ, e l'altro ad YZ; ma non è per questo meno vero che le equazioni (P) e (P'), sotto la loro forma attuale, e prese simultaneamente, determinano pienamente la retta domandata al pari delle equazioni (1) e (2).

151. Con ragioni del tutto simili si proverebbe che la curva risultante dall'intersezione di due superficie rappresentate da

$$F(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0,$$

rimane completamente determinata tanto dal sistema di queste due equazioni, prese simultaneamente, quanto dalle equazioni delle sue proiezioni

$$x=f(z), \quad y=f'(z),$$

Jedotte dalle precedenti, eliminando successivamente y ed x ; d'altronde queste ultime rappresentano pure due superficie, cioè dei cilindri paralleli ad OY e ad OX (n°. 98).

Nel seguente problema avremo luogo di applicare diverse delle formule ottenute precedentemente.

152. *Trovare la grandezza e la posizione della più corta distanza di due rette, che si suppongono non essere in un medesimo piano, e che hanno per equazioni*

$$\begin{aligned} x &= az+p, & y &= bz+q \dots (L), \\ x &= a'z+p', & y &= b'z+q' \dots (L'). \end{aligned}$$

Per risolvere la prima parte di questo problema, s'immagini per la retta (L) un piano (P) parallelo ad (L'), il che è sempre possibile, poichè basta far passare questo piano per la prima linea e per una retta condotta da un punto di questa parallellamente alla seconda (ma per esprimere analiticamente queste condizioni, ci serviremo in breve di un metodo più semplice). Immaginiamo ancora condotto per la retta (L') un piano (P') parallelo a (L): questi due piani saranno necessariamente paralleli fra loro, e la loro distanza misurerà evidentemente la grandezza della più corta distanza delle due rette proposte.

Ora, il piano (P) avrà un'equazione che, per semplificare i calcoli, potrà scriversi

$$Ax+By+z+D=0 \dots (P);$$

ma poichè esso è parallelo alla retta (L') e di più contiene la retta (L), si avranno (n°. 134 e 135) le condizioni

$$Aa'+Bb'+1=0 \dots (1),$$

$$Aa+Bb+1=0 \dots (2),$$

$$Ap+Bq+D=0 \dots (3),$$

le prime due delle quali danno

$$A=\frac{b-b'}{ab'-a'b}, \quad B=\frac{a'-a}{ab'-a'b},$$

e la terza determinerà D sostituendovi i valori di A e di B. Parimente il piano (P') avrà per equazione

$$A'x+B'y+z+D'=0 \dots (P'),$$

con le condizioni

$$A'a+B'b+1=0 \dots (4),$$

$$A'a'+B'b'+1=0 \dots (5),$$

$$A'p'+B'p'+D'=0 \dots (6);$$

e senza risolvere le equazioni (4) e (5), si vede chiaramente, paragonandole con le equazioni (1) e (2), che esse condurranno ad $A'=A$, $B'=B$, come si doveva prevedere, poichè i piani (P) e (P') sono necessariamente paralleli: quanto al valore di D', esso si dedurrà dall'equazione (6).

Ciò posto, abbassiamo dall'origine due perpendicolari d e d' sopra questi piani paralleli; esse saranno espresse (n°. 140) da

$$d=\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+1}}, \quad d'=\frac{D'}{\sqrt{A'^2+B'^2+1}};$$

e la loro differenza $d'-d$ o $d-d'$ misurerà la distanza dei due piani, cioè la più corta distanza d'' delle rette proposte; dunque, sostituendo i valori di D e di D' , ricavati dalle condizioni (3) e (6), e quindi quelli di A e di B , si avrà

$$d'' = \frac{A(p-p') + B(q-q')}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}} = \frac{(p-p')(b-b') - (q-q')(a-a')}{\sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (a'b' - a'b)^2}} \dots (7).$$

153. È essenziale l'osservare che per ottenere la vera grandezza di d'' in tutti i casi, è necessario conservare ai numeratori D e D' i segni dai quali saranno affetti, e quindi prender sempre la loro differenza *analitica*. Infatti, siccome i due piani (P) e (P') tagliano l'asse OZ alle distanze $z = -D$, $z' = -D'$, se i termini D e D' sono dello stesso segno, questi piani paralleli si troveranno da una medesima parte rapporto all'origine degli assi, e in questo caso la loro distanza sarà veramente eguale alla differenza delle grandezze assolute delle perpendicolari d' e d , cioè sarà data da

$$\frac{\pm(D'-D)}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}.$$

Al contrario, quando D e D' sono di segni opposti, l'origine delle coordinate è situata fra i due piani, e allora la vera distanza d'' si trova sommando i valori assoluti delle perpendicolari d , d' ; ma questa somma equivale sempre alla differenza *analitica*

$$\frac{\pm(D'-D)}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}.$$

Dunque, in tutti i casi, la regola enunciata di sopra è giusta; e solamente, nel valore definitivo di d'' , bisognerà rendere il risultato positivo, dando al radicale lo stesso segno del numeratore.

154. Si può, nella formula (7), introdurre l'angolo ν che fanno tra loro le due rette proposte, e gli angoli l, m, n, l', m', n' che esse formano con gli assi. Infatti, per l'ultima formula del n.º 122, il valore di d'' può scriversi nella seguente guisa

$$d'' = \frac{(p-p')(b-b') - (q-q')(a-a')}{\sin \nu \sqrt{a^2 + b^2 + 1} \sqrt{a'^2 + b'^2 + 1}};$$

e sostituendo i valori trovati di sopra (n.º 120.) $a = \frac{\cos l}{\cos n}$, $b = \frac{\cos m}{\cos n}$, $a' = \frac{\cos l'}{\cos n'}$,

$b' = \frac{\cos m'}{\cos n'}$, ed osservando che si ha (n.º 121) $\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1$, si otterrà

$$d'' = \frac{(p-p')(\cos m \cos n' - \cos m' \cos n) + (q-q')(\cos n \cos l' - \cos n' \cos l)}{\sin \nu} \dots (8).$$

155. Quanto alla seconda parte del problema, la quale consiste nel trovare la posizione della linea (L'') , sopra la quale si misura la più corta distanza delle rette proposte, basta osservare che questa linea (L'') , dovendo essere perpendicolare nel medesimo tempo a (L) ed (L') , sarà determinata dall'intersezione di due piani (P'') e (P''') condotti l'uno per (L) , l'altro per (L') , e tutti e due perpendicolari a (P) . Ora questi nuovi piani saranno determinati dalle equazioni,

$$\begin{array}{l|l} (P'') \dots A''x + B''y + z + D'' = 0, & (P''') \dots A'''x + B'''y + z + D''' = 0, \\ A''A + B''B + 1 = 0, & A'''A + B'''B + 1 = 0, \\ A''a + B''b + 1 = 0, & A'''a' + B'''b' + 1 = 0, \\ A''p + B''q + D'' = 0, & A'''p' + B'''q' + D''' = 0. \end{array}$$

Dunque la retta cercata (L'') si troverà rappresentata analiticamente dal sistema delle equazioni (P'') e (P'''), prese simultaneamente, le quali divengono, dopo il calcolo dei coefficienti,

$$(x-p)[a-a'+b(a'b'-a'b)]+(y-q)[b-b'+a(a'b-ab')] = z[a(a-a')+b(b-b')],$$

$$(x-p')[a'-a+b'(a'b-ab')] + (y-q')[b'-b+a'(a'b'-a'b)] = z[a'(a'-a)+b'(b'-b)].$$

156. Osserviamo finalmente che, se le due rette (L) ed (L') si tagliassero, il numeratore della formula (7) diverrebbe nullo, per la condizione (5) del n.º 115, ed allora si troverebbe $d''=0$, come appunto doveva succedere; ma se queste rette fossero parallele, si avrebbe $d''=\frac{0}{0}$, quantunque la loro distanza sia per

tutto la stessa. Quest'ultimo risultato deriva dall'essere in questo caso assolutamente indeterminati i piani (P) e (P'), come possiamo convincercene risalendo alle condizioni che hanno servito a definirli, cioè osservando che le equazioni (1) e (2) del n.º 152 si riducono ad una sola. Tuttavia, per applicare anche a questo caso il medesimo metodo, basterebbe esprimere che i piani (P) e (P') sono condotti perpendicolarmente ad un piano che contenesse le due linee parallele; ma sarà molto più breve il cercare la perpendicolare abbassata da un punto di (L') sopra (L). Infatti, prendendo per questo punto la traccia della linea (L') sul piano xy , che è data da $z=0$, $x=p'$, $y=q'$, la formula del n.º 141 darà, per la distanza delle due rette parallele,

$$d''^2 = (p'-p)^2 + (q'-q)^2 - \frac{[a(p'-p) + b(q'-q)]^2}{1+a^2+b^2},$$

ovvero, per la formula (7) del n.º 117,

$$d''^2 = (p'-p)^2 + (q'-q)^2 - [(p'-p)\cos l + (q'-q)\cos m]^2.$$

157. Fissate le equazioni del piano e della linea retta nello spazio, passiamo a determinare l'equazione della sfera.

Sia r il raggio della sfera, p, q, t le coordinate del suo centro, e (x, y, z) denoti un punto qualunque sopra la superficie della sfera.

Allora, essendo r la distanza fra i punti (p, q, t) e (x, y, z) , si ha (n.º 96)

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-t)^2 = r^2,$$

e sviluppando si trova

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2px - 2qy - 2tz + p^2 + q^2 + t^2 = r^2. \dots (1),$$

per l'equazione generale della sfera, riferita ad assi rettangolari.

Se l'origine è sulla superficie della sfera, allora (n.º 96) $p^2 + q^2 + t^2 = r^2$, e l'equazione (1) si cambia in

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2px - 2qy - 2tz = 0 \dots (2).$$

Se l'origine è al centro, allora le coordinate del centro essendo ciascuna eguale a zero, l'equazione è

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \dots (3).$$

Se uno dei piani coordinati, per esempio il piano xy , passa pel centro, allora $t=0$, e l'equazione è

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 + z^2 = r^2 \dots (4);$$

e se uno degli assi, per esempio l'asse delle x , passa pel centro, allora $q=0$, e $t=0$, e l'equazione diviene

$$(x-p)^2 + y^2 + z^2 = r^2 \dots (5).$$

Termineremo con alcune applicazioni il presente articolo dell'analisi a tre dimensioni, estratto quasi del tutto dall'ottimo trattato: *Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions* del sig. Le-Roy, Parigi 1835, in-8. seconda edizione.

158. PROBLEMA I. Per un punto dato in un angolo triedro trirettangolo, condurre un piano in modo che la sua parte intercetta in questo angolo formi un triangolo simile ad un triangolo dato.

Si prendano le costole dell'angolo triedro trirettangolo per gli assi delle coordinate; rappresentiamo con a, b, c i lati del triangolo dato, e con A, B, C gli angoli rispettivamente opposti a questi lati; finalmente s'indiechino con x', y', z' le coordinate del punto dato.

L'equazione del piano essendo in generale della forma (n.º 126)

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

i segmenti che esso intercetterà sopra gli assi delle x, y, z , cioè le distanze alle quali incontrerà questi assi, si otterranno facendo successivamente (n.º 130) $y = z = 0$, $x = z = 0$, $x = y = 0$.

Chiamando quindi p, q ed r questi segmenti, l'equazione del piano diverrà, dopo le necessarie sostituzioni e riduzioni (n.º 130),

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1:$$

e poichè questo piano deve passare per il punto dato (x', y', z') si avrà

$$\frac{x'}{p} + \frac{y'}{q} + \frac{z'}{r} = 1,$$

donde, togliendo i denominatori, si otterrà per la prima equazione tra le incognite p, q, r ,

$$x'qr + y'pr + z'pq = pqr \dots (1).$$

Se adesso si fa

$$q^2 + r^2 = a'^2,$$

$$p^2 + r^2 = b'^2,$$

$$p^2 + q^2 = c'^2,$$

le linee o', b', c' saranno i lati del triangolo da costruirsi; ma questo triangolo deve esser simile al triangolo dato, i di cui lati sono a, b, c , dunque si avrà necessariamente, in virtù di questa similitudine,

$$\left. \begin{array}{l} a' = ma, \text{ e quindi } q^2 + r^2 = m^2 a^2, \\ b' = mb, \quad p^2 + r^2 = m^2 b^2, \\ c' = mc, \quad p^2 + q^2 = m^2 c^2, \end{array} \right\} \dots (2),$$

essendo il coefficiente m un numero da determinarsi. A tale oggetto combinando tra loro le equazioni (2) se ne dedurranno le seguenti

$$\left. \begin{array}{l} 2p^2 = m^2(b^2 + c^2 - a^2), \\ 2q^2 = m^2(a^2 + c^2 - b^2), \\ 2r^2 = m^2(a^2 + b^2 - c^2), \end{array} \right\} \dots (3);$$

ma dalla trigonometria si sa che rappresentando a , b , c i lati di un triangolo rettilineo, ed A , B , C gli angoli che sono loro rispettivamente opposti, si hanno le appresso relazioni,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

perciò introducendo queste relazioni nelle equazioni (3) avremo

$$2p^2 = 2m^2 bc \cos A,$$

$$2q^2 = 2m^2 ac \cos B,$$

$$2r^2 = 2m^2 ab \cos C,$$

e quindi

$$\left. \begin{aligned} p &= m \sqrt{bc \cos A} \\ q &= m \sqrt{ac \cos B} \\ r &= m \sqrt{ab \cos C} \end{aligned} \right\} \dots \dots (4).$$

Sostituendo questi valori nella relazione (1) si ottiene, dopo le riduzioni,

$$m = \frac{x'}{\sqrt{bc \cos A}} + \frac{y'}{\sqrt{ac \cos B}} + \frac{z'}{\sqrt{ab \cos C}},$$

valore che introdotto nelle equazioni (1) le cangerà nelle seguenti

$$p = x' + y' \sqrt{\frac{b \cos A}{a \cos B}} + z' \sqrt{\frac{c \cos A}{a \cos C}},$$

$$q = y' + z' \sqrt{\frac{c \cos B}{b \cos C}} + x' \sqrt{\frac{a \cos B}{b \cos A}},$$

$$r = z' + x' \sqrt{\frac{a \cos C}{c \cos A}} + y' \sqrt{\frac{b \cos C}{c \cos B}}.$$

Il problema proposto è dunque risoluto.

159. PROBLEMA II. *Trovare la prospettiva di una retta data nello spazio.*

Se per l'occhio e per la retta data s'immagina un piano indefinito, questo piano taglierà un quadro interposto tra l'occhio e la retta, lungo una linea che sarà la *prospettiva*, o l'apparenza della retta data. Il problema da risolversi si riduce dunque a trovare prima di tutto le equazioni del quadro o *piano prospettivo*, e del piano visuale, e quindi quella della traccia di questo ultimo piano sull'altro.

Le equazioni della retta data sono

$$x = az + p, \quad y = bz + q;$$

e supponendo l'occhio all'origine delle coordinate rettangolari, il piano che passa per questo punto avrà un'equazione della forma

$$Ax + By + z = 0 \dots \dots (1).$$

Ora, siccome questo piano deve contenere la retta proposta, così dovranno verificarsi le condizioni (4) e (5) precedentemente trovate al n°. 134, e si avranno per determinare i coefficienti A e B dell'equazione del piano (1) le due equazioni

$$Ap + Bq = 0 \dots \dots (2),$$

$$Aa + Bb + 1 = 0 \dots \dots (3).$$

Applicando ora a queste equazioni il calcolo dell'eliminazione, si troverà

$$A = \frac{-q}{aq - pb}, \quad B = \frac{p}{aq - pb};$$

e sostituendo questi valori nell'equazione (1), si avrà per l'equazione del piano visuale

$$-qx + py + (aq - pb)z = 0 \dots (4).$$

Adesso se si suppone che il quadro sia un piano verticale parallelo all'asse delle x , la sua equazione sarà $y = m$, essendo m una costante; sostituendo dunque ad y questa costante nell'equazione del piano (4), quella della prospettiva della retta data sarà

$$z(aq - pb) = qx - pm \dots (5).$$

Un'altra retta, le di cui equazioni fossero

$$x = a'z + p', \quad y = b'z + q',$$

avrebbe similmente per prospettiva

$$z(a'q' - p'b') = q'x - p'm \dots (6);$$

e se le due rette date fossero parallele fra loro, si esprimerebbe analiticamente questa circostanza, facendo $a' = a$, $b' = b$ nelle equazioni (5) e (6), le quali diverrebbero rispettivamente

$$z(aq - pb) = qx - pm \dots (5'),$$

$$z(aq' - p'b) = q'x - p'm \dots (6');$$

e si troverebbe allora che le coordinate dei punti d'intersezione delle prospettive di queste due rette parallele sarebbero sul quadro

$$x = \frac{ma}{b}, \quad z = \frac{m}{b}.$$

Da ciò risulta che qualunque sia il numero delle rette parallele fra loro, le loro prospettive si taglieranno in un solo punto; ed è questo punto d'intersezione che si chiama *punto accidentale* nei Trattati di Prospettiva lineare.

Il punto di vista sopra il piano prospettivo, è il piede della perpendicolare m abbassata dall'occhio sopra questo piano, o, in altri termini, è la proiezione ortogonale di quest'occhio.

Quando le rette date sono parallele e orizzontali, si ha

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a'} = 0, \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{b'} = 0,$$

e le coordinate del punto accidentale sul quadro sono

$$x = \frac{0}{0}, \quad z = 0.$$

Ma l'ascissa x non si presenterebbe sotto la forma indeterminata se i coefficienti a , e b fossero espressi in funzione delle coordinate x', y', z' , e x'', y'', z'' di due punti di una delle rette, per esempio della prima.

Infatti, si avrebbe in questo caso

$$a = \frac{x' - x''}{z' - z''}, \quad b = \frac{y' - y''}{z' - z''},$$

e quindi

$$x = \frac{ma}{b} = m \left(\frac{x' - x''}{y' - y''} \right), \quad z = 0.$$

Questo risultato dimostra che se le rette date fossero tolte perpendicolari al quadro, il che richiederebbe che si avesse $x' = x''$, il punto accidentale sarebbe al punto di vista o all'origine degli assi.

Se al contrario le rette orizzontali date fossero parallele al quadro, si avrebbe $y' = y''$, e le coordinate del punto accidentale sarebbero

$$x = m \left(\frac{x' - x''}{0} \right) = \infty, \quad z = \frac{m}{b} = m \left(\frac{z' - z''}{y' - y''} \right) = \frac{0}{0};$$

il che fa vedere che le loro prospettive sarebbero parallele all'asse delle x .

160. PROBLEMA III. *Conoscendo le aree di due sezioni parallele fatte nella sfera, e la distanza di queste sezioni, trovare il raggio della sfera, e il volume del segmento che ha queste medesime sezioni per basi.*

Sapendosi dalla geometria che le sezioni, della sfera sono circoli, i loro raggi saranno facili a determinarsi: se pertanto pel centro della sfera si conduce un piano perpendicolare alle sezioni di cui si tratta, questo piano taglierà le sezioni lungo due corde parallele, le quali saranno rispettivamente i diametri di queste medesime sezioni, così il problema si ridurrà a determinare il raggio di un circolo massimo della sfera, conoscendo le lunghezze delle corde parallele, e la loro più corta distanza.

Ciò posto, siano Mm , $M'm'$ (Tav. XXVIII, fig. 5) i diametri delle sezioni della sfera; e s'indichino con (p, q) (p', q') le coordinate dei punti M , M' ; con z' la sretta BP' ; con h l'intervallo PP' ; e finalmente con r il raggio cercato AB ; si avrà $p = r - z' - h$, $p' = r - z'$. Ora, per una proprietà del circolo, si ha

$$\left. \begin{aligned} p^2 + q^2 &= r^2 \\ p'^2 + q'^2 &= r^2 \end{aligned} \right\} \text{ ovvero } \left\{ \begin{aligned} (r - h - z')^2 + q^2 &= r^2 \\ (r - z')^2 + q'^2 &= r^2 \end{aligned} \right\} \dots (A);$$

e, sviluppando e prendendo la differenza di queste due ultime equazioni, si trova

$$z' = \frac{q'^2 - q^2}{2h} + r - \frac{h}{2}.$$

Facendo adesso, per semplificare,

$$\frac{q'^2 - q^2}{h} = u,$$

si avrà

$$z' = -\frac{u}{2} + r - \frac{h}{2};$$

e, sostituendo questo valore nella seconda equazione (A), si otterrà

$$4r^2 = 4q'^2 + (u + h)^2.$$

Questo risultato è precisamente l'espressione della proprietà del triangolo rettangolo che ha $2r$ per ipotenusa, e di cui i due lati dell'angolo retto sono $2q'$ e $u + h$; dunque se nel punto m' si eleva $m'N$ perpendicolarmente alla corda minore $M'm'$, e se si prende QN eguale alla quarta proporzionale alle tre linee

$m'Q$, MQ , Qm , cioè $= \frac{q^2 - q'^2}{h}$, la retta NM' sarà il diametro domandato.

Si tratta adesso di trovare l'espressione del volume del segmento sferico $MM'm'm$. Ora, il segmento sferico ad una sola base essendo la differenza tra il settore circolare e il cono che ha la medesima base di quella del segmento, e il di cui vertice è al centro della sfera, risulta, per ciò che si ha dalla Geometria, che

il segmento sferico MBm ha per misura $\pi z^2 \left(r - \frac{1}{3}z \right)$, e che quella del segmen-

to sferico $M'Bm'$ è $\pi z'^2 \left(r - \frac{1}{3}z' \right)$, indicando con z e z' rispettivamente le siette

BP , $B'P'$. Il volume V del segmento $MM'm'm$ che si considera è dunque

$$V = \pi r(z^2 - z'^2) - \frac{1}{3}\pi(z^3 - z'^3).$$

Ma $h = z - z'$, per conseguenza si ha

$$V = \pi h \left[r(z + z') - \frac{1}{3}(z^2 + zz' + z'^2) \right].$$

Di più l'equazione del circolo, ponendo l'origine al punto B , dà (n°. 77)

$$q^2 = 2rz - z^2, \quad q'^2 = 2rz' - z'^2,$$

donde si ha

$$q^2 + q'^2 = 2r(z + z') - (z^2 + z'^2);$$

e quindi

$$r(z + z') = \frac{q^2 + q'^2 + z^2 + z'^2}{2};$$

il qual valore, essendo sostituito in quello V , dà infine

$$V = h \left(\frac{\pi q^2 + \pi q'^2}{2} \right) + \frac{\pi h^3}{6}.$$

Cioè, il volume del segmento sferico a due basi parallele ha per misura la semisomma di queste basi moltiplicata per la sua altezza, più il volume della sfera di cui questa altezza è il diametro.

Per completare l'importante articolo dell'analisi a tre dimensioni, si potranno consultare in questo Dizionario gli articoli, CENTRO, DIAMETRO, DISCUSSIONE, CURVA, SEZIONI, PIANI, SUPERFICIE; come pure le seguenti opere: Puissant, *Recueil de diverses propositions de géométrie résolues ou démontrées par l'analyse algébrique*, Parigi, 1824, in-8; Bourdon, *Application de l'Algèbre à la géométrie, contenant les deux trigonometries et la géométrie à trois dimensions*, Parigi, 1837 in-8; Biot, *Essai de géométrie analytique*, Parigi 1837 in-8; Lefebvre de Fourcy, *Leçons de géométrie analytique*, Parigi, 1834, in-8; Le Roy, *Analyse appliquée à la géométrie des trois dimensions*, Parigi 1834 in-8; Inghirami, *Elementi di matematiche*, Firenze, 1833, Vol. 2. in-8; Lotteri, *Lezioni d'introduzione al calcolo sublime*, Pavia 1820, Vol. 2. in-4; ec.

APPOGGIATO (Geom.). Un angolo si dice appoggiato sopra un arco di circolo quando, avendo il suo vertice sopra la circonferenza, esso intercetta quest'arco fra i suoi lati. Così l'angolo PRQ (Tav. XX, fig. 6), che ha il vertice sulla circonferenza $PRQN$, si dice appoggiato sull'arco PNQ , perchè appunto intercetta quest'arco tra i suoi lati PR e QR .

Tutti gli angoli appoggiati sopra uno stesso arco sono eguali, poichè tutti hanno per misura la metà di questo arco. *Vedi* **Angolo** (n.º 21).

APPOGGIO. Punto di Appoggio di una leva (*Mecc.*). Punto fisso intorno al quale il peso e la potenza si equilibrano nella leva.

Così in una bilancia ordioraria il punto di mezzo, punto a cui la bilancia si sospende, è il punto di appoggio. Il punto di appoggio in una leva, quando la potoeza e i pesi sono in direzioni parallele, è sempre caricato di una quatotità eguale alla somma della potoeza e del peso. Così, in una bilancia ordinaria a braccia eguali, il carico del punto di appoggio è eguale alla somma dei pesi che sono nei piatti della bilancia, cioè al doppio di uno di questi pesi. Da ciò si vede che l'appoggio è meno caricato nella bilancia chiamata *romana*, o *stadera*, che nella bilancia ordinaria; poichè per pesare, per esempio, un peso di sei libbre con la bilancia ordinaria, è necessario che dall'altra parte vi sia un peso di sei libbre, ed il carico dell'appoggio è di dodici libbre, quando serveodosi della stadera, si può pesare il peso di sei libbre col peso di una libbra, ed il carico dell'appoggio non è in questo caso che di sette libbre. *Vedi* **LEVA**, **STADERA**, **ROMANA**, *ec.*

APPROCCII (*Fortificazione*). È questo un nome che si dà a tutti i lavori che si fanno in un assedio per avvicinarsi alla piazza assediata, mettedosi al coperto del suo fuoco. *Vedi* **FORTIFICAZIONE**.

APPROSSIMAZIONE (*Artim. e Alg.*). Metodo di valutare una quantità, avvicinandosi continuamente alla sua vera grandezza. Ad eccezione dei numeri *razionali*, interi o frazionarij, tutti gli altri numeri non avendo no *rapporto finito* con l'unità, quando si tratta di *misurarli*, o di paragonarli coll'unità, si ha bisogno di conoscere i numeri razionali dai quali essi differiscono il meno possibile, onde assegnare i valori *approssimati* dei rapporti che non si possono ottenere esattamente. Per esempio, se si volesse paragonare $\sqrt{2}$ coll'unità, o se si desiderasse conoscere quante unità e quante parti dell'unità siano contenute in $\sqrt{2}$, bisognerebbe calcolare i numeri razionali che differiscono il meno possibile dal vero valore di $\sqrt{2}$; e siccome questo vero valore, espresso io frazioni decimali, contiene un numero infinito di cifre, è evidente che quanto maggiore sarà il numero delle cifre che si prenderanno, tanto più ci avvicineremo al rapporto esatto di 1 e di $\sqrt{2}$. È in tal modo che contentandosi di un valore approssimato, che differisca dal vero valore meno di un *centesimo*, si ha

$$\sqrt{2} = 1,41 \dots$$

Se si domanda questo valore a meco di un *millesimo*, si ha

$$\sqrt{2} = 1,414 \dots$$

E se infine si ha bisogno di spingere l'approssimazione fino ad un *diecimillesimo*, si trova

$$\sqrt{2} = 1,4142 \dots$$

Ora, il metodo per avvicinarsi continuamente alla grandezza di una quantità, è ciò che si chiama *approssimazione*.

Nei calcoli ordinarij ci contentiamo ancora dei valori *approssimati* dei numeri frazionarij, quando questi numeri sono espressi da una quantità di cifre troppo grande, perchè il loro rapporto con l'unità, da cui questi numeri dipendono, possa essere facilmente compreso. Così, per esempio, avendo trovato 150 metri

e $\frac{4985}{29643}$ di metro, per risultato di un calcolo qualunque in un quesito io cui

sia inutile considerare le quantità più piccole del *millimetro*, si riduce la fra-

zione ordinaria in frazione decimale arrestandosi alla terza cifra del quoziente della divisione; il che dà

$$\frac{4985}{29643} = 0,168 \dots$$

Donde si conclude che il risultato trovato è, a meno di un millimetro circa, eguale a $150^m,168$. In tal genere di quesiti, l'approssimazione è sempre sufficiente quando essa si eleva alle più piccole suddivisioni delle quantità sulle quali si opera.

Vi è ancora, per le frazioni ordinarie, un'approssimazione di una natura diversa: ed è quando si domandano altre frazioni ordinarie che differiscano pochissimo dalle proposte, e che siano espresse coi numeri i più piccoli possibili. Si vedano nel Dizionario, per tutte queste ricerche, le parole: **MOLTIPLICAZIONE**, **DIVISIONE**, **FRAZIONE**, **FRAZIONE DECIMALE** e **FRAZIONE CONTINUA**.

Quanto all'approssimazione dei numeri incommensurabili, si vedano le parole: **ESTRAZIONE DI RADICI**, **LOGARITMI**, e **CIRCOLO**.

APPROSSIMAZIONE delle radici delle equazioni. La risoluzione teorica delle equazioni, cominciando dal quinto grado, essendo ancora un problema al di sopra delle forze attuali della scienza, e quella ancora delle equazioni del terzo e del quarto grado essendo spesso laboriosissima col mezzo delle regole generali, gli sforzi dei geometri si sono rivolti ai metodi di approssimazione. Sotto questo rapporto, almeno, i loro successi sono stati più completi. Senza parlare in questo luogo dei primi tentativi di Viète, che non possono più meritare attenzione se non per la parte storica dell'Algebra, esporremo successivamente i metodi generali che l'uso ha consacrato.

Il più comune di questi metodi è dovuto a Newton, che lo comunicò a Barrow fin dall'anno 1669, nel suo scritto intitolato: *Analysis per equationes numero terminorum infinitos*. Ecco in che consiste.

Sia l'equazione generale del grado m , che abbia radici reali,

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \text{ec.} \dots + A_m = 0,$$

e sia a un valore approssimato di una di queste radici, valore che può sempre trovarsi in modo che differisca meno di un'unità dal vero valore. *Vedi* **LIMITI**.

Indicando con z la quantità di cui a differisce dal vero valore di x , avremo l'eguaglianza

$$x = a + z.$$

Si tratta dunque di determinare il valore di z . A questo effetto, si sostituisce $a+z$ in luogo di x nell'equazione proposta, ed allora essa diverrà

$$(a+z)^m + A_1(a+z)^{m-1} + A_2(a+z)^{m-2} + \text{ec.} \dots + A_m = 0.$$

Sviluppando le potenze dei binomj, e ordinando rapporto a z , otterremo una equazione in z della forma

$$B + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + \text{ec.} \dots + z^m = 0.$$

Ora a non dovendo differire da x che di una quantità minore dell'unità, z sarà una frazione, e per conseguenza z^2 , z^3 , z^4 , ec., saranno pure frazioni continuamente più piccole. Trascurando dunque i termini in cui queste quantità si trovano, avremo l'equazione

$$B + B_1 z = 0,$$

che sarà tanto più esatta quanto z sarà più piccola. Il valore approssimato di z sarà dunque

$$z = -\frac{B}{B_1},$$

e quindi quello di x

$$x = a - \frac{B}{B_1}.$$

Adesso, esprimendo con m questa prima approssimazione, e con z' la quantità di cui essa differisce dal vero valore di x , avremo nuovamente

$$x = m + z'.$$

Sostituendo $m + z'$ in luogo di x nell'equazione proposta, e continuando come sopra, arriveremo ad una nuova equazione in z'

$$C + C_1 z' + C_2 z'^2 + C_3 z'^3 + \text{ec} + z'^m = 0;$$

la quale, trascurando tutti i termini affetti dalle potenze superiori di z' , si ridurrà a

$$C + C_1 z' = 0.$$

Donde ne ricaveremo

$$z' = -\frac{C}{C_1},$$

e quindi

$$x = a - \frac{B}{B_1} - \frac{C}{C_1},$$

secondo valore approssimato di x . Continuando nella stessa maniera, si otterranno successivamente nuovi valori che differiranno sempre meno dal vero valore, al quale possiamo così avvicinarci indefinitamente. Un esempio renderà più chiaro questo metodo.

ESEMPIO. Si domanda una delle radici dell'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Dopo aver trovato che una delle radici è compresa tra 2 e 3, si farà

$$x = 2 + z.$$

Sostituendo questo valore nell'equazione, si avrà

$$\begin{aligned} x^3 &= 8 + 12z + 6z^2 + z^3 \\ - 2x &= -4 - 2z \\ - 5 &= -5, \end{aligned}$$

donde $10z - z = 0$, trascurando i termini che contengono z^2 e z^3 .

Quest' ultima equazione dà $z = \frac{1}{10}$. Si ha dunque, per primo valore approssimato di x ,

$$x = 2 + \frac{1}{10} = 2,1.$$

Facendo adesso

$$x = 2,1 + z', \quad \text{ovvero} \quad x = 2,1 + z,$$

poichè è inutile il prendere un carattere diverso da z , e sostituendo nella proposta, avremo

$$\begin{aligned}x^3 &= (2,1)^3 + 3(2,1)^2z + \text{ec.} \\ -2x &= -2(2,1) - 2z \\ -5 &= -5,\end{aligned}$$

e per conseguenza $0,061 + 11,23z = 0$.

Donde si ottiene

$$z = -\frac{0,061}{11,23} = -0,0054,$$

limitandosi alla quarta cifra decimale.

Abbiamo dunque per secondo valore approssimato di x

$$x = 2,1 - 0,0054 = 2,0946.$$

Facciamo ancora

$$x = 2,0946 + z,$$

ed avremo

$$\begin{aligned}x^3 &= (2,0946)^3 + 3(2,0946)^2z + \text{ec.} \\ -2x &= -2(2,0946) - 2z \\ -5 &= -5,\end{aligned}$$

donde

$$0,000541550 + 11,16204748z = 0,$$

e

$$z = -\frac{0,000541550}{11,16204748} = -0,00004851;$$

il che dà per terzo valore approssimato di x

$$x = 2,0946 - 0,00004851 = 2,09455149,$$

del quale le sette prime cifre decimali sono esatte.

Continuando nella stessa maniera, si otterrebbe un numero di cifre esatte tanto grande quanto si volesse.

Avanti di passare ai metodi più moderni, dobbiamo parlare di due altri processi fondati sul medesimo principio, e che sono stati trovati da Halley, e Raphson, poco tempo dopo la scoperta di Newton, della quale pare provato che essi non avessero veruna cognizione.

Il processo di Halley differisce da quello di Newton soltanto perchè in esso si conservano nelle successive equazioni i termini che contengono le seconde potenze di z ; ma con un metodo ingegnoso, che egli attribuisce a Lagny, Halley riduce in fine tutta l'operazione ad una semplice divisione. Si vedano le *Trasazioni filosofiche*, n°. 210, anno 1694.

Il processo di Raphson non è in realtà che una semplicizzazione di quello che abbiamo esposto. Come tale però, merita di essere esposto.

Sia, come di sopra abbiamo fatto, α il valore approssimato, a meno di nn' unità, di una delle radici dell'equazione

$$x^m + A_1x^{m-1} + A_2x^{m-2} + A_3x^{m-3} + \text{ec} \dots + A_m = 0 \dots (m).$$

Moltiplicando ciascun termine di questa equazione per l'esponente della potenza di x che vi si trova contenuta, e diminuendo quindi tutti gli esponenti di un' unità, si ottiene l'espressione

$$mx^{m-1} + (m-1)A_1x^{m-2} + (m-2)A_2x^{m-3} + \text{ec} \dots + A_{m-1} \dots (n),$$

che non è altra cosa che la derivata differenziale dell'equazione (m). In questa operazione si considera il termine assoluto A_m come se fosse $A_m x^0$, ed allora, moltiplicandolo per l'esponente zero, esso sparisce.

Se s'indica con M ciò che diviene l'equazione (m) quando vi si sostituisce a in luogo di x , e con N ciò che diviene l'espressione (n) per la medesima sostituzione, e riflettendo che M ed N non sono altra cosa che i coefficienti B , B_1 trovati di sopra, il valore approssimato di x , che si vide eguale ad $a - \frac{B}{B_1}$,

sarà

$$x = a - \frac{M}{N}.$$

Per mezzo di questo valore si otterrà una seconda approssimazione operando nella stessa maniera, e così di seguito. Faremo un'applicazione di questo metodo all'equazione del precedente esempio.

L'equazione data essendo

$$x^3 - 2x - 5 = 0 \dots (1),$$

la sua derivata è

$$3x^2 - 2 \dots (2),$$

e di più sappiamo che $a = 2$.

Sostituendo 2 in luogo di x nell'equazione (1) e nell'espressione (2), troveremo

$$8 - 4 - 5 = M,$$

$$12 - 2 = N,$$

donde

$$x = 2 - \frac{M}{N} = 2 + \frac{1}{10}.$$

Sostituendo di nuovo 2,1 in (1) e (2), avremo

$$(2,1)^3 - 2(2,1) - 5 = M,$$

$$3(2,1)^2 - 2 = N;$$

donde

$$x = 2,1 - \frac{M}{N} = 2,1 - \frac{0,061}{11,23} = 2,0946.$$

Sostituendo ancora 2,0946 in (1) e (2), otterremo

$$(2,0946)^3 - 2(2,0946) - 5 = M,$$

$$3(2,0946)^2 - 2 = N,$$

e quindi

$$x = 2,0946 - \frac{M}{N} = 2,09455149.$$

Ogni sostituzione ci dà dunque i medesimi valori già ottenuti col processo di Newton; solamente il metodo è più semplice. Raphson ha ancora facilitato l'applicazione del suo processo, calcolando alcune tavole per mezzo delle quali si ottengono le quantità che abbiamo indicate con M ed N , per ciascuna equazione fino a quelle del decimo grado inclusive. Si consulti l'opera di Raphson intitolata, *Analysis aequationum universalis*, Londra, 1690 in-4.

Non dobbiamo però concludere, dall'approssimazione rapida che abbiamo ottenuta pel valore di x , nell'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$, che il processo di Raphson o di Newton possa applicarsi con lo stesso vantaggio in tutti i casi. Se il primo

valore approssimato a differisse dal vero più di $\frac{1}{10}$, l'approssimazione sarebbe molto

più lenta, e l'operazione esigerebbe un gran numero di sostituzioni. È dunque importante, prima di far uso di questo processo, di trovare un valore di x i di cui limiti siano più approssimati di a e $a+1$; una semplice applicazione della regola di *Falsa Posizione* può abbreviare i calcoli. Per esempio, dopo aver trovato che l'espressione $x^3 - 2x - 5$ si riduce a -1 facendo $x=2$, e a $+16$ facendo $x=3$, il che dimostra evidentemente che il valore di x è più vicino a 2 che a 3, si moltiplica il risultato di ciascuna sostituzione pel valore dell'altra sostituzione, e si divide la somma dei prodotti per quella dei risultati. Il quoziente è già un valore più approssimato ad x di 2 e di 3 (*Vedi FALSA POSIZIONE*), e l'applicazione del processo di Newton conduce allora ad un'approssimazione molto più pronta.

Nel nostro esempio avremo

$$\frac{1 \times 3 + 16 \times 2}{1 + 16} = \frac{35}{17} = 2,05,$$

limitandosi ai centesimi.

Partendo dunque da questo valore, la prima sostituzione darà $x=2,052$, che differisce molto meno dal vero di $x=2,1$ trovato di sopra; e, conseguentemente, le sostituzioni seguenti daranno pure risultati più approssimati.

Nella sua bella opera sopra la *Risoluzione delle equazioni numeriche*, Lagrange ha esaminato la certezza di questi processi, e il grado di approssimazione a cui si può giungere con ciascuna sostituzione successiva. Le particolarità nelle quali egli è entrato non lasciando niente da desiderare, rimandiamo alla detta opera quelli dei nostri lettori che volessero approfondire maggiormente questa materia.

Si debbono agl'illustri fratelli Giovanni e Giacomo Bernoulli varii metodi ingegnosi di approssimazione, l'esposizione dei quali ci condurrebbe troppo lungi. Chi desiderasse di conoscerli potrebbe consultare gli *Acta Eruditorum* di Lipsia, anno 1689; e Giovanni Bernoulli, *Opera omnia*, Losanna e Ginevra, 1742, 4 vol. in-4, Vol. III. Taylor, nelle *Transazioni filosofiche* dell'anno 1717; Tommaso Simpson, nelle sue opere intitolate, *Essays on several curious and useful subjects*, Londra, 1740 in-4; e *Select exercises for young proficients*, Londra, 1752; il Marchese de Conrinvon, nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1744; e il matematico tedesco Kaestner hanno pure scoperto varii metodi particolari, che i limiti di questo Dizionario non ci permettono che di rammentare. Siccome però il metodo di Daniele Bernoulli, esposto nei *Commentarii* dell'Accademia di Pietroburgo, Tomo III, e sviluppato quindi da Eulero nella sua opera: *Introductio in analysin infinitorum*, Losanna, 1748, in-4, a vol., riposa sopra considerazioni affatto differenti da tutti gli altri metodi, perciò ereditiamo di dover dare almeno un'idea del processo elegante che Eulero ne ha ricavato.

Il metodo di Bernoulli consiste nel trovare una *serie ricorrente* (*Vedi SERIE RICORRENTE*) tale che uno dei suoi termini, diviso per quello che lo precede, dia costantemente un valore di una radice dell'equazione di più in più approssimato, a misura che i termini impiegati sono più grandi. Supponiamo dunque, dice Eulero, che già si conoscano i termini successivi, p, q, r, s, t , ec. di questa serie, bisognerà

che perciò $\frac{q}{p}$ indichi la radice di x con sufficiente esattezza; cioè che si abbia presso

a poco $\frac{q}{p} = x$. Si avrà egualmente $\frac{r}{q} = x$, e la moltiplicazione dei due valori darà $\frac{q}{p} \times \frac{r}{q} = \frac{r}{p} = x^2$. Di più, siccome $\frac{s}{r} = x$, si avrà $\frac{s}{p} = x^3$; quindi, poichè $\frac{t}{s} = x$, si avrà $\frac{t}{p} = x^4$, e così di seguito.

Se, in un'equazione

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

si sostituiscono questi valori, essa diverrà

$$\frac{t}{p} + A \frac{s}{p} + B \frac{q}{p} + Cx + D = 0,$$

ovvero

$$t + Ar + Bq + Cp = 0,$$

donde si ha

$$t = -Ar - Bq - Cp;$$

espressione che dimostra come ciascun termine della serie ricorrente deve essere formato da quelli che lo precedono: dimanierachè avendo solamente, in questo caso, i tre primi termini, siamo in grado di continuare le serie tanto lungi quanto si vorrà. Quanto a questi tre primi termini, possiamo prenderli a piacere. Passeremo adesso a render più chiaro per mezzo di un esempio quanto abbiamo detto, facendo osservare, prima di tutto, che l'equazione non deve mancare del secondo termine. Sia l'equazione

$$x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Facendo $x^2 = \frac{s}{p}$, $x^3 = \frac{r}{p}$, $x = \frac{q}{p}$, avremo

$$\frac{r}{p} - \frac{s}{p} - 2 \frac{q}{p} - 1 = 0;$$

donde

$$r = s + 2q + p.$$

Da ciò si vede che ciascun termine della serie deve risultare dalla somma dei tre termini che lo precedono, dopo avere precedentemente moltiplicato per 2 il termine di mezzo. Il principio della serie essendo arbitrario, prendiamo 0, 0, 1 per i tre primi termini, e troveremo per i seguenti

$$0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129, 277, \text{ ec.}$$

Così i valori di x saranno

$$\frac{0}{0}, \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{3}, \frac{13}{6}, \frac{28}{13}, \frac{60}{28}, \frac{129}{60}, \frac{277}{129}, \text{ ec.}$$

Se si prende per x la frazione $\frac{277}{129}$, avremo

$$x = 2,147 \dots,$$

valore esatto fino alla cifra dei millesimi.

Dobbiamo fare osservare che non tutte le equazioni sono di natura da potere applicare loro questo metodo con vantaggio, e che spesso siamo obbligati a calcolare un grandissimo numero di termini della serie per ottenere una debole approssimazione. Di più, la scelta dei primi termini non è affatto arbitraria, ed è facile l'accorgersi che si può, determinandoli convenientemente, rendere l'approssimazione più rapida. Comunque sia, il processo di Eulero è ciò non ostante uno dei più semplici e dei più ingegnosi che siano stati trovati fino a questo giorno. Faremo conoscere, all'articolo *Series Ricorrentes*, i principj sopra i quali è fondato questo metodo, la scoperta del quale è dovuta, come già abbiamo detto, al celebre Daniele Bernoulli.

È assai difficile il poter riconoscere esattamente il grado d'approssimazione che si ottiene coi precedenti metodi, o il sapere, in ciascuna operazione, quali sono le cifre decimali alle quali dobbiamo arrestarci per non rendere inutilmente troppo faticosi i calcoli successivi. Sotto questo rapporto, il processo di Lagrange, che adesso passeremo ad esporre, è superiore a tutti gli altri, quantunque non dia che approssimazioni più lente, e non sia in realtà che un metodo di semplici tentativi.

Sia, come abbiamo fatto di sopra,

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \text{ec.} \dots + A_m = 0$$

un'equazione di un grado qualunque che abbia una radice reale che sia compresa tra a e $a+1$, o di cui a sia la parte intera.

Indicando con $\frac{1}{y}$ la parte frazionaria di questa radice, avremo

$$x = a + \frac{1}{y},$$

ed otterremo, con la sostituzione di $a + \frac{1}{y}$ in luogo di x nella proposta, un'equazione in y , la di cui forma sarà

$$y^m + B_1 y^{m-1} + B_2 y^{m-2} + B_3 y^{m-3} + \text{ec.} \dots + B_m = 0.$$

Questa equazione avrà necessariamente una radice reale positiva, maggiore dell'unità, e non ne avrà che una sola, se non vi è, come abbiamo supposto, che una sola radice x compresa tra a e $a+1$. In quest'ultimo caso, dopo aver trovato la parte intera di questo valore di y (*Vedi Limiti*), indichiamola con b , ed avremo

$$y = b + \frac{1}{z},$$

essendo $\frac{1}{z}$ la parte frazionaria incognita di questa medesima radice.

Sostituendo $b + \frac{1}{z}$ in luogo di y nell'equazione in y , otterremo una nuova equazione in z della forma

$$z^m + C_1 z^{m-1} + C_2 z^{m-2} + C_3 z^{m-3} + \text{ec.} \dots + C_m = 0,$$

la quale non avrà egualmente che una sola radice positiva maggiore dell'unità.

Indicando ancora con c la parte intera di questa radice, e con $\frac{1}{v}$ la parte frazionaria, avremo

$$z = c + \frac{1}{v}.$$

Operando ancora come abbiamo fatto di sopra, otterremo per v un valore della forma

$$v = d + \frac{1}{p},$$

e così di seguito.

Ora, riunendo le diverse radici

$$x = a + \frac{1}{y}, \quad y = b + \frac{1}{z}, \quad z = c + \frac{1}{v}, \quad v = d + \frac{1}{p} \text{ ec.,}$$

se si sostituisce nella prima il valore della seconda, essa diverrà

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{z}}$$

Sostituendo in quest'ultima il valore di z , e successivamente quello di v , ec., la radice cercata sarà espressa dalla frazione continua

$$x = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \text{ec.}}}}$$

ed è evidente che quanto maggiore sarà il numero delle frazioni integranti che si prenderanno, tanto più ci avvicineremo al vero valore di x . Per fissare le idee, applichiamo ciò che precede all'equazione $x^2 - 2x - 5 = 0$, già risolta col metodo di Newton.

Il valore intero di una delle radici di questa equazione essendo 2, avremo

$$x = 2 + \frac{1}{y}.$$

E, sostituendo e ordinando rapporto alle potenze di y , l'equazione in y sarà

$$y^2 - 10y - 1 = 0,$$

la di cui radice reale è compresa fra 10 e 11. Facendo dunque

$$y = 10 + \frac{1}{z},$$

otterremo

$$61z^2 - 94z^2 - 20z - 1 = 0,$$

per l'equazione in z . Questa equazione ha una radice fra 1 e 2. Per la sostituzione di $1 + \frac{1}{v}$ in luogo di z in quest'ultima, l'equazione in v sarà

$$5x^3 + 25x^2 - 89x - 61 = 0,$$

la di cui radice è pure fra 1 e 2.

Continuando nella medesima maniera, si trovano, pei numeri che abbiamo indicato di sopra con a, b, c, d , ec., e che non sono che le parti intere delle radici di ciascuna equazione successiva, i valori 2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, ec; dimanierachè la radice cercata è espressa dalla frazione continua

$$x = 2 + \frac{1}{10 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \text{ec.}}}}}}$$

Donde si ricaveranno (*Vedi FRAZIONE CONTINUA*) le frazioni

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \frac{1307}{624}, \frac{16415}{7837}, \text{ec.},$$

le quali saranno alternativamente più piccole e più grandi del valore di x .

L'ultima frazione $\frac{16415}{7837}$ è maggiore della radice cercata; ma si sa, per la

teoria delle frazioni continue, che l'errore deve essere minore di $\frac{1}{(7837)^2}$, o di 0,00000001628 . . . , riducendo questa quantità a frazione decimale. Così la frazione $\frac{16415}{7837}$, ridotta in egual modo a frazione decimale, darà per x un valore esatto fino alla settima cifra decimale. Questo valore è

$$x = 2,0945514865.$$

Per conseguenza la radice cercata è fra 2,09455149, e 2,09455147.

Questo metodo, come quello di Newton, suppone che non vi sia che una sola radice compresa tra due numeri a e $a+1$, che non differiscono che di un'unità. Non ostante, quando questa condizione non esiste, si possono sempre, cercando la più piccola differenza delle radici, determinare limiti tanto prossimi da rendere applicabili questi metodi. *Vedi EQUAZIONE DELLE DIFFERENZE, LIMITI, REGOLA DEI SEGNI.*

Il processo di Lagrange conduce spesso a calcoli sì lunghi e laboriosi, che nella pratica si preferisce quello di Newton, ovvero si ricorre ancora a metodi più spediti. Quello che Kramp ha esposto nella sua opera intitolata, *Éléments d'arithmétique universelle*, Colonia, 1808, in-8, e quello che dà Cagnoli nella sua *Trigonometria piana e sferica*, Bologna, 1804 in-4, fondati tutti e due sopra i medesimi principj, non richiedono che operazioni aritmetiche di una facile esecuzione. Il sig. Budan de Boislaurent, nella sua opera, *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques*, Parigi, 1822, in 4, seconda edizione, propone un processo della maggior semplicità. Il lettore potrà consultare ancora: Fourier, *Analyse des équations déterminées*, Parigi, 1831 in-4; una Memoria di Horner nelle *Transazioni filosofiche* per l'anno 1819; una Memoria di Sturm inserita nelle *Memorie* presentate dai dotti stranieri all'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1835; Cauchy, *Cours d'Analyse de l'Ecole royale Polytechnique*, di Mat. l'ol. I.

chnique, Parigi, 1821, in-8, prima parte; Mainardi, *Lezioni d'Introduzione al calcolo sublime*, Pavia, 1836, parte prima; Vincent, *Note sur la résolution des équations numériques*, Lilla, 1834, in-8; Lefebure de Fourcy, *Traité d'Algèbre*, Parigi, 1835, in-8; Francoeur, *Cours complet de mathématiques pures*, Parigi, 1837, 2 vol. in-8, quarta edizione; come pure gli articoli *EQUAZIONE* e *LIMITI* di questo Dizionario.

È stato annoverato fra i metodi di approssimazione l'uso delle serie per la valutazione delle radici delle equazioni; ma ciò è assolutamente inesatto; poichè le serie costituiscono un modo di generazione che abbraccia con una legge unica la costruzione completa di una quantità; differentissime in ciò dai metodi che abbiamo descritti, i di cui avvicinamenti successivi sono indipendenti gli uni dagli altri. È per questo motivo che noi abbiamo riunito alla parola *Serie* tutto ciò che riguarda la risoluzione delle equazioni ottenuta, in una maniera generale, per mezzo di queste importanti funzioni.

APPULSO (*Astron.*). Passaggio della luna in prossimità di un pianeta o di una stella, senza produzione di eclisse. L'istante dell'*appulso* è quello della minima distanza degli orli. Gli appulsi si osservano per determinare i luoghi della luna, gli errori delle tavole astronomiche e le longitudini dei luoghi.

APRILE, quarto mese dell'anno secondo il nostro calendario. Era il secondo nell'anno antico romano, che era composto di dieci mesi, e cominciava dal mese di Marzo. Romolo assegnò a questo mese trenta giorni; Numa Pompilio lo ridusse a soli ventinove, ma Giulio Cesare gli restituì l'antica durata di trenta giorni, che gli è stata conservata anco nel moderno calendario. Nell'antico calendario abbasiano e latino, Aprile occupava il primo posto e la sua durata era di trentasei giorni, come può riscontrarsi nel *Lexicon antiquitatum* di Pitisco, nella *Clavis calendaria* di Brady, ec.

Il nome di questo mese viene dalla parola latina *aprilis*, e questa dalla voce *aperire*, *aprire*, perchè in questo mese la terra apre il suo seno alla nuova vegetazione.

Ovidio, nel quarto dei Fasti, rifiuta questa origine della parola *aprilis*, e preferisce derivarla dalla parola greca *ἀπρίς*; che significa *spuma*, perchè secondo la mitologia greca Venere, cui era sacro questo mese, era nata dalla spuma del mare.

Sed Veneris mensem graio sermone notatum

Auguror: a spumis est Dea dicta maris.

OVID. FAST. Lib. IV. vers. 61.

In questo mese il sole percorre il segno dell'Ariete, e verso il dì venti entra nel segno del Toro; ma a parlar più propriamente è la terra che realmente percorre il segno della Libbra, che nello zodiaco è diametralmente opposto a quello dell'Ariete, ed entra quindi nel segno dello Scorpione, che è opposto a quello del Toro.

APSIDI (*Astron.*). Sono così chiamate le estremità di un'orbita ellittica. Questa parola viene dalla voce greca *ἀψις*, che significa *curvatura* o *volta*, perchè gli *apsidi* sono i punti in cui l'orbita si curva, si piega, e cambia direzione.

L'*apside* più lontano nelle orbite in cui il sole occupa uno dei fuochi, cioè l'*apside superiore*, si dice *afelio*, parola che deriva dal greco *ἀπο ἡλίου*, o *σὺν ἡλίῳ*, lontano dal sole. L'*apside inferiore*, cioè il punto dell'orbita più vicino al sole si dice *perielio* da *πρὸς ἡλίῳ*, vicino al sole.

Quando si tratta del sole o della luna, l'*apside superiore* prende il nome di *apogeo*, e l'*apside inferiore* quello di *perigeo*, dalle preposizioni greche di sopra indicate e dalla voce *γῆ*, terra, perchè nell'orbita che descrive la luna, e in quella che mostra di descrivere il sole, la terra occupa uno dei fuochi.

Alcuni astronomi hanno immaginato le parole *apogiove* e *perigiove*, dalle stesse preposizioni greche *ἀπο* e *περί*, e dalla voce *Jovis*, per indicare gli apsidali dei satelliti di Giove, cioè i punti della massima e della minima distanza di questi satelliti da Giove.

L'asse maggiore dell'orbita, cioè la retta che passa pel centro dell'orbita del pianeta ed unisce gli apsidali, si dice ancora la *linea degli apsidali*. Tale è la linea AP (Tav. XXIII, fig. 5) condotta dall'afelio A al perielio P. L'*eccentricità* si conta sulla linea degli apsidali, perchè essa è la distanza del centro C dell'orbita del pianeta dal fuoco S dell'orbita stessa.

La linea degli apsidali non è immobile, ma va soggetta ad un movimento prodotto dall'attrazione vicendevole dei pianeti. Il determinare la direzione di questa linea è un problema di somma importanza in astronomia; noi però non ce ne occuperemo, avendo esposti all'articolo APELIO i principj che servono a risolverlo. Vedi APELIO, ORBITA, PIANETA.

APUS (Astron.). Questo nome, che deriva dalla greca parola *ἄπους*, senza piedi, è stato dato ad una costellazione meridionale, il di cui nome più comune è quello di *Uccello di Paradiso*, perchè anticamente si credeva che questo uccello non avesse piedi. Questa costellazione è troppo vicina al polo meridionale perchè possa vedersi nel nostro emisfero. È circondata dall'Ottante, dal Pavone, dal Triangolo Australe, e dal Camaleonte. Essa è composta di dodici stelle nelle carte di Bayer, ma ne contiene un numero molto maggiore nei cataloghi di La-Caille. Si vedano le Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1752, e La-Caille, *Caelum australe stelliferum*, Parigi, 1763, in-4. La stella principale di questa costellazione non è che di quinta grandezza.

AQUARIO (Astron.). Nome dell'undecimo segno dello zodiaco, rappresentato dal carattere ☊. Molte sono le favole che dai poeti greci sono state immaginate sull'origine di questo segno. Secondo alcuni, esso è Ganimede, che Giove fece rapire dalla sua aquila onde somministrasse il nettare alla mensa degli Dei, dopo che Ebe fu privata di questo ufficio: infatti l'Aquila non si alza mai nel cielo senza tratto seco l'Aquario, l'urna che esso tiene in mano e l'acqua che ne sgorga; quindi viene chiamato *Ganymedes*, *Puer iliacus*, *Jovis cinaedus*. Altri suppongono che sia Deucalione, re di Teasaglia, che scampato dal diluvio con Pirra sua moglie sbarcò sul Parnaso, soggiorno delle Muse. Altri vogliono che sia l'Ippocrene che Pegaso fece scaturire con un calcio, poichè i piedi di questo cavallo si alzano prima dell'acqua dell'Aquario, e le nove stelle del Delfino, situate sopra l'Aquario, sono le nove Muse che si dissetano a questa fontana. L'opinione più probabile però è che questo segno tragga la sua origine dalla stagione delle piogge: infatti nello zodiaco indiano questo segno viene rappresentato con un vaso d'acqua, e nello zodiaco egiziano è rappresentato da un uomo che tiene due urne, dalle quali sgorga l'acqua. Dupuis, nella sua *Origine di tutti i Culti*, crede che tanta l'Aquario quanto il Capricorno e i Pesci si riferiscano ai mesi dell'anno, durante i quali ha luogo l'inondazione del Nilo.

Con questo medesimo nome si chiama pure una costellazione composta di 108 stelle, nel catalogo di Flamsteed. La costellazione dell'Aquario è facile a trovarsi nel cielo, prolungando verso il sud la linea condotta per le due belle stelle situate alla testa di Andromeda e nell'ala di Pegaso. Questa linea passa per le due stelle più brillanti dell'Aquario, cioè α e β , situate sulle due spalle.

Deve ben distinguersi la costellazione dell'Aquario dal segno dello zodiaco di questo stesso nome. Quest'ultimo è quella parte dell'eclittica che comincia dai corni della costellazione del Capricorno, e termina alla metà del corpo di quella dell'Aquario, comprendendo l'arco di longitudine tra 300° e 330° , che il sole percorre dal 20 Gennaio al 20 Febbraio. All'articolo LUNA si spiegheremo per-

chè le costellazioni zodiacali non corrispondano più coi segni che portano i loro nomi. *Vedi* LIRRA, e PRECESSIONE.

AQUEDOTTO. *Vedi* ACQUEDOTTO.

AQUILA (*Astron.*). È questa una costellazione boreale, che trovasi spesso rammentata coi nomi di *Aquila*, *Jovis nutrix*, *Jovis armiger*, *Raptrix Ganymedis*, *Servans Antinuum*, *Promethei Aquila*, *Vultur volans*, *Tortor Promethei*. La mitologia dei Greci dice che l'aquila portava il nettare a Giove, quando questi era nascosto in un antro dell'isola di Creta per fuggire a suo padre che lo voleva far perire, che questo stesso animale lo ajutò nella guerra contro i Giganti portandogli le armi, e contribuì pure a' suoi piaceri col ratto di Ganimede, e per questo l'aquila fu consacrata a Giove e collocata nel cielo. Altri pretendono che sia questa l'aquila che divorava il cuore di Prometeo. Dupuis congettra, ma con poca probabilità, che il nome di aquila fosse dato alle stelle che compongono questa costellazione, quando esse, nel primo stabilimento delle costellazioni, erano prossime al solstizio d'estate, e che fosse scelto l'uccello che ha il volo più elevato per indicare la massima elevazione che ha il sole nel solstizio d'estate. Per trovare questa costellazione nel cielo, si condurrà una linea retta che passi per l' α della Lira e tra il β e il γ del Dragone, e questa linea passerà per la stella di prima grandezza dell'Aquila chiamata *Altair* e segnata nei cataloghi colla lettera α .

La costellazione di Antinoo è comunemente considerata come una parte dell'Aquila, ed è rappresentata come un fanciullo che si trova tra gli artigii dell'Aquila. *Vedi* ANTINOO.

ARA (*Astron.*). *Vedi* ALTARE.

ARALDI (MICHELE), fisiologo e matematico, nacque in Modena il dì 10 febbrajo 1740. Sebbene alla medicina fossero principalmente rivolti i suoi studj, ed occupasse con lustro varie cattedre di questa scienza nell'Università di Modena, pure coltivò con ardore e successo ancora la filosofia, la letteratura e le matematiche. Per queste ultime sentivasi in modo speciale trasportato, e si teneva in giorno di tutte le scoperte che vi si facevano: che anzi egli stesso si studiò di risolvere alcuni dei grandi problemi, la di cui soluzione aveva esercitato lungamente i geometri più illustri. Gli Atti della Società delle Scienze di Modena, della quale era uno dei principali ornamenti, contengono varie sue dotte memorie sugli *Apogei*. Alla fondazione dell'Istituto nazionale italiano, fu fatto uno de' primi suoi membri; e dopo la morte dell'Ab. Fortis ne fu eletto segretario perpetuo. Morì a Milano il 3 Novembre 1813. Per più estese particolarità sulla vita e sulle opere di questo dotto rimandiamo il lettore al suo *Elogio* scritto da Rovida, e impresso a Milano, nel 1817 in-4; e all'altro che il Marchese Luigi Rangoni ha letto in una sessione della Società delle Scienze di Modena, e che si trova inserito nel Tomo XIX degli Atti di quella Società. Anco il Lombardi nella sua *Storia della Letteratura italiana* gli ha consacrato un interessante articolo.

ARAMECH (*Astron.*). *Vedi* ARTURO.

ARATO, autore di un poema astronomico in greco, che è giunto fino a noi. Non si conosce con precisione, nè l'epoca della sua nascita, nè quella della sua morte, ma da alcune circostanze possiamo credere che in quanto al tempo in cui fiorì debba essere collocato tra Enclide e Apollonio di Perga, dei quali fu contemporaneo, nel più lato senso di questa parola. Si sa però che viveva nella CXXV olimpiade. Petavio, nel suo *Uranologion*, Parigi, 1630 in-fol., ha raccolto tutte le notizie che in varj autori si trovano sparse sulla vita e sulle opere di Arato. Da tali notizie si rileva, che egli nacque certamente in Cilicia, quantunque non siano d'accordo gli scrittori nell'indicare la città, nominando alcuni Tarso ed altri Soli (in seguito chiamata Pompejopoli); che esercitava la medici-

na; che fu invitato alla corte di Antigono Gonata, re di Macedonia e figlio di Demetrio Poliorcete, dove passò il resto de' suoi giorni; e che fu istruito da uno stoico chiamato Dionisio Eracleote.

Per ordine di Antigono, Arato pose in versi greci i *Fenomeni* di Eudossio; che contenevano presso a poco tutta l'astronomia conosciuta a' suoi tempi. L'eleganza del verso fece che il suo poema fosse tenuto per molto tempo in somma reputazione presso i Greci: ma può dubitarsi che egli non avesse le cognizioni astronomiche necessarie per il suo lavoro. Infatti dal commento del celebre Ipparco, che esiste anche oggi, apparisce che egli fece parecchie alterazioni al suo originale, poichè questo comentatore cita frequentemente nello stesso tempo e la prosa di Eudossio, e la poesia di Arato. Saremmo anzi inclinati a credere che Arato non sia stato mai nè osservatore nè matematico, perchè nella sua descrizione dei fenomeni celesti non ha una precisione maggiore di quella che potrebbe attendersi da un semplice spettatore dei cieli. Per esempio, egli dice che la testa del Dragone non tramonta mai, e che non fa altro che toccare semplicemente i flutti, il che, al suo tempo, avrebbe corrisposto a $38^{\circ} 7'$ di latitudine; mentre in altro luogo descrive l'interiezione del tropico settentrionale coll'orizzonte, come s'ei si trovasse ad una latitudine di $40^{\circ} 54'$, cioè maggiore di più di due gradi e mezzo della prima. Questa seconda latitudine corrisponde ad alcuni luoghi meridionali della Macedonia. Ciò non ostante l'opera di Arato è di molta importanza per la storia dell'astronomia, perchè ci ha trasmesso quanto si sapeva al suo tempo intorno alla sfera, e perchè Arato è il secondo scrittore greco su tale scienza, i di cui lavori siano giunti fino a noi, non rimanendoci prima di lui che due scritti di Antolico.

Il poema di Arato è diviso in due parti; la prima intitolata i *Fenomeni* contiene 732 versi, la seconda intitolata i *Pronostici* ne comprende 417. Esso comincia con una dichiarazione della dipendenza di tutte le cose da Giove, di cui sono figli tutti gli uomini, e che ha dato le stelle come guide dell'agricoltura. Il passo, τοῦ γὰρ καὶ γίνεσθαι ἱστῆναι, è notabile per essere stato molto tempo dopo citato da S. Paolo nel suo discorso ad una adunanza di Ateniesi: *Imperocchè in lui viviamo, e ci muoviamo, e siamo: come anche in lui de' vostri poeti han detto: imperocchè di lui eziandio siamo progenie* (Atti degli Apostoli, Cap. XVII, vers. 28). Queste parole dimostrano ancora che il poema di Arato era molto conosciuto.

Arato passa quindi ad esporre la dottrina dell'immobilità della terra, e del moto dei cieli intorno ad un asse fisso. Egli descrive i nomi e le configurazioni di tutte le costellazioni allora in uso, l'epoche del levar-i e del tramonto, il cammino del sole per lo zodiaco, e la via lattea, che è descritta come uno dei circoli massimi della sfera celeste. Dei pianeti si parla come di corpi aventi un moto loro proprio, ma non si dà nessuna idea della durata delle loro rivoluzioni. Non si fa menzione dell'orbita della luna, nè del moto irregolare del sole in longitudine. Vi si trovano ancora degli errori nella collocazione delle stelle: per esempio, si dice che la Lira non ha che stelle piccolissime, e che il Cigno non ne ha che di mediocri, quantunque in ognuna di queste costellazioni se ne trovi una di prima grandezza. Alcuni fenomeni sono assolutamente inconciliabili sotto una stessa latitudine, come quello che abbiamo accennato di sopra; altri non possono essere coesistiti in una stessa epoca; per esempio, le sue separate descrizioni del solstizio d'inverno e di quello d'estate appartengono ad epoche distanti di 900 anni l'una dall'altra.

Il libro dei *Pronostici* contiene parecchi errori popolari relativi alle predizioni della pioggia, del buon tempo e del cattivo tempo, per mezzo dell'osservazione dei fenomeni celesti: e ad eccezione del celebre ciclo di 19 anni che

vi si trova menzionato, non espone nessuna nuova cognizione astronomica. Dobbiamo avvertire però che nè i *Fenomeni* nè i *Pronostici* non contengono nessuna parola di astrologia giudiziaria, che ancora non aveva infettato l'astronomia.

Grande è il numero dei comentatori di Arato. Petavio ne nomina trentasei, tra i quali Aristarco, Gemino, Eratostene, e Ipparco. Il commento di quest'ultimo ha avuto origine dalla differenza che Ipparco aveva osservato tra le descrizioni di Arato e le sue proprie osservazioni, e da esso si rileva che Arato ha frequentemente alterato in peggio l'opera di Eudossio, quantunque anche quest'ultimo sia caduto in errori così grossolani, avuto anche riguardo ai mezzi di osservazione allora esistenti, che Delambre ha sospettato che l'intero sistema restasse di quest'astronomo non sia stato tratto dall'immediata osservazione dei cieli, ma da un globo in cui fossero state scorrettamente disegnate le posizioni delle stelle. Il commento d'Ipparco non palesa il genio del primo astronomo dell'antichità, e non può esser certamente che un lavoro della sua gioventù; non ostante vi si trovano alcune osservazioni, le quali si sono volute far servire a determinare la precessione degli equinozi.

In Delambre, *Histoire de l'Astronomie ancienne*, si trova un esteso ragguaglio di Arato e de' suoi comentatori. Petavio nel suo *Uranologion* ha raccolto ancora il commento d'Ipparco, ed un altro che alcuni hanno attribuito allo stesso Ipparco, ed altri ad Eratostene, ma che Petavio con maggior fondamento crede di Achille Tazio. Vedi *ACHILLE TAZIO*. Quest'ultimo commento è piuttosto un ristretto di astronomia per servire d'introduzione alla lettura di Arato.

I *Fenomeni* sono stati tradotti in latino da Cicerone, da Germanico Cesare, e da Festo Avieno. Ugo Grozio, nel suo *Syntagma Arataeorum*, Leida, 1600, in-4, ha pubblicato insieme coll'originale greco, e con una ricca suppellettile di dotte note, queste tre versioni, riempiendo alla meglio del proprio le numerose lagune che presentava quella di Cicerone.

Numerose sono le edizioni di Arato. La prima è dell'Aldo e impressa a Venezia nel 1499 in-fol.; l'ultima è di Bekker con note, Berlino, 1828, in-8. Sono molto attimate per le note, e per le dissertazioni critiche che le accompagnano, le seguenti edizioni: di G. Fell, Oxford, 1672, in-8; di G. Th. Buhle, Lipsia, 1793-1801, 2 vol. in-8; e di G. H. Voss, Heidelberg, 1824 in-8. Pignorè tradusse in francese i *Fenomeni* di Arato nella traduzione latina di Cicerone compiuta da Grozio, e gli pubblicò in continuazione degli *Astronomici* di Manilio, Parigi, 1786, 2 vol. in-8; anco A. M. Salvini tradusse in versi italiani l'opera di Arato, e la traduzione fu pubblicata insieme col testo greco e colla traduzione di Cicerone per cura di Ang. M. Bordini, in Firenze, 1765, in-8.

- ** ARBOGAST (LUGI FRANCESCO ANTORIO), geometra francese, nato a Mutzig in Alsazia nel 1759. Fu successivamente professore di matematiche nella scuola d'artiglieria di Strasburgo, e rettore dell'università nazionale della stessa città. In seguito fatto venne deputato del dipartimento del Basso Reno all'Assemblea legislativa, dove però il suo carattere placido e timido non gli permise di prendere molta parte negli affari politici: infatti il suo nome non vi si trova rammentato che in occasione della verificaione del telegrafo di Chappe, e per un rapporto sull'uniformità dei pesi e delle misure. Contribuì molto alla formazione del comitato d'istruzione pubblica, ai lavori del quale dedicò la maggior parte del suo tempo. Dopo la dissoluzione della Convenzione, Arbogast divenne professore di matematiche nella scuola centrale del dipartimento del Basso Reno, a Strasburgo, dove morì a' dì 8 Aprile 1803, lasciando un nome che lo pone tra i primi analisti del suo tempo, ed una fama senza macchia.

La prima opera di Arbogast fu presentata nel 1789 all'Accademia delle Scienze di Parigi col titolo di *Essai sur des nouveaux principes de calcul différentiel*

et intégral, indépendants de la théorie des infiniment petits, et de celle des limites. Questa memoria non è stampata, ma da un estratto che egli ne dà nella prefazione al suo *Calcolo delle Derivazioni* si rileva che aveva, almeno in parte, anticipatamente scoperto i primi principj della *Teoria delle Funzioni* di Lagrange. Nel 1790 riportò il premio proposto dall'Accademia delle Scienze di Pietroburgo, per un saggio sopra la natura delle *funzioni arbitrarie*, introdotte per l'integrazione delle equazioni a differenziali parziali. In questa memoria, che è stampata, Arbogast, dopo avere discusso le varie opinioni dei geometri, conclude e stabilisce con Eulero e Lagrange la discontinuità di tali funzioni, contro quanto aveva detto d'Alembert. Si veda su questo punto Lacroix, *Traité du Calcul différentiel et intégral*, Parigi, 1810, 3 vol. in-4. Tom. II pag. 686.

Ma l'opera sua principale è il *Calcul des Dérivations*, Strasburgo, 1800, in-4. L'oggetto speciale, e possiamo anco dire unico, di quest'opera è la legge di derivazione dei coefficienti successivi, che si trovano nello sviluppare espressioni più complicate di una funzione di un binomio; cosicchè il teorema di Taylor, e le leggi della differenziazione ordinaria, sono casi particolari del metodo di Arbogast. Quantunque però il *Calcolo delle Derivazioni* conduca talvolta a risultamenti eleganti e inaspettati; e quantunque, in qualche caso particolare, si applichi con successo a questioni che molte difficoltà presentano ai metodi ordinarij, non merita certamente di esser sostituito alle regole semplici e generali del calcolo differenziale: ciò non ostante esso è per molti rapporti assai superiore all'*Analisi combinatoria*, della quale si sono tanto occupati i matematici di Alemagna per ottenere i medesimi sviluppi. L'opera d'Arbogast, tutta ripiena d'ingegnose vedute, non fu accolta dai dotti con quel favore che avrebbe meritato; ma ciò deve attribuirsi ai tanti segni nuovi che egli vi ha introdotto, i quali ne rendono oltremodo penosa la lettura. Non dobbiamo omettere che il *Calcolo delle Derivazioni* presenta il primo uso della separazione dei segni delle operazioni dalle quantità che ne sono affette, uso che in seguito ha portato tanta luce sulla connessione delle varie parti dell'analisi. Si veda Lacroix, *Op. cit.* Tom. III. pag. 726.

ARCHELAO di Mileto, filosofo della scuola jonica, e l'ultimo che la presedè in diretta successione da Talete, ebbe per maestro Anassagora, e successe a Diogene Apolloniate, che aveva avuto per predecessore Anassagora. Passando ad Atene non lasciò nessuno ad occupare la sua cattedra, perciò fu detto che egli trasferì la setta jonica in Atene, dove divenne popolare, ed annoverò tra i suoi discepoli Socrate ed Euripide. Seguì nell'esilio a Lampsaco il suo maestro Anassagora, nè ritornò ad Atene che dopo la di lui morte. Al pari di tutti gli altri filosofi della sua setta, coltivò con ardore e successo le matematiche, l'astronomia e le scienze naturali, donde gli fu dato il soprannome di *Fisico*. Dopo di lui, Socrate sostituì a tali studj quello della morale. Non si conosce nè l'epoca della sua nascita, nè quella della sua morte, ma pare che insegnasse in Atene 450 anni av. G. C. Per altre particolarità sulla vita di questo filosofo si veda Diogene Laerzio, *De vita et moribus philosophorum*; Brueker, *Historia critica philosophiae*, Lipsia, 1742, 6 vol. in-4. Tom. I. pag. 518; Fabricio, *Bibliotheca graeca*, Amburgo, 1722, 11 vol. in-4.

Le principali dottrine di questo filosofo erano le seguenti. Tutte le cose avevano due principj, l'aria e l'infinito (*τὸ ἀπείρον*): non si sa però con certezza che cosa intendesse per infinito. Alcuni, e tra essi Plutarco, dicono ch'el supponesse che l'aria fosse infinita, e che colla sua condensazione o rarefazione formasse tutte le cose. Secondo lui, il sole era la più grande di tutte le stelle; la terra aveva la forma di un uovo ed era situata nel centro dell'universo; il principio del moto consisteva nel passaggio dal freddo al caldo, il caldo era in moto, il freddo era stazionario; ogni cosa era composta di piccolissime particelle simili

a sè stessa, il legno di atomi di legno, i metalli di atomi di metallo, ec.; la parola non era che un moto dell'aria. Archelao, siccome altri filosofi, ammetteva la pericolosa dottrina che il giusto e l'ingiusto non si danno in natura, e non esistono che per la legge. Forse egli per legge intendeva le istituzioni meramente umane; ma noi non conosciamo abbastanza la sua dottrina per asserire positivamente ch'ei volesse escludere la legge morale di coscienza.

ARCHIMEDE, nato a Siracusa verso l'anno 287 avanti l'era cristiana, fu uno di quegli uomini che non compariscono sulla terra che a lunghi intervalli, e il genio creatore dei quali lascia dopo di loro una lunga traccia di vivissima luce. Le scienze matematiche debbono a quest'illustre geometra lavori preziosi, che segnano nell'antichità un'era brillante di progressi e di scoperte. Questi lavori fanno anche oggigiorno l'ammirazione dei matematici, che coltivano la scienza con quell'amore puro e nobile, che è la sorgente feconda delle grandi scoperte e delle verità sublimi che essa contiene.

I biografi di Archimede hanno trascurato di farci conoscere sotto quali maestri cominciò a studiare: esso però gli ha talmente superati, che la gloria del discepolo avrebbe lasciati deboli raggi di luce alla scuola dalla quale uscì con quel genio potente e originale, le manifestazioni energiche del quale non appartengono che a lui solo. Per estimarlo ancora con una maggiore esattezza, ci manca una precisa cognizione dello stato della scienza prima di lui, e dei lavori geometrici che lo hanno preceduto, non rimanendoci di quel tempo che gli scritti di Euclide, e poche indicazioni lasciate dai suoi comentatori Teone e Proclo, e da Pappo nelle sue *Collezioni matematiche*. Ma, come altrove abbiamo detto (*Vedi Scuola d'ALESSANDRIA*), è probabile che le cognizioni matematiche sparse da Euclide e da' suoi successori fossero, al tempo di Archimede, le sole guide elementari che potessero seguirsi. Così il mondo deve senza dubbio Archimede ad Euclide, come deve Newton a Keplero.

Tutti i rami delle matematiche furono egualmente l'oggetto degli studj e delle ricerche d'Archimede; ma la geometria e la meccanica sono nulladimeno quelli dei quali con maggiore estensione e superiorità abbracciò le cognizioni. Si sa ch'ei coltivava queste scienze con tale ardore e con tale annegazione di sè stesso, che per esse dimenticava i bisogni più pressanti della vita, e che i suoi servi erano talvolta obbligati a costringerlo ad accettare le loro cure. Sebbene una preoccupazione così profonda, cagionata da un'applicazione troppo costante sopra un medesimo oggetto, non sia sempre una prova di genio in un uomo, pure la riscontriamo spesso in coloro che superiormente agli altri si sono elevati nelle regioni dell'intelligenza. Pare, senza dubbio, che nelle sublimi rivelazioni della scienza ai trovi qualche cosa d'intimo e di esclusivo, che trasporti in una sfera affatto eccezionale l'uomo tanto felice da essere ammesso a tali rivelazioni.

Noi possediamo molti scritti d'Archimede sulla geometria; ma è certo che il maggior numero di quelli che ha composto è andato perduto. Nulladimeno ciò che ci resta basta per rendere la sua memoria immortale, e per giustificare l'entusiasmo col quale ne parla Wallis, dotto matematico inglese del secolo XVII, che esclama, parlando dell'illustre geometra di Siracusa: « Uomo d'una sagacità prodigiosa, che ha gettato i primi fondamenti di quasi tutte le scoperte, d'avere ampliato le quali la nostra età va superba. » *Vir stupendae sagacitatis, qui prima fundamenta posuit inventionum fere omnium, de quibus promovendis aetas nostra gloriatur!*

Archimede ha arricchito la geometria di scoperte della più alta importanza, e che possono considerarsi come la base su cui si appoggiarono i moderni per giungere alla misura degli spazj terminati da linee o da superficie curve. Ne' suoi elementi, Euclide considera soltanto i rapporti di alcune di tali grandezze tra loro;

ma Archimede si è elevato alla loro misura assoluta, cioè al rapporto tra esse e le figure terminate da linee rette o da piani.

Ne' suoi due libri *De Sphaera et Cyliandro*, Archimede misura il cono retto, il cilindro retto e la sfera, tanto rapporto alla loro superficie quanto rapporto alla loro solidità, sì interi che divisi in parti da piani perpendicolari al loro asse comune. Dimostra che la superficie della sfera è quadrupla di quella di un circolo massimo, che la superficie di un segmento sferico è eguale a quella del circolo che ha per raggio la corda condotta dal vertice ad un punto della circonferenza della base, che un emisfero è doppio del cono che ha la stessa base e la stessa altezza; insegna a trovare una sfera equivalente ad un cilindro o ad un cono dato, a dividerla in segmenti aventi tra loro un dato rapporto, a fare un segmento equivalente in superficie o in solidità ad un altro segmento e simile ad un altro, a formare un segmento che abbia un dato rapporto col cono inscritto, ec. In questi trattati si trova la bella proposizione, che *la sfera è i due terzi, tanto in superficie quanto in solidità, del cilindro circoscritto*. Questa scoperta dei rapporti della sfera e del cilindro era tenuta in tanto pregio dallo stesso Archimede, ch'ei manifestò il desiderio di non avere sulla sua tomba altro epitaffio, che una sfera inscritta nel cilindro. Questo voto del genio fu esaudito, e circa due secoli dopo la sua morte gloriosa, questa semplice ma eloquente iscrizione servì a Cicerone per ritrovare, in mezzo ai rovi e tra le rovine che la nascondevano, la tomba del grande Archimede, già ignota e dimenticata dalla infelice ed ingrata sua patria.

Il trattato *De dimensione Circuli* non è per così dire che il seguito o lo sviluppo di quelli che abbiamo citato. Archimede vi dimostra in principio questa verità fondamentale, che *qualunque circolo e qualunque settore circolare è eguale ad un triangolo, che ha per base la circonferenza o l'arco del settore, e per altezza il raggio*. Partendosi da questo principio, passa a determinare, il primo, il rapporto della circonferenza al diametro, non già col rigore geometrico, ma con un metodo d' approssimazione ammirabile nel suo genere, sorgente e modello di tutte le quadrature approssimate degli spazj curvilinei, quando mancano i mezzi per determinarle esattamente e senza nulla trascurare. Avendo osservato che, inscrivendo e circoscrivendo al circolo due poligoni regolari di un numero eguale di lati che vada continuamente crescendo, la circonferenza del circolo si trova situata tra i loro contorni, ed è costantemente maggiore dell'uno e minore dell'altro, ed avendo riconosciuto che la differenza può divenire minore di qualunque quantità assegnabile, suppose che i primi due poligoni avessero ognuno sei lati, i due seguenti dodici per ciascheduno, e continuando così la progressione doppia fino al numero novantasei, a cui si fermò, vide che i contorni dei due poligoni si accostavano molto all'eguaglianza. In conseguenza prese il medio aritmetico tra essi pel valore approssimato della circonferenza, e trovò che essa eccede il triplo della lunghezza del diametro, di una linea minore di dieci settantesimi e maggiore di dieci settantunesimi del diametro, chiudendo così il valore della circonferenza tra i limiti $3,1428$ e $3,1408$. Se si prende la prima frazione, che è la più prossima al vero, si trova che la circonferenza sta al diametro come 22 a 7 , rapporto assai più esatto di qualunque altro si volesse esprimere con altri numeri composti di due sole cifre. Dopo Archimede, si sono fatti molti tentativi inutili per assegnare il rapporto rigoroso del diametro alla circonferenza. I veri geometri riguardano questo problema, se non come assolutamente insolubile in sé stesso, almeno come tale coi mezzi che la geometria può offrire nel suo stato presente. Se per un momento si è potuto concepire la speranza di risolverlo, ciò fu al nascere dell'analisi infinitesimale, perciocchè questo metodo ha rettificato e quadrato curve, nelle quali l'antica Geometria aveva arrenato; ma il circolo gli ha re-

sistito, ed in oggi non vi sono che i principianti o le persone affatto straniere alla geometria che cerchino la quadratura assoluta e rigorosa del circolo.

Archimede avendo quasi esaurito le ricerche delle proprietà che presentano i corpi regolari, aveva bisogno di aprire al suo genio un campo di speculazione più vasto, e compose il suo trattato *De Conoidibus et Sphaeroidibus*. Chiamò *conoide* i solidi generati dalla rivoluzione delle sezioni coniche intorno al loro asse. Dopo avere esaminato in questo trattato i rapporti di tali corpi, gli paragona, al ioteri che tagliati in segmenti, coi cilindri o coi coni della stessa base e della stessa altezza. In quest'opera dimostrò il primo, che *la Conoide parabolica è eguale ad una volta e mezzo il cono della stessa base e dello stesso vertice, o alla metà del cilindro della stessa base e della stessa altezza; e che anco la Conoide iperbolica e i suoi segmenti stanno al cilindro o al cono della stessa base e della stessa altezza, in ragione data*. Vedasi l'articolo CONO.

A queste importanti scoperte geometriche bisogna aggiungerne altre che hanno contribuito anco maggiormente, se è possibile, ad illustrare Archimede. I trattati *De quadratura Parabolae*, e *De Spiralibus et Helicibus* saranno degni in ogni tempo dell'attenzione dei geometri. Impiegò due metodi differenti per giungere alla quadratura della parabola, e tutti e due onorano egualmente il suo genio. Il primo di questi metodi è fondato sui principj di una statica tutta ipotetetica, per mezzo della quale giunse a riconoscere ciò che accaderebbe se lo spazio parabolico e lo spazio rettilineo equivalenti fossero pesati per mezzo di una bilancia, quale la concepimmo matematicamente, vale a dire senza attrito e senza alcuna considerazione materiale. L'altro metodo era puramente geometrico, e facendo uso della formazione di una progressione decrescente, diede il primo esempio della vera quadratura di una curva. Ei trovò che qualunque segmento della parabola è quattro terzi del triangolo che ha la stessa base e la stessa altezza.

Ad un geometra chiamato Conone, che l'amicizia d'Archimede ha reso celebre, deveasi l'invenzione della curva che meritamente ha ricevuto in seguito il nome di *Spirale d'Archimede*, perchè questi il primo ne scoprì le proprietà principali: essa è generata da un punto che si muove uniformemente sopra una linea retta, mentre questa pure gira uniformemente intorno ad un punto preso su di essa. Il trattato delle spirali contiene considerazioni della più gran difficoltà; infatti, sebbene queste curve siano del genere di quelle che diconsi *trascendenti*, Archimede paragona la lunghezza dei loro archi con quella degli archi di circolo corrispondenti, gli spazj che esse racchiudono con gli spazj circolari; ne condusse le tangenti e le perpendicolari, e dimostrò che qualunque settore di spirale è il terzo del settore circolare, che lo racchiude (*Vedi SPIRALE*). Tutte queste ricerche, rese oggi sì facili dopo l'invenzione dell'analisi infinitesimale, erano di un' estrema difficoltà per la geometria di quel tempo. Non dobbiamo quindi maravigliarci se le dimostrazioni d'Archimede sono alquanto complicate; deveasi anzi ammirare la forza di mente di cui ha avuto bisogno, per non lasciare sfuggire o rompere la catena di un sì gran numero di proposizioni. Da varj passi delle lettere missive, che precedono le varie opere d'Archimede, si può congetturare che egli non abbia scoperto i principali suoi teoremi nel modo col quale gli ha dimostrati, ma che invece gli abbia trovati per altra via e con altri metodi molto più semplici, cosicchè il solo rigore delle dimostrazioni e le tortuosità necessarie per ottenerlo hanno dovuto costar pena ad Archimede, e rendono difficile la lettura de' suoi scritti. La verità delle proposizioni occorre molte volte come l'ultimo termine di un'approssimazione che da sè stessa si presenta, e che la considerazione degli indivisibili di Cavalieri, o quella degl'infinitamente piccoli di Leibnitz trasformano in un calcolo rigoroso. Come abbiamo detto, il trattato delle spirali contiene proposizioni di un ordine più elevato, ma perciò appunto è più

oscuro. Boulliaud, astronomo celebre e dotto geometra, dichiarava che nulla vi comprendeva, e Viète l'accusava di falsità: ma fu a torto; imperocchè il calcolo differenziale e il calcolo integrale ci hanno condotto ai medesimi risultamenti.

Crediamo di dover passare sotto silenzio il metodo che Archimede teneva nei casi, nei quali noi facciamo uso della considerazione dell'infinito: questo metodo deve essere esposto altrove con tutti gli sviluppi che esso comporta (*Vedi METODO D'ESAUSTIONE*). Non faremo nemmeno menzione di alcune altre opere di pura teoria, delle quali non possediamo più che una piccola parte, e passeremo ad un altro ordine di lavori dell'illustre geometra siracusano.

Le scoperte importanti che Archimede ha fatto in meccanica gli danno il diritto di esser considerato come il creatore di questo ramo delle scienze matematiche. Tutte le cognizioni che prima di lui si possedevano su questa scienza, non escluso il trattato d'Aristotile, non si elevavano al di sopra delle prime nozioni o delle vaghe ipotesi, che quasi sempre si trovano nell'infanzia di una scienza. Archimede, ponendosi tutto ad un tratto ad una distanza immensa da' suoi predecessori, stabilì il primo i veri principj della statica e dell'idrostatica in due trattati, il primo dei quali, diviso in due libri o parti, è intitolato *De aequiponderantibus*, e tratta dell'equilibrio e dei centri di gravità delle superficie piane; l'altro, diviso pure in due libri, è intitolato *De humido insidentibus*, e tratta dell'equilibrio dei corpi immersi in un fluido.

Nel suo trattato *De aequiponderantibus*, Archimede considera una bilancia sostenuta da un appoggio, e portante un peso in ognuno de' suoi piatti; e ponendo per assioma che, quando i due bracci della bilancia sono eguali, i due pesi supposti in equilibrio sono necessariamente eguali, dimostra che se uno dei bracci aumenta in lunghezza, il peso che vi è applicato deve diminuire nello stesso rapporto. Donde conclude in generale che due pesi, sospesi a bracci ineguali di una bilancia ed in equilibrio, debbono esser reciprocamente proporzionali ai bracci della bilancia. Questo principio contiene, come è noto, tutta la teoria della leva e delle macchine che ne dipendono. Archimede avendo inoltre osservato che i due pesi esercitano sul punto d'appoggio della bilancia la stessa pressione come se vi fossero applicati immediatamente, fa col pensiero questa sostituzione, e combinando la somma dei due pesi con un terzo peso, giunge alla stessa conclusione per un aggregato di tre come per quello di due, e così successivamente. Con questo metodo dimostra che in qualunque sistema di piccolissimi corpi, ossia in un corpo di qualunque grandezza, considerato come rappresentante un tal sistema, esiste un centro generale di sforzo, che dicesi *centro di gravità*. In seguito applica questa teoria a varii esempj: determina la posizione del centro di gravità nel parallelogrammo, nel triangolo, nel trapezio rettilineo ordinario, nell'area di una parabola, nel trapezio parabolico, ec. Il principio del centro di gravità stabilito da Archimede è divenuto, per l'uso frequente che se ne fa in meccanica, uno dei mezzi di ricerca i più usati. *Vedi STATICA*.

L'altro trattato *De humido insidentibus*, che Lagrange considerava come il più prezioso avanzo dell'antichità, comprende le leggi fondamentali dell'idrostatica. In esso, Archimede prende per base che tutte le molecole di un fluido, essendo supposte eguali ed egualmente pesanti, debbono restare ognuna nel suo posto, vale a dire che tutta la massa deve essere in equilibrio, quando ciascuna molecola in particolare è premuta egualmente in tutti i sensi. Questa eguaglianza di pressione, nella quale egli fa consistere essenzialmente lo stato di equilibrio, è dimostrata dall'esperienza. L'autore esamina quindi le condizioni che debbono aver luogo affinchè un corpo solido omogeneo, galleggiante sopra un fluido, prenda e conservi la situazione di equilibrio: fa vedere che il centro di gravità del corpo, e quello della parte immersa, debbono esser situati in una stessa linea verticale, e che il peso del corpo è eguale al peso della porzione di fluido rimossa.

Ecco in qual modo si racconta la circostanza che somministrò ad Archimede l'occasione delle sue scoperte in idrostatica. Gerone, re di Siracusa, sospettando che un orefice, il quale gli avea fatto una corona d'oro, avesse falsificato il metallo mescolandovi una certa quantità d'argento, consultò Archimede sul modo di scoprire la frode di cui credeva di aver da lagnarsi. Dopo lunghe meditazioni, Archimede fece fare, si racconta, due masse d'oro e d'argento, ognuna del peso della corona. Immerse successivamente queste materie in un vaso pieno d'acqua, osservando con attenzione la quantità di liquido che veniva rimossa da ciascuna di queste masse di metallo; sottopose quindi alla medesima prova la corona stessa, e così trovò un mezzo sicuro di calcolare la proporzione dell'oro e dell'argento, di che la corona era composta. Si aggiunge ancora che questa ingegnosa soluzione del problema essendosi presentata spontaneamente al suo spirito mentre era nel bagno, trasportato dalla gioia ne uscì subito, e senza pensare alla sua nudità, tornò a casa, correndo per le strade di Siracusa, e gridando: *l'ho trovato, l'ho trovato* (εὕρηκα, εὕρηκα). Del rimanente, la teoria di questa scoperta è tutta intera espressa in questa proposizione del suo libro: *Un corpo immerso in un fluido perde una parte del suo peso eguale a quello del volume di fluido che è stato rimosso.* Il calcolo aritmetico per determinare la esatta proporzione dell'oro e dell'argento è stato esposto all'articolo ALLIGATIONE.

Il trattato *De humido insidentibus* non esiste nel suo originale greco, come tutte le altre opere d'Archimede, ma si conosce unicamente per la traduzione che ne fece Tartaglia sopra un manoscritto greco mutilato, che, secondo ciò che oc dice il Vossio, *De scientiis mathematicis*, venne portato in Italia da Constantinopoli dopo la caduta dell'Impero d'oriente, e che in seguito fu recato in Germania da Regiomontano. Il primo libro fu pubblicato nel 1543 e il secondo nel 1545.

Abbiamo d'Archimede ancora un libro intitolato *Psammites*, che è più conosciuto sotto il suo nome latino *Arenarius*. Può considerarsi come uno scherzo matematico, ma però contiene molte curiose notizie. Da esso si rileva che Archimede, in un'opera indirizzata ad un tale Zeusippo, aveva scritto un sistema di numerazione, simile a quello seguito oggidì nell'aver unità di differenti ordini; che approvava il sistema platoniano da lui attribuito ad Aristarco, che supponeva il sole immobile nel centro dell'universo, invece della terra; che conosceva varii tentativi stati fatti per misurare la terra, i quali, per risultati che ne espongono, non possono certamente essere stati quelli fatti da Eratostene; che al suo tempo non esistevano istrumenti abbastanza esatti da misurare il diametro apparente del sole a meno di $\frac{1}{4}$, e che la trigonometria piana era affatto sconosciuta. Quest'opuscolo, che è diretto a Gelone figlio del re Gerone, ha per oggetto di opporsi a coloro che sostenevano che i grani dell'arena del mare erano infiniti, o almeno non potevano essere espressi con alcun numero. Misurando approssimativamente il diametro apparente del sole, e determinando per mezzo di alcune supposizioni quante volte il suo diametro reale è contenuto nella sua distanza dalla terra, e quante volte questa distanza è contenuta nel diametro della sfera, alla superficie della quale si supponeva allora che fossero attaccate le stelle fisse, giunge in fine a concludere che il diametro di questa sfera non può esser maggiore di 10,000,000,000 di stadij. Supponendo quindi che la lunghezza di uno stadio sia eguale a 10000 volte la lunghezza di un dito, e che una sfera di un diametro eguale alla quarantesima parte della lunghezza di un dito contenga 64000 grani, Archimede dimostra che il numero dei grani contenuti nell'intera sfera delle stelle fisse può esprimersi nel suo sistema di numerazione, con un numero che nel nostro sistema di numerazione è minore di 2 seguito da 63 zeri.

Esiste un libro di *Lemni* attribuito ad Archimede che fu tradotto dall'arabo nel 1659, e pubblicato nel 1661 da Borelli, il quale lo aveva ritrovato in conti-

nuazione dei tre libri di Apollonio da lui scoperti io un manoscritto arabo (*Vedi Apollonio*). È vero che Archimede e il suo commentatore Eutocio parlano di uo' opera simile, ma la natura troppo leggera delle cose contenute nei *Lemma* ha indotto molti a riguardar questo libro come non autentico.

L'antichità ha attribuito ad Archimede più di quaranta invenzioni meccaniche di una somma importanza, ma che non tutte sono state descritte da' suoi biografi e da' suoi comentatori. La vite perpetua, la puleggia mobile, le taglie o sistemi di molte pulegge unite insieme per sollevare pesi gravissimi, una macchina detta elice per varare i uavigli, sono generalmente considerate come produzioni del suo genio fecondo. Si annovera pure tra le sue invenzioni la vite cava, in cui l'acqua sale pel proprio suo peso, e della quale facevasi uso i navigatori antichi per vuotar l'acqua dalle sentine dei vascelli. Diodoro asserisce positivamente che questa macchina, che egli chiama *coclea*, e che anche oggi porta il nome di *coclea d'Archimede*, è di sua invenzione, e che esso l'immaginò durante un viaggio che fece in Egitto, dove l'applicò a disseccare i terreni inondati dal Nilo. Io non vi fu macchina che producesse effetti maravigliosi, la quale non si cercasse di attribuire ad Archimede, tuota era la maraviglia e l'entusiasmo che quel genio sommo aveva destato ne' suoi contemporanei e ne' suoi successori.

Gli si attribuisce pure un gran numero di opere che non sono giunte fino a noi, e di cui la lista può leggersi nella *Bibliotheca graeca* di Fabricio; e particolarmente un trattato sugli *Specchi ustori*, ed un altro sulla *Parabola* pubblicato a Lovanio nel 1548; ma non vi sono ragioni per credere alla loro autenticità.

I limiti che ci sono imposti non ci permettono di dare maggiori sviluppi a queste ricerche sulle invenzioni meccaniche d' Archimede; la fama immensa che, sotto quest' ultimo rapporto, è rimasta congiunta al suo nome presso tutte le nazioni civilizzate, attesta nel tempo stesso il loro numero, la loro utilità e la loro importanza. È d' uopo non ostante convenire che la meccanica pratica fosse al suo tempo una scienza tutta nuova, se si considera la maraviglia e l'entusiasmo che eccitò la proposizione ch' ei fece al re Gerone: *Da mihi ubi consistam, et terram commovebo*: « Mi si dia un punto d' appoggio e solleverò la terra; » la quale non è che una conseguenza semplicissima della teoria della leva, e che quanto è teoricamente possibile è altrettanto impossibile in pratica. Ma questa proposizione, che è divenuta celebre, ha dato luogo ad un calcolo curioso, che non è così universalmente conosciuto; ed è quello di determinare, per esempio, quanto tempo Archimede avrebbe impiegato per sollevare la terra soltanto di un pollice. Ozanam ha fatto questo calcolo, ed ha trovato che vi avrebbe impiegato 3,653,745,176,808 secoli.

Archimede era parente di Gerone, re di Siracusa, e ne godè sempre la stima e l'amicizia; ma inteso costantemente agli studj suoi prediletti non sembra che occupasse uffizio nessuno nel governo. La sua vita scritta, secondo Eutocio, da Eratclide non è giunta fino a noi, e tutto ciò che di lui si conosce è stato estratto da varii autori, i principali dei quali sono, Polibio suo contemporaneo, Tito Livio, Plutarco e Cicero. Euclide morì verso il tempo in cui nacque Archimede, Apollonio di Perga è più giovane di quaranta anni, ed Eratostene nacque dieci anni avanti di lui.

Gli ultimi giorni di questo grand' uomo occupano un bel posto nella sua vita. Ei gli consacrò alla difesa di Siracusa, sua patria, assediata dal console Marcello, e divenne l'anima della difesa più abile e più lunga di cui la storia faccia menzione.

Archimede costruì specchi ustori, per mezzo dei quali incendiò la flotta romana? Ci basterà il dire che una tal questione, grandemente agitata tra i dotti, non ne è una per la storia tradizionale, malgrado il silenzio che su questo punto

conservano Tito Livio, Plutarco, e Polibio, i quali nondimeno con una nobile simpatia raccontano i fatti illustri di Archimede all'assedio di Siracusa. Per le discussioni che su questo soggetto sono state fatte, rimandiamo il lettore a Montucla, *Histoire des mathématiques*, Parigi, 1799, 4 vol. in-4, e Bossut, *Histoire générale des mathématiques*, Parigi, 1810, 2 vol. in-8. Ma ciò che almeno è fuori di dubbio si è che quel memorabile assedio gli offrì una gloriosa occasione di palesare l'estensione delle sue cognizioni meccaniche, e circondò il suo nome della doppia aureola della gloria che dispensano le scienze, e di quella che compar- tono il coraggio e il patriottismo.

I Romani sono sbarcati in Sicilia, dove il terrore del loro nome e la potenza delle loro armi hanno disperso avanti le loro legioni vittoriose tutti quelli che avevano potuto pensare di opporre qualche resistenza. Essi giungono sotto le mura di Siracusa colla rapidità dell'aquila. Siracusa sola rimane ancora libera in tutta la Sicilia; ma i suoi cittadini sbigottiti non pensano a difendersi. Un uomo solo, un vecchio venerabile per la sua scienza e per le sue virtù, si avvanza sulla pubblica piazza, ed osa promettere la vittoria a' suoi concittadini scoraggiati. Alle macchine di guerra dei Romani opporrà macchine, la potenza delle quali è ancora sconosciuta nell'arte militare; al saettare dell'inimico risponderà con una pioggia micidiale di grosse pietre e di materie infiammate. Quest'uomo, il di cui zelo patrio è avvalorato da tutta la fiducia che può ispirare la certezza della scienza, è Archimede. Ben presto alle promesse tien dietro l'effetto: perdite orribili vengono ad arrestare l'audacia dei Romani; masse enormi di pietre piombano sulle loro legioni, e ne schiacciano file intere; i loro vascelli che chiedono il porto di Siracusa sono incendiati, o afferrati da gigantesche tanaglie vengono sollevati in aria, e ricadono in frantumi nel mare. Per la prima volta gl'intrepidi soldati di Marcello si arrestano, atterriti all'aspetto di questi prodigi, ed ogni volta che una di queste terribili macchine, che gettano la morte tra le loro file, si dirizza sulle mura di Siracusa, traggonsi indietro e ricusano d'inoltrarsi alla pugna. L'aquila romana piega un istante avanti il genio di un vecchio. Marcello, disperando di trionfare di una tal resistenza, cambia l'assedio in blocco, aspettando, per impadronirsi della città, un'occasione favorevole, che non tardò a presentarglisi. Un giorno in cui i Siracusani, nella fiducia ispirata loro dai molteplici miracoli d'Archimede, offrivano un sacrificio a Diana, i Romani diedero all'improvviso la scalata, e penetrarono nella città, che fu presa e abbandonata agli orrori di un'esecuzione militare.

Il console Marcello, penetrato di stima e di venerazione per l'illustre Archimede, aveva espressamente ordinato che si risparmiassero i suoi giorni, e che si rispettasse la sua abitazione. Nulladimeno un soldato vi penetrò. Archimede, insensibile al romore cagionato da tanta catastrofe, era occupato, si racconta, a descrivere alcune figure geometriche, e quel soldato lo passò da parte a parte colla sua spada *Impius miles!* esclama un antico autore narrando questo deplorabile avvenimento. La storia non ci ha conservato il nome di questo parricida, affinchè l'immortalità associata a quello della nobile vittima non venisse partecipata dallo stupido suo uccisore.

Così morì Archimede di Siracusa, l'anno di Roma 542 e 212 avanti G. C. in età di settantacinque anni; ei non sopravvisse alla sua patria che i suoi lavori avevano illustrata, e che la sua scienza aveva protetta contro il nemico. Il suo nome è uno dei più belli tra quelli che adornano i fasti della scienza e della umanità.

Archimede ci offre un esempio infelicemente troppo comune, che la celebrità più grande non si stabilisce sempre mediante le scoperte più belle. S'ei non fosse stato che il primo geometra del suo secolo, avrebbe potuto, con questo gran titolo di gloria, vivere e morire nell'oscurità; ei si attirò un'alta considera-

zione per le sue macchine. Incapace di valutare le speculazioni del genio, la moltitudine ammira l'uomo che colpisce i suoi sensi e la sua immaginazione con spettacoli nuovi e straordinari. È questa la bussola che dirige la stima del volgo, vale a dire la maggior parte degli uomini. Archimede però era ben lungi dal dare la medesima importanza alle sue invenzioni meccaniche; ei non pregiava che le cose di pura teoria, reputando vile, bassa e mercenaria qualunque scienza d'inventare e comporre macchine, e in generale qualunque arte che posta in uso apporti utilità. Ecco su questo proposito come si esprime Plutarco, secondo la traduzione del Pompei, nella vita di Marcello: « Era pertanto Archimede fornito di tal nobiltà e profondità di mente e sì fatta dovizia avea di speculazioni, che non degnò di lasciar nulla di scritto intorno a que' suoi lavori, che pur gli acquistaron nome e gloria di un certo, non dico umano, ma divino sapere; e tenendo egli per cosa ignobile e vile l'industria circa i lavori meccanici ed in generale ogni altra arte, che trattata sia per bisogno, pose ogni studio e ambizione sua in quelle cose solamente, la bellezza ed eccellenza delle quali mista non è colla necessità, alle quali paragonar non se ne può verun'altra, e nelle quali contendono di preminenza la materia e la dimostrazione, l'una per la grandezza e per la bellezza sua, l'altra per l'esatta certezza e per la forza sua convincente. » Infatti Archimede per questa sua non curanza non ha lasciato nessuno scritto sulle sue macchine, se se n'ecceppa una sfera la quale, secondo Cicerone, rappresentava i movimenti degli astri nelle ragioni delle rispettive loro velocità: anche Clandiano ne parla. Da quanto ambedue ne hanno detto si conosce che doveva essere una sfera mobile, o, se non può affermarsi con certezza che si movesse da per sé per un moto a guisa d'orologio, è facile concepire che essa poteva somigliare alle macchine inventate per rendere sensibili i fenomeni astronomici, e che si fanno muovere colla mano. Pappo e Proclo citano un trattato di Archimede sulla costruzione di questa sfera.

Le opere di Archimede sono scritte in dialetto dorico che era il più comune in Sicilia. Il testo nella massima parte è ben conservato; lo stile è chiaro, e migliore di quello di qualunque altro dei geometri greci; le dimostrazioni sono lunghe ma rigorose; e Peyrard, chiamando Archimede l'Omero della geometria, ha fatto una similitudine che è perfettamente ammissibile pel grado della lode che vuole esprimersi; se non per gli altri rapporti. I commenti di Eutocio che si conservano anche oggi sono quelli sulle opere, *De Sphaera et Cyliandro*, *De dimensione Circuli*, e *De aequiponderantibus*, e contengono notabili particolarità e indicazioni di opere che ora non si conoscono, e che certamente perirono colla biblioteca d'Alessandria.

Le principali e più stimate edizioni delle opere di Archimede sono le seguenti: I. *Archimedis Syraeusani, philosophi ac geometrae excellentissimi, opera quae tandem extant, atque a quam paucissimis hactenus visa, nunc primum et graece et latine in lucem edita. Adjecta quoque sunt Eutocii Ascalonitae in eisdem Archimedis libros commentaria, item graece et latine, nunquam antea excusa*, Basilea, 1544, in fol. In questa edizione, che fu fatta per cura di Tommaso Geckaufl, più comunemente conosciuto sotto il nome di *Fenatarius*, e che fu riveduta da Regiomontano, mancano i *Lemmi*, e il trattato *De humida insidentibus*. Essa può considerarsi come la prima edizione delle opere di Archimede, poichè per l'avanti non si conosceva che la sola traduzione latina di alcuni trattati, fatta dal Tartaglia, e pubblicata a Venezia col titolo, *Archimedis opera emendata*, 1543, in-4; II. *Archimedis opera eum commentario Eutocii a Cammandino edita*, Venezia, 1558, in fol.; III. *Archimedis opera quae extant graece et latine novis demonstrationibus commentariisque illustrata per Davidem Rivalium a Florentia*, Parigi, 1615, in fol. Questa edizione, che

venne ristampata con parecchie correzioni a Parigi nel 1646, in-fol. dal P. Richard, non contiene dell'originale greco che le epistole d'indirizzo e gli enumerati, eccetto l'*Arenarius* che vi si trova completo; la traduzione latina, le note, e la vita d'Archimede sono opera di David Rivault de Flurance; questa edizione è stata criticata da varj editori moderni, ma tanto Montucla quanto Vossio ne fanno molti elogi; IV. *Admirandi Archimedis Syracusani monumenta omnia mathematica quae extant, ex traditione Francisci Maurolyci*, Messina, 1672, e Palermo, 1685, in fol. Questa edizione non è che una specie d'imitazione degli scritti d'Archimede; V. *Archimedis opera; Apollonii Pergaei conicorum libri quatuor; Theodosii sphaerica, methodo nova illustrata, et succincte demonstrata*, Londra, 1675, in 4. Questa edizione è dovuta a Barrow; VI. *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis, ex recensione Josephi Torelli Feronensis cum nova versione latina; accedunt lectiones variantes ex codicibus Mediceo et Parisiensibus*, Oxford, 1792, in fol. Questa bella edizione, che forma continuazione all'*Euclide* di Gregori, e all'*Apollonio* di Halley è la prima veramente compiuta che siasi fatta delle opere di Archimede, ed è forse la migliore di tutte. La sua pubblicazione è dovuta alle cure della Università di Oxford, sollecitata prima da Filippo Stanhope ad assumersi l'impressione del manoscritto rimasto nelle mani degli eredi di Torelli.

Le opere di Archimede sono state tradotte in francese da Peyrard, e stampate a Parigi nel 1807 in-4, ed ivi, 1808, a vol. in-8. Questa traduzione, eseguita a richiesta dell'Istituto, è stata riveduta da Delambre, il quale vi ha aggiunto una memoria sull'aritmetica dei Greci, soggetto curiosissimo, poichè non è rimasto a noi, per così dire, che qualche indizio dei modi che essi impiegavano nel fare i grandi calcoli. Le opere di Archimede vennero tradotte in tedesco da Gio. Cristoforo Sturm nel 1670, ma una traduzione tedesca molto migliore è stata pubblicata da Ernesto Nizze a Stralsunda nel 1824 in-4. Nel primo volume della prima edizione della *Raccolta d'Autori italiani che trattano del moto delle acque*, si trova il *Trattato de' Solidi natanti nel fluido*, tradotto in italiano e dimostrato dal P. Guido Grandi.

Il lettore desideroso di maggiori notizie sulla vita e sugli scritti d'Archimede potrà consultare Montucla, *Histoire des mathématiques*, Parigi, 1799, 4 vol. in-4; Mazzuchelli, *Notizie intorno alla vita, alle invenzioni, ed agli scritti di Archimede*, Brescia, 1737 in-4; Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, Parigi, 1838, Tom. I, pag. 35 e segg.; ed una Memoria di Melot inserita nelle *Memorie dell'Accademia di Belle Lettere* di Parigi, Tom. XV.

ARCHITA, di Taranto, filosofo pitagorico e matematico distinto di quell'antica scuola, visse durante il quinto secolo avanti G. C. Non ci rimangono di lui che pochi frammenti ed i titoli di alcune delle numerose opere che aveva composte e che senza dubbio perirono nella catastrofe alla quale egli stesso soccombette, poichè Platone, che aveva ascoltato le lezioni di Archita e che parla di lui coll'interesse dell'amicizia, già deplorava la perdita de' suoi scritti. Si sa però che Archita diede, forse il primo, un fine di utilità reale alle speculazioni astratte della geometria, applicandole agli usi della vita. Con questa intenzione cercò di fondare una teoria della meccanica e costruì diverse macchine idrauliche, che gli procacciarono la riconoscenza e l'ammirazione de' suoi contemporanei. L'antichità considerò soprattutto come un'opera degna dell'immortalità la sua celebre colomba artificiale, il di cui meccanismo era così ingegnosamente combinato, che imitava, si racconta, il volo delle colombe naturali. Forse vi è qualche esagerazione nelle lodi che sono state prodigate a questo automa. Al genio d'Archita dobbiamo il metodo per trovare le medie proporzionali tra due linee date, nella soluzione del problema della duplicazione del cubo; metodo che può vedersi latamente espo-

sto dal Prof. Flauti nella sua *Geometria di Sito*, Napoli, 1821, in-8. Si attribuisce pure a questa geometra l'invenzione della vite e quella della grue, agenti meccanici di grande importanza. Le sue profonde meditazioni non gl'impedirono però di essere utile a' suoi concittadini: sette volte tenne il governo della sua patria, e in varj incontri comandò l'armata, nè fu mai vinto. Egli sottrasse ancora Platone alla collera di Dionisio il tiranno, che voleva farlo perire.

I titoli delle varie opere di Archita si possono vedere nella *Storia della Filosofia* di Stanley. Ci resta sotto il suo nome, sebbene vi siano molte ragioni per dubitare che a lui veramente appartenga, un *Trattato sulle dieci Categorie*, o *sulla Natura di tutte le Cose*, pubblicato in greco da Camerario a Lipsia, 1564 in-8, e in Venezia 1571 in-4, grec. lat. Un frammento d'Archita intorno alle matematiche, pubblicato da prima da Enrico Stefano, Parigi, 1557 in-8, è stato ristampato a Copenaghen nel 1707, in-4, per cura di Giovanni Gramm danese, che lo ha arricchito di una dissertazione su questo filosofo. I frammenti delle opere attribuite ad Archita si conoscono specialmente per le citazioni di Stobeo. Tommaso Gale, ne' suoi *Opuscula mythologica*, Cambridge, 1671, in-8, ne ha pubblicato uno sulla *Saggezza*. Sopra Archita si può ancora vedere Schmidt, *Dissertatio de Archyta Tarentino*, Jena, 1683; Navarro, *Tentamen de Archytae Tarentini vita atque operibus*, Copenaghen, 1819; Montucla, *Histoire des mathématiques*, Parigi, 1799, 4 vol. in-4; Fabricio, *Bibliotheca graeca*, Ambrurgo, 1722, 11 vol. in-4; Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, Parigi, 1838, Tom. I pag. 31; come pure Diogene Laerzio, Eutocio, e Stobeo.

Le cognizioni astronomiche e geografiche d'Archita sono state celebrate da Orazio in una delle sue più belle odi, in cui fa allusione alla sua morte funesta in questi termini:

*Nec quidquam tibi prodest
Aeris tentasse domos, animoque rotundum
Percurrisse polum, morituro!*

HOR. OP. LIB. I, OD. 28.

Archita infatti perì in un naufragio, e il suo corpo fu ritrovato sulle coste della Puglia, sulle quali era stato rigettato dai flutti l'anno 408 av. G. C.

ARCHITETTURA (*Storia, e Applicazione delle Matematiche alle Arti*).

L'architettura è un'arte fisica, e come tale può esser considerata sotto il punto di vista estetico, vale a dire nel rapporto dell'eleganza delle forme e della bellezza degli ornamenti, e sotto il punto di vista matematico, vale a dire nel rapporto della solidità e dell'esattezza delle proporzioni. Occupandoci accidentalmente dell'architettura sotto il primo di questi punti di vista, non si crederà certamente che sia nostra intenzione di voler considerare l'Arte, nel senso che le si dà, o piuttosto in quello che le si vorrebbe dare oggigiorno in Francia, dove una specie di setta letteraria è sorta improvvisamente ad imbracciare il cammino progressivo della civilizzazione, colla produzione di teorie vaghe ed insensate, che già hanno steso la loro funesta influenza su tutte le opere dello spirito. Bisogna pur dirlo, giacchè adesso se ne presenta naturalmente l'occasione, questa letteratura che manca di principio, e che per conseguenza non ha alcun fine, si studia di seguitare la sua deplorabile direzione, per obbedire a ciò che essa crede essere un bisogno indispensabile di novità, dal quale suppone che l'umanità sia tormentata. Si vedrà in breve che, ammettendo l'esistenza di una tal causa generale, questa letteratura non mostra almeno una cognizione molto profonda del passato, poichè s'immagina di creare cose nuove, praticando con enfatica esagerazione idee antichissime, e già da lungo tempo dalla filosofia con-

dannate. Essa prende per un progresso il movimento retrogrado che essa cerca d'imprimere allo spirito umano, sostituendo a tutte le leggi dell'estetica i metodi materiali dell'imitazione. Infatti, il fine essenziale dell'arte non è l'imitazione della natura, qualunque d'altronde sia l'oggetto di questa imitazione: in nessuna sua parte la natura offre il modello delle bellezze che l'ingegno umano ha tratte dal marino, ha gettate sulla tela, ha sparse sui meravigliosi edifizj che adornano le città. L'arte dunque appartiene tutta intera alla volontà dell'uomo; essa è il prodotto della sua spontaneità, ed è soprattutto in questa produzione che egli manifesta la potente facoltà di creazione che in lui si ritrova. La scienza, al contrario, ha per oggetto la verità, che non è dato all'uomo nè di modificare, nè di occultare. Ciò non ostante, il principio dell'arte non è punto arbitrario, ed è unicamente nella coordinazione degli elementi che lo compongono, che si spiega liberamente la facoltà creatrice di cui abbiamo parlato. Queste considerazioni generali si collegano in un modo intimo al soggetto che ci occupa.

Secondo un gran numero di architetti moderni, i quali d'altronde non fanno in questo rapporto che adottare antiche opinioni, l'architettura invece di comprendere la scienza completa delle costruzioni, si ridurrebbe all'arte di abbellirle e di disporre gli ornamenti. Questo giudizio che si fa dell'oggetto dell'Architettura è evidentemente falso; esso è una conseguenza di questi due principj erronei, che cioè il fine principale di qualunque edificio è quello di piacere agli occhi, e che questo fine non può ottenersi che mediante l'imitazione. In questo sistema, gli ordini dell'architettura non sarebbero che un'imitazione della struttura del corpo umano e della capanna, primo riparo che i bisogni della famiglia fecero immaginare all'uomo contro le intemperie delle stagioni. Abbiamo detto che questa idea non era nuova; noi infatti la ritroviamo presso a poco così espressa in Vitruvio: «Una fabbrica, dice egli, non può esser bene ordinata, se tutte le sue parti non hanno le une rispetto alle altre quelle medesime proporzioni, e quegli stessi rapporti che si trovano in un uomo ben conformato». Questo celebre architetto, esponendo l'origine degli ordini primitivi dell'architettura greca, esposizione di cui dovremo in breve occuparci, sviluppò questo principio con maggiore estensione. In tal modo rimane dunque stabilito che questa teoria dell'arte appartiene interamente all'autichità.

Dall'insieme di quanto siamo per esporre si potrà giudicare se effettivamente esistano dei rapporti tra gli ordini d'architettura e il corpo umano; ma prima di tutto dobbiamo affrettarci a dire che il fine reale di quest'arte è l'utilità.

Non è che per mezzo di considerazioni filosofiche dell'ordine il più elevato che si possono ottenere alcune nozioni esatte sul primo sviluppo delle facoltà intellettuali dell'uomo. Ma fino al presente la storia non ha fatto mai uso di alcun metodo *a priori*, per iscoprire le cause incognite dei fatti che essa si limita a narrare; ed è per questo che essa non può ancora esser considerata come una scienza. Noi non erediamo di dovere anticipare i suoi progressi in questa circoscrizione, e ci contenteremo di dire che non esiste nessun mezzo per determinare storicamente l'epoca in cui l'architettura ha cominciato ad essere un'arte, e quella in cui la scienza è venuta a dettar regole alle sue produzioni. Se l'uomo, al suo primo apparire sulla terra, non conservava più, dopo la sua caduta, la memoria di qualche rivelazione anteriore, la necessità ha dovuto essere il primo mezzo per sviluppare la sua intelligenza. Così l'arte di fabbricare non è stata, in questa ultima ipotesi, che il risultato necessario dell'organizzazione umana, vale a dire del suo istinto sociale. Infatti dall'accrescimento della famiglia è nata la società, e l'arte di fabbricare ha dovuto seguirne i progressi della civilizzazione sociale.

Fu nel seno della terra che l'uomo si scavò dapprima un rozzo ricovero? o piuttosto

tosto lo ha egli cercato nel folto delle vaste foreste, o nelle sinuosità delle montagne? Una tal questione è una conseguenza di quella che abbiamo posta cominciando questo ristretto storico: e perciò non può esser risolta con una certezza maggiore. Ciò non ostante, le tradizioni le più remote delle nazioni primitive permettono di supporre che, se pure l'uomo si è trovato un tempo in tale stato di fanciullezza e di privazione, ciò non ha potuto essere che per un periodo molto breve, perchè nell'infanzia stessa delle società dappertutto si trova la memoria di grandi riunioni di esseri umani raccolti in città.

Secondo la maggior parte degli autori che hanno scritto la storia dell'architettura, la CAPANNA sarebbe stata la prima opera architettonica dell'uomo, e nella NATURA avrebbe esso trovato il modello delle forme che diede a questo primo asilo creato dalla sua intelligenza. Uno di tali scrittori, Laugier, che ha adottato questa opinione con più entusiasmo che ragione, ha fatto, descrivendo la capanna primitiva, una specie di poetica dell'architettura, che tutti conoscono. Ma qualunque sia il talento che possa spiegarsi in questi giudizi puramente ideali ed arbitrarii, non si potrà mai, senza inconveniente, considerarli come atti a servir di base ai precetti di un'arte, e meco ancora alle leggi di una scienza. D'altronde non si è riflettuto che la costruzione della capanna, adottandola come tipo primordiale, non ha potuto effettuarsi che per mezzo di strumenti, la di cui invenzione non potrebbe essere stata immediata, e che essa infine suppone lavori eseguiti coll'ajuto di macchine già molto complicate, e con mezzi atti ad agire su masse di grandezza importante. L'arte del carpentiere che, nel sistema della capanna, avrebbe preceduto l'arte di fabbricare, non esige meco di questa la cognizione delle proporzioni e delle nozioni di meccanica, per la sovrapposizione e per la giusta collocazione delle travi e degli intavolati. In secondo luogo, dove si trova nella natura il modello della capanna? se questo modello fosse esistito, l'uomo lo avrebbe adottato a preferenza di qualunque altro. La capanna dell'Indiano del nuovo mondo, quelle del Caffo e dell'Ottentotto, fabbricate secondo le esigenze del clima e di abitudini sociali poco sviluppate, attestano senza dubbio un prodotto intelligente del bisogno, ma noi non sappiamo che la natura ne abbia indicate le forme sul suolo dove esse sono state elevate. Da queste diverse obiezioni possiamo dunque logicamente dedurre la conseguenza che, per una parte, quando l'uomo è stato in grado di costruirsi la capanna, aveva pure i mezzi di farsi un'abitazione più durevole, e per un'altra parte che nella spontaneità della sua sola ragione ha attinta l'idea delle forme che egli ha date alla sua prima opera architettonica.

Se ci siamo alquanto estesi nell'esporre queste ipotesi, che del resto non ci sembrano interessare espressamente la storia dell'arte, lo abbiamo fatto perchè abbiamo creduto utile di sottoporre al giudizio della sua ragione, fino dalla sua origine, un sistema, o se si vuole una poetica, che sorride all'immaginazione dei giovani destinati alla carriera dell'architetto, e che essi sono inclinati ad abbracciare. Noi investigheremo adesso l'origine, e seguiranno il progresso dell'arte, non più nella storia tradizionale, ma nei fatti autentici delle nazioni civilizzate, sulle tombe delle quali grandi e maestosi monumenti, che hanno resistito alle procelle dei secoli, ci offrono anche oggidì mezzi di confronto e testimonianze irrefragabili della sapienza delle età trascorse.

L'ordine cronologico dà all'architettura degli Egiziani il primo posto nella storia dell'arte di fabbricare. È certo che la capanna non può averla preceduta presso quella nazione, la civilizzazione della quale è come la progenitrice della nostra, e di cui, ciò non ostante, l'antico stato di società è restato per noi un impenetrabile mistero. Invece di foreste, il suolo dell'Egitto non contiene che sterminate masse di macigni che somministrano pietre facili a mettersi in uso. Per conseguenza l'uomo ha dovuto necessariamente costruirsi in questo paese ri-

pari più solidi della capanna, e cercarsi fuori della natura i modelli dei vasti edifizj che vi ha costruiti.

Il carattere grave e tutto nazionale dell'architettura egiziana non ha permesso ai popoli moderni di adottare nessuna delle sue forme. All'aspetto di quelle masse imponenti, ma che sembrano portare l'impronta di un sistema atroce di servitù, destinato a incatenare insieme il passato e l'avvenire in una terribile immobilità, l'arte ha dovuto arrestarsi, come l'intelligenza si perde in un problema insolubile.

Ciò non ostante, a torto si è preteso di negare a questo sistema di architettura regole teoriche, come quelle di cui gli ordini greci ci offrono l'applicazione. A torto pure si è voluto considerare questo sistema come comprovante una mancanza di scienza, d'invenzione e di gusto. Noi non ne giudichiamo così. Si cade in simili errori ogni qual volta si cerca di separare le opere dell'uomo dal loro principio intellettuale. Ma se le migliori leggi sono, per un popolo, quelle che meglio ei può sopportare, e che convengono d'altronde al suo genio, gli edifizj più belli sono pure quelli, che nel destino al quale devon servire si armonizzano meglio col clima, coi costumi e colle idee generali dei popoli che gli hanno innalzati. L'architettura egiziana ci sembra riunire nel grado il più eminente le condizioni di durata e di stabilità, che le istituzioni politiche e religiose di quel popolo avevano in mira. I suoi monumenti i più antichi non offrono nessuna differenza notevole da quelli che quel popolo ha costruiti negli ultimi tempi della sua nazionalità; essi hanno lo stesso carattere, le stesse proporzioni, le stesse disposizioni, e, nella loro tetra maestà, sembrano pure eretti collo stesso fine.

E dunque impossibile il non riconoscere nell'architettura egiziana un complesso di regole ancor più severe e più rigorose di quelle di cui i Greci stabilirono l'uso. Queste regole, si dice, rendevano però impossibile qualunque progresso; ma il progresso, quale almeno ce lo figuriamo, non entrava come elemento sociale nella legislazione egiziana. Essa non aveva voluto che i capricci del gusto potessero giammai influire sull'ordine politico e religioso da essa stabilito: l'architettura nazionale doveva dunque esser soggetta alle sue prescrizioni assolute. Nel rapporto poi della scienza, questa architettura suppone estese cognizioni meccaniche, ed in quello dell'invenzione e del gusto noi non possiamo darne un retto giudizio, senza prendere in particolar considerazione il clima, la religione ed i costumi pubblici, dei quali le era ordinato di riprodurre dappertutto i simboli venerati.

La cognizione dell'architettura egiziana non fa parte degli studj, ai quali si dedicano i giovani architetti de' nostri tempi. Senza dubbio la pratica in grande di quell'antico sistema di costruzione formerebbe coi nostri mobili costumi, e colle nostre frivole abitudini un contrasto assai bizzarro; ma pure se ne incontrano talvolta nei nostri cimiteri delle rimembranze incomplete. Si direbbe che il dolore, comune all'umanità e il linguaggio del quale è universale, rammenti all'artista, alla presenza di una tomba, le tradizioni dell'architettura egiziana, sì potente sull'anima, poichè il suo carattere grave e malinconico porta pure impressa l'idea dell'eternità.

Si concorda comunemente che la Grecia abbia ricevuto dall'Egitto i suoi primi abitatori; almeno questo fatto storico non è contestato. Ma la civilizzazione del Delta non poteva esser trapiantata nel Peloponneso sì facilmente come un albero straniero, del quale il dolce clima di quel paese avesse favorito la vegetazione. Infatti i Greci, siano stati quali si vogliano i loro maggiori, compariscono nella storia con una cosmogonia, con una legislazione e con costumi che non appartengono che ad essi. Si diceva, è vero, in Grecia che l'Egitto era la terra natale degli Dei e delle arti; ma non vi si pregava agli stessi altari, e le arti non vi furono animate dalle stesse ispirazioni.

Nei più antichi poeti della Grecia, si trovano splendide descrizioni di palazzi e di giardini edificati, che non permettono di dubitare che gli uomini vi rimasero molto presto alla capanna, per fabbricarsi abitazioni di maggiore stabilità: ma non esiste né in Omero, né in Esiodo, l'indicazione, quantunque vaga, di alcun sistema regolare di architettura. Seconda una tendenza naturalissima tanto all'infanzia delle società quanto all'infanzia dell'uomo, questi poeti si occupavano assai più della materia che della forma dei monumenti. I palazzi degli Dei e dei re sono da essi rappresentati come edifici sontuosi, incrostati d'oro, di marmo, di porfido; ma non fanno menzione nessuna delle loro distribuzioni architettoniche, e sembra che ignorassero l'esistenza degli ordini, ad uno dei quali nondimeno la tradizione attribuì in seguito una origine molto anteriore.

Il celebre Vitruvio ha adottato questa tradizione nei suoi poetici errori. Da lui prenderemmo il suo racconto, che interessa estremamente la storia autentica dell'arte, e che d'altronde è la sorgente di quella falsa idea, che l'architettura debba l'origine delle sue belle forme all'imitazione della natura. Ecco dunque come il principe degli architetti, per servirci di una espressione familiare agli antichi, spiega l'origine degli ordini greci e greco-romani.

« Doro, re del Peloponneso, avendo fatto erigere un tempio a Gionone in Argo, l'ordine del quale casualmente si servì in questo edificio prese il nome di dorico.

« In seguito gli Ateniesi spedirono nell'Asia minore varie colonie sotto la condotta di Jon, e chiamarono Jonia il paese in cui questi si stabilì. Primieramente vi fabbricarono dei tempi dorici, e principalmente quella di Apollo. Ma siccome non sapevano bene qual proporzione bisognasse dare alle colonne, cercarono il mezzo di farle abbastanza forti da sostenere il peso dell'edificio, e di renderle nel tempo stesso graziose alla vista. A tale oggetto, presero la misura di un piede di un uomo, che è la sesta parte della sua altezza, e su questa misura formarono le loro colonne, dimaierachè diedero loro sei diametri di altezza. Così la colonna dorica fu posta negli edifici, colla proporzione, colla forza e colla bellezza del corpo dell'uomo. » Per la forma e per le proporzioni geometriche di quest'ordine, si veda la Tavola XXIX n.º 2.

« Alcuni tempo dopo, fabbricarono un tempio a Diana, e cercarono collo stesso metodo qualche altra forma che fosse pure bella; ed essi imitarono la delicatezza del corpo di una donna. Nell'erigere le colonne, diedero loro una base a forma di corde attortigliate, per esserne come la calzatura; aggiunsero delle volute ai capitelli, per rappresentare quella parte di capelli che pende a destra e a sinistra; sul frontespizio delle colonne posero delle liste per imitare il resto dei capelli che sono legati e raccolti dietro il capo delle donne; colle scanellature imitarono le pieghe delle vesti, e quest'ordine inventato dagli Jonii prese il nome di jonico. » Si veda la Tavola XXIX, n.º 3.

« L'ordine corintio rappresenta la delicatezza del corpo di una giovinetta, cui l'età rende la persona più svelta e più suscettibile degli ornamenti che possono aumentare la sua bellezza naturale. L'invenzione del suo capitello è dovuta a questa circostanza. Una giovinetta di Corinto, in procinto di maritarsi, essendo morta, la sua nutrice collocò sulla sua tomba in un paniere alcuni piccoli vasi che essa in vita aveva amato, ed acciocchè stando alla scoperta il tempo, non gli guastasse troppo presto, pose un embrice sul paniere, il quale essendo stato casualmente collocato sopra una pianta di acanto, accadde che, quando cominciarono a spuntare le foglie, il paniere che era nel mezzo della pianta obbligò ad elevarsi intorno a sé i rami di essa, e questi crescendo ed incontrando l'embrice furono costretti a curvarsi e a fare un contorno simile a quello delle volute. Callimaco, scultore e architetto, vide questo oggetto con piacere e ne imitò la forma nel

capitello delle colonne che in seguito fece a Corinto, fissando su questo modello le proporzioni dell'*ordine corintio*. » Si veda la Tavola XXIX n.º 4.

» Varie colonie greche avendo portato in Etruria, oggi Toscana, la cognizione dell'ordine dorico, che era il solo di cui si facesse uso in Grecia, quest'ordine vi fu per lungo tempo praticato nel modo medesimo col quale lo era nel paese donde traeva la sua origine. Ma finalmente vi si fecero parecchi cangiamenti, si allungò la colonna, le si diede una base, si cambiò il capitello, si rese più semplice l'intavolato, e quest'ordine cambiato in tal modo venne adottato dai Romani sotto il nome di *ordine toscano*. » Si veda la Tavola XXIX n.º 1.

» Lungo tempo dopo, i Romani, che avevano adottato i tre ordini greci, immaginarono di porre le volute joniche nel capitello corintio: questo capitello misto fece dare alle colonne che ne erano fregiate il nome di *ordine composito*. » Si veda la Tavola XXIX n.º 5.

Noi lasciamo alla sagacità del lettore la cura di sviluppare da queste storielle del buon Vitruvio la verità che vi si trova sì stranamente collegata colle favole popolari. Così senza arrestarci maggiormente a cercare l'origine dell'ordine dorico, e ad investigare se ha preso il nome da Doro, o dai Dorii, o da quali Dorii possa essere stato trovato, siamo di opinione che esso sia stato il primo di cui si sia fatto nella Grecia un uso sistematico e regolare. La semplicità delle sue forme, che in architettura esprime l'idea di forza e di solidità, pone la sua origine al nascere dell'arte. Non ostante è difficile di determinare l'epoca in cui l'ordine dorico cominciò ad essere impiegato; si può soltanto affermare che è stato presso a poco di un uso generale in Grecia, poichè tuttocchè che ci rimane dei monumenti i più antichi di quel paese ne conserva lo stile in tutta la sua purità primitiva.

Gli altri due ordini greci debbono avere avuto nascimento durante il periodo storico che è scorso tra l'epoca di Pericle e quella di Alessandro. La Grecia, uscita allora allora da una lunga lotta, dovette riparare le distruzioni della guerra che aveva sostenuto contro i Persiani. La vittoria di Maratona diede principio per essa ad un'era di riposo sociale, in seno del quale cercò nelle belle arti un compenso alla perdita della sua libertà. Infatti è appunto in questo lasso di tempo che fiorirono in Grecia la scultura e la pittura, e certamente l'architettura dovette partecipare dei loro progressi. Allora si elevarono nel Partenone e nei vestiboli dei tempj quei nobili ed eleganti edifizj, modelli perfetti di maestà e di bellezza, che sembrano fissare l'ultimo limite cui l'arte possa giungere.

Non si deve dunque cercare che nelle vicissitudini sociali la causa reale dei progressi successivi dell'architettura. L'ordine dorico, nella sua energica e bella semplicità, convenne per lungo tempo alla Grecia giovane e libera. Nella mollezza dell'ordine jonico, nella ricchezza dell'ordine corintio, si scorge uno stile ricercato che nel tempo stesso annunzia un grado di civilizzazione più avanzato, e un cambiamento importante nei costumi. Allora la Grecia non è più sì amante della gloria e della libertà; la gloria si è rifugiata negli studj degli artisti, e il patriottismo infievolito non cerca di manifestarsi che nella grandezza e nella bellezza degli edifizj.

La storia dell'architettura segue in Roma gli stessi progressi in ragione della modificazione necessitata dalle istituzioni nazionali.

Non è un punto storico bene stabilito che gli Etruschi, i quali si vantavano della loro antichità e della loro origine pelasga, abbiano ricevuto dai Greci la prima idea dell'ordine da essi adottato. Ma sia che l'ordine toscano riconosca un'origine italica, sia che derivi dall'ordine dorico, la severa semplicità del suo stile per lungo tempo si giudicò la sola in armonia coi costumi austeri della repubblica povera, laboriosa, e tutta preoccupata della sua grandezza militare.

L'ordine composito non nacque che all'epoca in cui le istituzioni, che avevan reso Roma la signora del mondo, cominciarono ad esser pervertite. Questa città guerriera non racchiudeva ancora che un numero piccolissimo di monumenti quando la repubblica diede luogo all'impero, poichè Augusto negli ultimi suoi anni si gloriava di aver resa di marmo quella Roma che egli aveva ricevuta di mattoni.

Sotto il regno di questo imperatore viveva Vitruvio Pollione, architetto celebre, l'opera del quale è preziosa per la storia dell'arte, nel tempo stesso che contiene un numero grande di teorie e di precetti, il di cui studio non può essere inutile agli architetti moderni. Questo trattato tradotto in diverse lingue, e intitolato: *VITRUVII POLLIONIS, de architectura libri X ad Caesarem*, è stato spesso stampato. La prima edizione è quella pubblicata a Roma senza data, in fol. per Gius. Sulp. Vernalani. La traduzione francese di Perrault, pubblicata a Parigi nel 1673 in fol., gode di molta reputazione.

Fino da questo momento non è più la Grecia che somministra le sue più belle pagine alla storia dell'architettura. Roma e l'Italia divegono per l'arte un centro attivo di produzioni. Il fanteon s'innalza per le cure di Agrippa, il genere di Augusto; la Sicilia e quella parte dell'Italia che porta il nome di Magna Grecia cuopronsi di tempj maestosi, e le loro città di mattoni divengono, come Roma loro regina, città di marmo. Tiberio, Caligola e Claudio danno i loro nomi ad importanti costruzioni. Lo stesso Nerone, con tutta l'ostentazione del suo carattere, si dà alla passione dei grandi edifizj. Per questo imperatore gli architetti Severo e Celere costruiscono la *Casa dorata*. Ma già il gusto antico si risente delle profusioni di quel tempo. Esso degenera e si corrompe con Roma in mezzo ai saturnali dell'impero; tanto è vero che, presso tutti i popoli e in tutte le epoche, l'arte porta eminentemente impresso il carattere sociale del suo tempo, carattere che non può esserle negato senza contar per nulla la filosofia della storia. Il regno di Trajano, uno dei più virtuosi imperatori che Roma abbia dato al mondo, arrestò momentaneamente la decadenza dell'arte. Sotto questo nuovo imperatore, essa riprende qualche cosa della maschia semplicità delle sue forme antiche. Il foro, gli archi trionfali, e tutti gli edifizj fatti erigere da Trajano, sembrano appartenere ad un'altra età; e seguendo soltanto il gusto austero dell'imperatore, l'architetto Apollodoro innalza la colonna trionfale, monumento eterno del suo nome, della sua gloria, e della grandezza del suo regno.

La decadenza dell'arte riprende il suo corso sotto Adriano e sotto gli Antonini. Intorno a quell'epoca, e sotto il regno di Aureliano, sorgono in Siria le città di Palmira e di Balbeck. Roma, regina delle città, vuol ricostruirle a sua immagine. Nulladimeno nuove idee che si spargono nel mondo infloiscono profondamente sull'architettura. Questa rivoluzione si annunzia da lungi: l'arco di Settimio Severo, il lusso che ostenta ancora Diocleziano nella costruzione delle terme, il suo vasto palazzo di Spalatro, offrono l'immagine di un contrasto tra il gusto antico e le nuove idee, o, se si vuole, tra il buon gusto e la barbarie che a gran passi si avvanza. È questa l'epoca di una lotta tra due principj sociali, lotta il di cui risultato deve molto influire sul progresso dell'arte. Ma, da una parte, il gusto non ha principj assoluti; e dall'altra, la barbarie si manifesta piuttosto nella distruzione che nella produzione di nuove forme. La traslazione della sede dell'impero a Bisanzio segna definitivamente la fine dell'era antica. Invano Costantino, ambizioso di rendere la nuova sua capitale bella come Roma, aduna intorno a sé tutti gli artisti della Grecia e dell'Italia. Gli artisti vi accorrono; ma l'arte, chiamata da una potenza superiore alla sua a subire una trasformazione, non produrrà più, nel suo stile primiero, che abbozzi imperfetti e vaghe rimembranze della sua brillante gioventù.

Poco tempo dopo, le numerose e forti nazioni del Nord, che le legioni romane, decadute dal loro antico valore, non possono più contenere, escono a torrenti dal seno delle gelide e tempestose loro contrade. I Goti e i Vandali, precedendo altre colonie della loro immensa famiglia, si gettano sull'Italia, e portando ovunque il ferro e il fuoco, si dividono le spoglie del mondo sulle rovine che ammassano intorno a sè.

All'architettura antica, la di cui storia fin d'ora sembra terminata, succede un'altra architettura chiamata *gotica*, che sprezzando il passato innalza le sue masse colossali sulle rovine dell'arte antica. Gli architetti, mal consigliati dai falsi principj che pretendono di assegnare all'arte, non hanno potuto spiegare né l'origine né il nome dell'architettura gotica. Infatti bisogna rennaziare a cercarvi l'imitazione del corpo umano e della capanna; ma poichè la storia dell'arte antica non riposa che sopra un complesso d'ipotesi diverse, potrebbe azzardarsene una sull'arte gotica; noi almeno vogliamo tentarlo.

Non è affatto senza ragione, come generalmente si pretende, che l'architettura del medio evo ha ricevuto la denominazione di *gotica*. Tra tutti i popoli del Nord, i Goti furono i primi la di cui invasione scosse l'antico sistema sociale, e quelli che lasciarono tracce più profonde del loro passaggio. All'epoca delle loro migrazioni comincia realmente il periodo storico al quale è stato dato il nome di medio evo. *Architettura gotica* significa dunque: *Architettura usata dopo l'invasione dei Goti*. Ciò non ostante, in questa denominazione non vi ha nulla che possa applicarsi alla nazione stessa, poichè è noto che essa non recò dal Nord nessun sistema di architettura; e d'altronde la sua dominazione non è stata tanto generale nè ha avuto in nessun luogo tanta durata e tanta influenza sociale perchè ciò possa suppirsi. Per conseguenza non è in un gusto che sia stato proprio dei popoli teutonici che bisogna cercare il principio estetico dell'architettura del medio evo. Questo principio si trova tutto nel genio del cristianesimo, del quale gli storici dell'arte non hanno troppo trascurato di valutare la potenza. La decadenza dell'arte non comincia essa sotto Nerone? e non segue essa fin d'allora con un progresso contrario il progresso del cristianesimo? Se Costantino non riuscì a fare di Bisanzio una seconda Roma, ciò fu perchè sotto il suo regno la fede del cristiano già condannava l'entusiasmo dell'artista per un sistema di architettura, di cui il politismo aveva, per così dire, logorata la maestà. Al cristianesimo bisognarono tempj di una forma novella, grave e malinconica, come lo erano la sua legislazione e le sue preci. I primi cristiani perseguitati avevano celebrato i santi misteri in sotterranei profondi, la di cui cupa grandezza armonizzava perfettamente coll'intimo sentimento del culto. Questo sentimento, i cristiani lo impressero nei loro edifizj religiosi, quando, giunti al potere, si diedero senza timore a tutto il fervore ed al genio della loro fede. Questo sentimento, tutto intero si ritrova negli ammirabili monumenti che noi dobbiamo all'architettura del medio evo; esso respira in quelle volte a tutto centro, in quelle immense arcate a tutto acuto, in quei portici maestosi, la costruzione dei quali ha costato troppi sforzi e pazienza per non essere il risultato di una potente direzione intellettuale.

A queste considerazioni generali dobbiamo aggiungere due osservazioni che vengono ad appoggiare la nostra ipotesi. Le prime invasioni delle razze teutoniche risalgono presso a poco all'epoca in cui il cristianesimo divenne la religione dell'Impero, ed in cui per conseguenza cominciarono ad erigersi tempj in armonia colle ispirazioni della sua fede. Il nome di gotico ha dunque con ragione servito ad indicare quest'età intermedia dell'architettura.

La seconda osservazione che noi dobbiamo presentare riguarda il carattere stesso dell'arte del medio evo. Non si scorge nulla dell'architettura egiziana negli edifizj colossali e nelle vaste proporzioni dei monumenti gotici? Noi non ammet-

tiamo certamente nessun sistema fisso d'imitazione nell'origine di questo stile; esso ha, perchè possa ciò supporre, un carattere troppo deciso di spontaneità, e, se può dirsi, di sociabilità. Ma da questa analogia, che spesso ci ha colpito, vogliamo dedurre la conferma di quel principio, che dovunque si riscontra, che cioè le idee sociali influiscono potentemente sull'arte. Il pensiero egiziano, come il pensiero gotico, era religioso, e perciò le due architetture hanno dovuto talvolta incontrarsi. Se inoltre si vuole aver riguardo alla differenza dei climi e dei tempi, e soprattutto alla diversità delle credenze, si vedrà che è difficile trovare rapporti così identici tra le produzioni della stessa arte in due epoche sì lontane l'una dall'altra.

Quanto allo stile *arabo* o *moresco*, che, durante il medio evo, modificò in alcuni rapporti l'architettura gotica, è facile giudicare pel semplice confronto, che esso non forma nell'arte un ordine particolare. Infatti non è che uno sviluppo dello stesso principio. I suoi dentelli, i suoi ornamenti fantastici, i suoi bizzarri fogliami non influirono in nessun modo sul sistema gotico, che gli Arabi stessi adottarono e praticarono in Europa col loro genio nazionale. I cristiani fecero uso di questo stile arabo in alcuni dei loro monumenti, perchè gli Arabi, i soli in quel tempo in possesso delle scienze, esercitavano in Europa un'influenza sociale abbastanza importante perchè essa si estendesse sulle arti.

Ciò non ostante, e malgrado l'uso dominante dell'architettura gotica, il gusto antico tentò varie volte, durante il medio evo, di riprendere la sua influenza. Il primo tentativo che fu fatto in questo rapporto risale al VI secolo, epoca in cui Giustiniano fece fabbricare a Costantinopoli la chiesa di Santa Sofia. L'architetto Isidoro gettò le fondamenta di quella basilica, e ne diresse i primi lavori in unione col geometra Antemio, che concepì il primo la nobile e ardita idea della cupola che la corona (*Ἰσίδωρος ἡ ἀρχιτέκτων*). Questo movimento di ritorno verso l'architettura greca, che impiegò quasi otto secoli a compiersi, cominciò fino dal secolo XI a prendere un carattere deciso in Italia, dove Buschetto, poendo in opera materiali che provenivano da avanzi di antichi edifizi, fabbricò la cattedrale di Pisa. Si ammira anche oggigiorno, e con ragione, la composizione di questo edifizio. Nella stessa epoca, s'innalzava in Venezia la chiesa di San Marco, che presenta una imperfetta rimembranza del gusto antico, ma in cui si scorge la stessa tendenza a ritornare agli ordini greco-romani.

Nei secoli seguenti, il campanile di Pisa, la chiesa di Sant'Antonio di Padova, la chiesa di Santa Trinita, e quella di Santa Croce di Firenze furono erette successivamente in Italia, e diedero alla reazione un carattere di perseveranza, che verso il principio del XV secolo fu coronata di un pieno successo. Il celebre Brunelleschi sorse ad addurre in favore dell'architettura antica l'autorità del suo genio sublime. Egli ritrovò i veri principj di quest'arte, e ne fece l'applicazione nell'ammirabile cupola di Santa Maria del Fiore di Firenze, che senza contrasto è la più bella protesta che il genio dell'architettura potesse fare contro lo stile gotico. Brunelleschi, nato a Firenze nel 1377 e morto nel 1444, è onorato dagli architetti come il restauratore dell'arte, ed è da esso che comincia l'epoca alla quale è stato dato il nome di *Risorgimento*, ed in seguito quello di *Secolo dei Medici*, a motivo della generosa protezione accordata da questa famiglia agli artisti e alle belle arti.

Una folla di uomini di genio si lanciò allora nell'aringo e determinò la decadenza dell'architettura gotica. Leon Batista Alberti pubblicò un trattato di architettura, che divenne celebre, e che, nel punto di vista estetico e nell'analisi dell'arte antica, è spesso molto superiore all'opera di Vitruvio. Nel 1444, nel tempo in cui Brunelleschi scendeva nella tomba, nasceva Lazzari, che ha reso sì celebre il nome di Bramante, sotto il quale è più generalmente conosciuto. Egli

morì nel 1514. Nel secolo XVI, Raffaello Sanzio e Michelangelo Buonarroti, il primo nato ad Urbino nel 1483, ed il secondo a Firenze nel 1474, formarono la gloria dell'Italia. Dopo questi sommi artisti, non citeremo più che Giacomo Barozzio, che sotto il soprannome di Vignola è divenuto sì celebre e sì popolare. Quest'architetto ha composto un trattato dei cinque ordini, che lo ha fatto soprannominare dagli artisti, giudici alquanto appassionati del suo merito, il legislatore dell'architettura. Del resto la sua opera si è conservata la miglior guida elementare che possa ancora scegliersi; ma in generale gli scritti degli architetti del risorgimento, e disgraziatamente quelli della maggior parte degli architetti moderni, sono del tutto sprovvisti di filosofia, e la scienza vi si trova continuamente sacrificata all'arte. Barozzio, nato a Vignola, piccolo villaggio nelle vicinanze di Modena, morì a Roma il 16 Aprile 1573, il settimo giorno dell'anno suo sessagesimosesto.

Qui termina la storia dell'architettura, della quale non potevamo presentare che un quadro rapido e succinto. Le diverse esposizioni pratiche delle parti di quest'arte, le quali si collegano colle scienze matematiche, si troveranno in quest'opera alle parole speciali sotto le quali queste parti sono comunemente conosciute. Sol tanto ci duole che i limiti che ci sono imposti non ci permettano di aggiungere alcune considerazioni relative allo studio dell'arte. Ci basterà però il dire che la Francia manca tuttora di una buona scuola di architettura, nella quale lo studio delle matematiche formi la base essenziale dell'istruzione dei giovani artisti che dovrebbero seguirne i corsi. La loro educazione è molto lontana dall'esser soddisfacente in questo rapporto; poichè pare che si perda interamente di vista il fine precipuo di utilità pubblica, che la ragione ha assegnato all'architettura, per lasciare che i giovani si abbandonino ciecamente al solo studio del disegno e delle arti grafiche, dal quale non possono ritrarre tutta l'istruzione che è loro necessaria per l'*architettura utile*.

Gli architetti considerano come un periodo di barbarie il tempo che è scorso dall'introduzione in Europa dello stile gotico fino al risorgimento. Questo è un errore: durante questi dieci secoli l'umanità non è rimasta sonnacchiosa. L'architettura gotica era il prodotto di un pensiero sociale: essa era sorta nel mondo come un nuovo modello: essa ha cessato di esser posta in uso, quando questo modello è invecchiato e quando questo pensiero è stato modificato. Tale è il segreto del risorgimento, o se si vuole, della restaurazione dell'arte antica. Il secolo XVI, durante il quale si effettuò questo movimento, sorse ad attaccare dalle fondamenta una moltitudine di errori che avevano avuto origine nei secoli di mezzo, ed aprì la strada ad una nuova civilizzazione. Dopo quest'epoca, l'umanità è entrata in una via novella di cui incognito è il termine, di cui non è nemmeno ben determinato il fine. Il pensiero sociale non esercita più sull'arte che un'influenza indiretta, poichè la tendenza morale della società non ha più quella grande unità che ha caratterizzato le civiltà antiche.

ARCO (*Geom.*). Porzione di una curva; per esempio, di un circolo, di un'ellisse, di un'iperbola, ec. *Vedi CURVA.*

Arco di Circolo. Parte della circonferenza di un circolo. Gli archi di un medesimo circolo, o di circoli eguali, sono *eguali* quando contengono lo stesso numero di gradi, minuti, ec. Gli archi di circoli differenti sono *simili* quando hanno la medesima misura, cioè lo stesso numero di gradi, minuti, ec.; il rapporto delle loro lunghezze è allora eguale a quello dei raggi dei loro circoli rispettivi (*Vedi CIRCOLO*). Gli archi sono *concentrici* quando appartengono a circoli che hanno il medesimo centro. Gli archi DE e FG (*Tav. XIX, fig. 10*) sono concentrici perchè i circoli ai quali appartengono hanno ambedue il centro in O.

La circonferenza di un circolo essendo incommensurabile col suo raggio, non si

può trovare alcuna espressione finita che faccia conoscere la grandezza di un arco, data in parti di raggio. Ma, quando si conosce il seno o la tangente di un arco qualunque x , si può ottenere il valore dell'arco con le serie seguenti (*Vedi Seno*), il raggio essendo l'unità.

$$x = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x - \frac{1}{7} \tan^7 x + \text{cc.}$$

$$x = \sin x + \frac{1}{2.3} \sin^3 x + \frac{1.3}{2.4.5} \sin^5 x + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \sin^7 x + \text{cc.}$$

Quando la grandezza di un arco x è conosciuta in parti del raggio, per trovare il numero di gradi che esso contiene, si pongono le proporzioni

$$3,1415926 : x :: 200^\circ : x',$$

$$3,1415926 : x :: 180^\circ : x'',$$

x' essendo il numero dei gradi per la divisione *centesimale*, e x'' il numero simile per la divisione *sessagesimale*; 3,1415926 è la semicirconfenza che ha per raggio l'unità.

Se dal valore di un arco espresso in gradi si volesse passare al suo valore espresso in parti del raggio, si farebbe pure uso delle stesse proporzioni; ma allora x' o x'' sarebbero le quantità date, e x la quantità cercata.

Indicando con r^0, r', r'' il numero dei gradi, dei minuti e dei secondi contenuti in un arco della lunghezza del raggio r , si trovano, nel caso della divisione sessagesimale, i seguenti valori:

$$r^0 = 57^\circ, 295779513082,$$

$$r' = 3437', 746770784939,$$

$$r'' = 206264'', 806247096355.$$

Accennando pertanto con a^0, a', a'' la graduazione in gradi, minuti e secondi di un arco a espresso in parti del raggio, si otterranno senza difficoltà le appresso equazioni:

$$ra^0 = r^0 a, \quad ra' = r' a, \quad ra'' = r'' a,$$

le quali pure danno la lunghezza a di un arco di raggio r , di cui sia data la graduazione, e reciprocamente.

Se, supposto $r=1$, si fa $a^0=1^0$, $a'=1'$, $a''=1''$, col che a rappresenterà successivamente la lunghezza di un arco di un grado, di un minuto, di un secondo, si troverà

$$r^0 = \frac{1}{\text{arco } 1^0}, \quad r' = \frac{1}{\text{arco } 1'}, \quad r'' = \frac{1}{\text{arco } 1''}.$$

Se ora invece degli archi si pongono i loro seni che ne differiscono, in quanto al seno dell'arco di un grado, soltanto dopo la quinta cifra decimale, in quanto a quello di un minuto, soltanto dopo la undecima cifra decimale, e in quanto al seno dell'arco di un secondo unicamente dopo la sedicesima cifra decimale, si hanno le espressioni

$$r^0 = \frac{1}{\sin 1^0}, \quad r' = \frac{1}{\sin 1'}, \quad r'' = \frac{1}{\sin 1''},$$

la prima delle quali è esatta fino al quinto decimale inclusive, la seconda fino

all'undecimo e la terza fino al sedicesimo. Per conseguenza volendo trovare la graduazione di un arco, essendone data la lunghezza, o reciprocamente, si dovrà moltiplicare o dividere la lunghezza o la graduazione data per $\frac{1}{\text{sen } 1^{\circ}}$, $\frac{1}{\text{sen } 1^{\circ}}$,

$\frac{1}{\text{sen } 1^{\circ}}$, e i risultati saranno esatti dentro i limiti di sopra assegnati.

Si chiama *arco sferico* qualunque porzione della circonferenza di un circolo massimo della sfera.

Per le altre proprietà relative agli archi, si consulteranno gli articoli RETTIFICAZIONE, SERIE CIRCOLARI, INTEGRALE, ec.

ARCO A MANICO DI PANIERE. Vedi ANSA DI PANIERE.

ARCO A PIU' CENTRI. Vedi ANSA DI PANIERE.

ARCO (Astron.). Gli archi in astronomia ricevono diverse denominazioni, secondo i circoli della sfera celeste sui quali vengono considerati.

ARCO DIURNO DI UN ASTR0. È la parte del circolo parallelo all'equatore descritta da un astro, nel suo giro apparente, tra il suo levare e il suo tramonto. L'*arco notturno* è della stessa natura e viene percorso dall'astro tra il suo tramonto e il suo levare. Si chiamano ancora *archi semidiurni* e *seminotturni* le metà di questi archi.

ARCO DI PROGRESSIONE O DI DIREZIONE. Arco dell'eclittica, sul quale pare che scorra un pianeta quando il suo moto è diretto, o secondo l'ordine dei segni.

ARCO DI RETROGRADAZIONE. È l'arco dell'eclittica che un pianeta sembra descrivere movendosi in senso contrario all'ordine dei segni.

ARCO DI EMERSIONE O DI VISIONE. È l'arco di cui bisogna che il sole sia abbassato sotto l'orizzonte, perchè un astro sia visibile ad occhio nudo. Quest'arco non è lo stesso per tutte le stelle e per tutti i pianeti. Si calcola ordinariamente di diciotto gradi per le stelle più piccole, di quattordici gradi per le stelle di terza grandezza, di undici o dodici gradi per le stelle di prima grandezza, di $11^{\circ}\frac{1}{2}$ per Marte, di 11° per Saturno, di 10° per Giove e per Mercurio, e di 5° per Venere. Quest'ultimo arco però è lungi dall'esser costante, perchè qualche volta Venere si scorge in pieno giorno. Esso varia ancora un poco secondo la latitudine e secondo la declinatione.

ARCO DI POSIZIONE. È l'arco dell'equatore compreso tra il meridiano e il circolo orario o di declinatione che passa pel polo e per l'astro che si considera. È la stessa cosa dell'*angolo orario*.

ARCO (Archit.). Volta di un ponte o di un acquedotto. Gli archi si costruiscono in diverse maniere, e sono indicati con diversi nomi secondo la loro forma: come *circolari*, *ellittici*, *cicloidali*, ec.

Gli archi *semicircolari* sono quelli la di cui forma è un emito semicircolo avente il suo centro alla metà della retta condotta da una delle estremità dell'arco all'altra. Si chiamano ancora archi *a tutto centro*, o *a tutto sesto*.

Gli archi si dicono *acuti* o *schiacciati* secondochè la loro volta ha un'altezza maggiore o minore del raggio. L'arco schiacciato si chiama ancora *Ansa di panier*. Vedi ANSA DI PANIERE.

Nella teoria dei ponti, si chiama *arco di equilibrio* quello, tutte le parti del quale, avendo una forza eguale, non hanno per conseguenza nessuna tendenza a rompersi in un punto piuttosto che in un altro. Trovare quest'arco è il problema principale della costruzione dei ponti. La sua forma non è una curva particolare, nè la stessa in tutti i casi; essa varia secondo la figura dell'*estradosso*, o della superficie esterna della volta: ogni differente *estradosso* richiede un *intradosso* particolare, cioè una superficie interna particolare, in modo che la grossezza di ciascuna parte sia proporzionale alla pressione.

Per esempio, se l'estradosso è una superficie piana, orizzontale, la curva dell'intradosso sarà espressa dall'equazione

$$y = h \times \frac{\log \left[\frac{a+x+\sqrt{(2ax+x^2)}}{a} \right]}{\log \left[\frac{a+r+\sqrt{(2ar+r^2)}}{a} \right]},$$

nella quale $x = Ax$, $y = xy$, $r = AB$, $h = CB$, e $a = AD$ (Tav. XXXI, fig. 1). Quando a , h , e r sono quantità date in numeri, si prendono per x dei valori successivamente maggiori da zero fino ad r , ed i valori corrispondenti di y , calcolati per mezzo di questa equazione, danno il modo di costruire la curva in ogni caso particolare. AD è ciò che diceasi l'altezza del serraglio, o della chiave, o del cuneo centrale.

Nel caso, al contrario, che fosse data la curva dell'intradosso, e insieme con essa l'altezza del serraglio, bisognerebbe allora calcolare l'equazione dell'estradosso. Questo problema non presenta difficoltà nessuna per gli archi semicircolari.

Sia AC (Tav. XXXI, fig. 2) la metà del semicircolo, H il centro, e AD l'altezza del serraglio. Dal punto C , con un raggio eguale ad HD , si determini il punto M sopra AH , e si conduca MN perpendicolare su questa retta: per un punto qualunque dell'intradosso si conduca quindi la retta Hy , che taglierà MN in un punto qualunque Q . In seguito si tiri QP perpendicolare sopra HC , e si prenda $Hy = PD$. Allora y sarà un punto dell'estradosso, del quale tutte le parti potranno esser determinate in un modo simile. Hy è sempre maggiore di HQ , ma si avvicina continuamente a questa grandezza, a misura che l'arco Dy cresce. Così, MN è un asintoto dell'estradosso, la di cui equazione dedotta dalla costruzione che abbiamo esposto è

$$x = \frac{y\sqrt{a^2+b^2-y^2}}{\sqrt{y^2-b^2}},$$

nella quale $x = Hx$, $xy = y$, $HA = a$, $HM = b$.

La curva dell'estradosso di una volta semicircolare è dunque somigliantissima alla Concoide di Nicomede. Vedi CONCOIDE.

Per la teoria degli archi può consultarsi Bossot, *Recherches sur l'équilibre des voûtes*, nelle Memorie dell'Accademia della Scienze di Parigi per gli anni 1774 e 1776, e Prouy, *Nouvelle Architecture hydraulique*, Parigi, 1790, 2 vol. in 4°. Atwood e Gregory si sono pure occupati di questo soggetto, che è stato trattato magistralmente e in tutta la sua ampiezza dal dottor Hutton nella sua opera intitolata *Principles of Bridges*, Newcastle, 1772, in-8.

ARCO-BALENO, o IRIDE (Ottica). Meteora a forma di arco di varii colori, che apparisce nelle nubi quando il tempo è piovoso. L'arco-baleno è prodotto da più retrazioni e riflessioni dei raggi del sole, le quali accadono nelle gocce sferiche di acqua che si trovano nell'aria. Quest'arco è ordinariamente accompagnato da un secondo arco che lo circonda ad una certa distanza, ma che ha i suoi colori meno vivaci e disposti in un ordine inverso.

L'arco-baleno non comparisce che nei luoghi dove piove, e dove nel tempo stesso risplende il sole. Per poterlo vedere, bisogna esser situati tra il sole e la nube che si scioglie in pioggia.

La spiegazione di questo fenomeno fu per lungo tempo ignorata dai fisici. Il primo che con successo si accinse a trovarla fu Mare'Antonio de Dominis, arcivescovo di Spalatro in Dalmazia. Nella sua opera stampata a Venezia nel 1611 col titolo *De radiis visus et lucis in vitris perspectivis et iride*, in-4, Dominis di-

mostra che l'arco colorato è il risultato di due refrazioni separate da una riflessione della luce solare nelle gocce sferiche della pioggia. È vero che Keplero esprime un'idea presso a poco simile nelle sue lettere scritte ad Harriot nel 1606, ma bisogna riflettere che il trattato di Dominis era stato composto molti anni prima, nel tempo ch'ei professava filosofia a Padova, e che fu Giovanni Bartolo, uno de' suoi allievi, che lo pubblicò lungo tempo dopo col suo permesso (*Vedi* DOMINIS).

Del resto, l'opera di Dominis è lungi dal contenere una teoria completa di questo interessante fenomeno. Ciò che egli dice sull'arco esterno dimostra evidentemente che egli non ne sospettò mai le vere cause. Descartes, partendosi dall'idea principale di Dominis, perfezionò la spiegazione dell'arco interno, e determinò l'andamento dei raggi luminosi nell'arco esterno. Ma sebbene si debba a quest'uomo sommo la maggior parte di ciò che di esatto vi ha nella teoria dell'Iride, era riservato a Newton di compierne interamente la teoria colla sua importante scoperta della composizione dei raggi luminosi.

Abbiamo già detto che ordinariamente si scoprono due archi-baleni, l'uno interno o *principale*, del quale i colori sono vivi, l'altro esterno o *secondario*, i di cui colori sono più deboli. L'ordine dei colori è pel primo, andando dal basso in alto, 1° violetto, 2° indaco, 3° turchino, 4° verde, 5° giallo, 6° arancio, 7° rosso; pel secondo, quest'ordine è rovesciato, dimanierchè il rosso si trova nella parte inferiore dell'arco e il violetto nella parte superiore.

Per concepire la produzione di questo fenomeno, rappresentiamo col circolo *AIPO* (*Tav. XXXI, fig. 3*) una goccia d'acqua: il raggio solare *Ss*, venendo a colpire obliquamente questa goccia in *s*, invece di continuare la sua direzione *Sm*, soffrirà una refrazione per cui si avvicinerà alla normale *sA* (*Vedi* REFRAZIONE), e andrà a colpire la parete interna della goccia in *I*; la porzione di questo raggio che non attraverserà la goccia sarà riflessa verso *OP*, facendo un angolo di riflessione eguale a quello d'incidenza, e, invece di continuare il suo cammino verso *n*, soffrirà una seconda refrazione allontanandosi dalla normale all'arco *OP*, poichè passa obliquamente dall'acqua nell'aria. Ma siccome questo raggio luminoso, per quanto sottile esso sia, è un fascetto di raggi colorati, gli uni più refrangibili degli altri, il violetto che lo è più di tutti si dirigerà verso il punto *V*, e il rosso che è meno refrangibile degli altri si dirigerà verso il punto *R*; gli altri raggi si disporranno nello spazio *RPOV* secondo l'ordine dei loro gradi di refrangibilità. Se dunque l'occhio dell'osservatore è situato in *R*, egli non scorgerà che il rosso nella direzione *RP*; e se quindi l'occhio si eleva in *V*, egli vedrà successivamente tutti gli altri colori, e distinguerà finalmente il violetto nella direzione *VO*. Lo stesso accaderebbe ancora se l'occhio dell'osservatore restando in *R*, la goccia di pioggia scendesse: per conseguenza, quando l'aria è ripiena di gocce, l'osservatore deve scoprire nel tempo stesso, e sotto angoli differenti, tutti i colori del prisma.

Ora, trovandosi l'occhio al centro del cono descritto dalla rivoluzione del raggio visuale, e ricevendo le impressioni nel senso di tutta la superficie conica, esso vedrà ciascun colore come un arco di circolo; e conseguentemente l'insieme dei colori formerà una striscia semicircolare, la di cui larghezza sarà proporzionale alla differenza che vi è tra i raggi che sono i più refrangibili e quelli che lo sono meno.

Quanto all'arco esterno, sia *QPOLs* (*Tav. XXXI, fig. 4*) un'altra goccia di pioggia, colpita obliquamente in *s* da un raggio luminoso *Ss*; invece di continuare il suo cammino in questa direzione, il raggio luminoso si refrangerà avvicinandosi alla normale, e andrà a battere nella parete concava della goccia in *I*. La porzione di questa luce che non attraverserà la goccia si rifletterà verso *O*; una parte di questa stessa porzione si rifletterà nuovamente verso *PQ*, e quindi, invece di continuare il

suo cammino in linea retta, si refrangerà una seconda volta allontanandosi dalla normale. Questo raggio di luce, sebbene molto più debole che nel caso precedente, essendo una riunione di raggi gli uni più refrangibili degli altri, il rosso, che è il meno refrangibile di tutti, si dirigerà verso il punto R, mentre il violetto, che lo è il meno, si dirigerà verso il punto V; gli altri raggi si disporranno nello spazio RPQV secondo l'ordine dei gradi della loro refrangibilità. In forza di considerazioni simili a quelle fatte di sopra, l'occhio osserverà dunque una striscia colorata, i colori della quale saranno più languidi di quelli della prima, e disposti in un ordine inverso.

Così, quando una nube si scioglie in pioggia, siccome si trovano delle gocce in tutte le situazioni convenienti acciocché i raggi refratti possano formare gli angoli necessari alla visione dei colori, l'osservatore, nell'occhio del quale andranno a convergere questi raggi, vedrà nel tempo stesso due archi-baleni. Affinché questa convergenza dei raggi abbia luogo, bisogna che l'occhio sia situato in modo che OP (Tav. XXXI, fig. 5) essendo una linea parallela ai raggi solari S, S, S ec., l'angolo EOP di visione sia di $40^{\circ} 16' 40''$ e l'angolo di visione FOP di $42^{\circ} 1' 40''$: allora l'angolo FOE di $1^{\circ} 45'$ comprende la larghezza dell'arco principale, nel quale il rosso comparisce in F e il violetto in E. Al di sopra di $42^{\circ} 1' 40''$ i raggi refratti non possono più giungere al punto O e si perdono nell'aria; ma a $50^{\circ} 58' 50''$ i raggi riflessi due volte nell'interno della goccia cominciano a riunirsi nel punto O, e una tal riunione ha luogo fino a $54^{\circ} 9' 20''$. Così, HOP essendo un angolo di $54^{\circ} 9' 20''$, e GOP un angolo di $50^{\circ} 58' 50''$, la differenza di questi angoli, o l'angolo HOG di $3^{\circ} 10' 30''$, comprenderà un arco secondario, nel quale il rosso comparirà in G e il violetto in H. I due archi saranno separati da uno spazio angolare GOF di $8^{\circ} 57' 10''$, nel quale nessun raggio colorato può giungere all'occhio.

Tutte le particolarità dell'apparizione dei due archi si deducono rigorosamente da due formule che passeremo adesso a far conoscere.

Sia Ss (Tav. XXXI, fig. 6) un raggio luminoso, refratto in s nell'entrare nella goccia d'acqua, quindi riflesso in B, e nuovamente refratto in C; il raggio CA è ciò che dicesi raggio di emergenza, in opposizione ad Ss che è il raggio d'incidenza. Prolungando questi due raggi fino al loro incontro in D, si formerà l'angolo SDA, che è l'angolo della deviazione della luce, e che si chiama semplicemente la deviazione.

Indichiamo con δ la deviazione, con i l'angolo d'incidenza SsN, e con r l'angolo di refrazione OsB. O è il centro della goccia. Ciò posto, si osservi che l'angolo OBs, esterno rapporto al triangolo sBD, è eguale alla somma dei due angoli opposti sDO e Bsd (Vedi ANGOLO, n° 12), e che inoltre si ha $OBs = OsB = r$, $OsD = SsN = i$, $BsD = OsD - OsB$, e $sDB = \frac{1}{2}sDA = \frac{1}{2}\delta$; per conseguenza si avrà

$$r = i - r + \frac{1}{2}\delta,$$

donde si deduce

$$\delta = 4r - 2i.$$

Ma la deviazione δ , variando insieme colle quantità r e i , è suscettibile di un massimo, poichè gli angoli r e i sono legati tra loro dalla relazione

$$\text{sen } i = n \text{ sen } r,$$

nella quale n è una quantità costante, che si conosce sotto il nome di indice di refrazione. (Vedi REFRAZIONE.)

Per trovare questo valore massimo, si farà $d\delta = 0$ (Vedi MASSIMO), e in tal modo si otterrà facilmente

$$4dr - 2di = 0, \text{ ossia } 2dr = di.$$

Ma, differenziando l'eguaglianza $\text{sen } i = n \text{ sen } r$, si trova $d(\cos i) = n dr \cos r$, donde si ha

$$dr = \frac{di \cos i}{n \cos r};$$

perciò, sostituendo questo valore di dr in $2dr = di$, si ha

$$di = \frac{2di \cos i}{n \cos r};$$

il che dà, dividendo per di ,

$$n \cos r = 2 \cos i.$$

Questa eguaglianza, innalzata a quadrato, e combinata con

$$\text{sen } i = n \text{ sen } r$$

parimente innalzata a quadrato, dà

$$n^2(\cos^2 r + \text{sen}^2 r) = 4 \cos^2 i + \text{sen}^2 i = 3 \cos^2 i + (\cos^2 i + \text{sen}^2 i),$$

che si riduce a

$$n^2 = 3 \cos^2 i + 1,$$

a motivo di $\cos^2 r + \text{sen}^2 r = 1$, e di $\cos^2 i + \text{sen}^2 i = 1$.

Da quest'ultima eguaglianza si ottiene

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{3}} \dots \dots \dots (a).$$

Il valore *massimo* della deviazione ha luogo dunque per un'incidenza il di cui angolo è determinato dalla relazione (a).

Per mezzo di questo risultato passeremo adesso a determinare tutte le circostanze della produzione dei colori. Cominciamo primieramente dal *rosso*, che è il meno refrangibile, e il di cui indice di refrazione è, dietro le esperienze di Newton (*Vedi Lucas*),

$$n = \frac{108}{81}.$$

Sostituendo questo valore di n in quello di $\cos i$, otterremo

$$i = 59^\circ 23' 30''.$$

Donde avviene che il raggio rosso che incontra la goccia facendo un angolo d'incidenza eguale $59^\circ 23' 30''$ è di tutti i raggi rossi incidenti quello che prova la *massima* deviazione. Per conoscere questa deviazione, si sostituiranno i valori di i e di n nella relazione

$$\text{sen } i = n \text{ sen } r,$$

e si troverà $r = 40^\circ 12' 10''$. Conoscendo i ed r , l'eguaglianza $\delta = 4r - 2i$ dà

$$\delta = 42^\circ 1' 40''$$

Questo è l'angolo maggiore sotto il quale possa scoprirsi il colore rosso, poichè la deviazione è eguale all'*angolo di visione*. Ora, se SrBCA rappresenta il corso di questo raggio, è evidente che due altri raggi vicinissimi, e che cadano, l'uno con una obliquità un poco maggiore, e l'altro con un'obliquità un poco minore,

saranno, al loro uscire dalla goccia, sensibilmente paralleli ad AC, poichè hanno ambedue una deviazione un poco minore di quella di Sr. Così il piccolo fascetto rosso aAa, composto di questi raggi emergenti, si propagherà nell'aria senza diminuire d'intensità, e potrà produrre un'impressione nell'occhio dell'osservatore, mentre al contrario qualunque altro fascio, essendo composto di raggi che divergono, diminuisce d'intensità, spargendosi nell'aria, e diviene insensibile.

Così, conducendo dall'occhio dell'osservatore situato in O (Tav. XXXI, fig. 5) una linea retta OP, la quale prolungata passi pel centro del sole, e immaginandone una seconda OF, che faccia colla prima un angolo di $42^{\circ} 1' 40''$, e che giri intorno a questa conservando la sua inclinazione, essa descriverà una superficie conica; ma siccome, descrivendo questa superficie, essa incontrerà una moltitudine di gocce di pioggia, delle quali supponiamo l'aria ripiena, l'occhio percorrerà nel tempo stesso un circolo di luce rossa, o piuttosto un arco rosso, poichè non può vedersi che la parte del circolo che rimane sopra l'orizzonte.

Il disco del sole emanando raggi luminosi da ognuno dei suoi punti, e quest'astro essendo veduto dalla terra sotto un angolo di $30'$, è pure evidente che l'occhio scorgerà una linea rossa per ogni punto del sole, e che l'insieme di queste linee gli comparirà come una striscia rossa circolare, la di cui larghezza sottenderà nell'occhio un angolo di $30'$.

Ragionando e calcolando in un modo analogo a quello tenuto di sopra, si troverebbero facilmente gli angoli di visione sotto i quali debbono mostrarsi gli altri colori, ciascuno in una striscia di una larghezza eguale a quella della striscia rossa: noi ci contenteremo di esaminare soltanto la situazione del raggio violetto che termina l'arco. L'indice di refrazione dei raggi violetti, essendo eguale a

$$n = \frac{109}{81},$$

ci dà, sostituendo in (a), $i = 58^{\circ} 40' 30''$; quindi si trova $r = 39^{\circ} 24' 20''$, donde si ottiene $\delta = 40^{\circ} 16' 40''$. Per avere la posizione dell'arco violetto, bisogna dunque condurre dall'occhio O una retta OE che faccia l'angolo POE $= 40^{\circ} 16' 40''$. Così la larghezza totale dell'arco-baleno corrisponde a $1^{\circ} 45'$, differenza dei due angoli estremi $42^{\circ} 1' 40''$ e $40^{\circ} 16' 40''$.

Esaminiamo adesso l'arco-baleno esterno. Per mezzo di una costruzione simile alla precedente, si troverà facilmente che il massimo della deviazione, nel caso di due refrazioni separate da due riflessioni, corrisponde a un angolo d'incidenza dato dall'espressione

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}}.$$

Effettuando i calcoli per la luce rossa, il di cui indice è, come già abbiamo ve-

duto, $n = \frac{108}{81}$, e per la luce violetta, il di cui indice è $n = \frac{109}{81}$, si troverà

che la deviazione del rosso è di $50^{\circ} 58' 50''$, e che quella del violetto è di $54^{\circ} 9' 20''$. La larghezza dell'arco esterno si presenta dunque sotto un angolo di $3^{\circ} 10' 30''$, e il rosso occupa la parte inferiore di quest'arco, la quale è lontana dalla parte superiore dell'arco interno, o principale, di una distanza che corrisponde a

$$50^{\circ} 58' 50'' - 42^{\circ} 1' 40'',$$

vale a dire a $8^{\circ} 57' 10''$.

Dis. di Mat. Vol. I.

Tutti i risultati di questa teoria, dovuta ad Halley, sono perfettamente conformi alle esperienze di Newton.

Qualche volta, ma raramente, si scorge un terzo arco-baleno, i colori del quale sono anco più deboli di quelli dell'arco secondario. Esso è il risultato di tre riflessioni successive della luce; e colla scorta di quanto abbiamo esposto di sopra, può facilmente spiegarsene la formazione. Halley ha calcolato le sue dimensioni, come pure quelle del quarto arco-baleno, che potrebbe scorgersi in circostanze favorevoli. Si vedano su questo proposito le *Transazioni filosofiche* per l'anno 1700.

Quando la luna è piena, può anch'essa produrre l'arco-baleno; ma i suoi colori sono sempre pallidissimi. Esso si chiama *arco-baleno lunare*, dal piaoeta che lo produce.

L'arco-baleno può formarsi artificialmente facendo innalzare in aria dei getti d'acqua che ricadano in pioggia. Per potere scorgere quest'arco, bisogna scegliere una situazione conveniente tra questa pioggia e il sole.

ARCON (GIOVANNI CLAUDIO ELEOSORO LEMICHAUD D'), celebre ingegnere, nato a Pontarlier nel 1733. I genitori di d'Arcon lo destinavano allo stato ecclesiastico; ma esso manifestò fin dalla sua più tenera infanzia un'inclinazione decisa alle scienze matematiche applicate all'arte della guerra. I rapidi progressi eh'ei fece nello studio di queste scienze, e la perseveranza che dimostrò nelle sue prime disposizioni, trionfarono della repugnanza de' suoi genitori, che finalmente lo lasciarono nella libertà di entrare nell'aringo da lui prescelto. Ammesso, nel 1754, alla scuola di Mézières, il giovine d'Arcon vi ottenne, nell'anno successivo, il titolo d'ingegnere, che era stato l'oggetto principale de' suoi voti e de' suoi lagnori. La guerra dei sette anni gli offrì quasi immediatamente l'occasione di distinguersi: durante quella lunga e disastrosa campagna, ei rese importanti servizi all'armata francese, e particolarmente nel 1761 nella difesa di Cassel.

D'Arcon, la di cui riputazione cominciava ad estendersi, fu incaricato nel 1774 di levare la carta del Jura e dei Vosgi. Adempì una tal commissione da ingegnere abile, e fin d'allora cominciò a manifestare quell'attitudine somma di cui era dotato per le operazioni le più complicate del genio militare. In questa occasione inventò una nuova maniera di acquerellare con un so'n pennellin, molto più spedita, e di assai maggiore effetto dell'acquerello ordinario.

Nello stesso anno e nell'anno seguente (1774, 1775), prese parte nella discussione suscitata dall'opinione di Guibert, sull'ordine profondo e sugli ordini radi, e in questa occasione pubblicò una serie di opuscoli col titolo di *Corrispondenza sull'arte militare*, che terminarono di meritargli un posto distinto fra gli ufficiali della classe dotta dell'armata alla quale apparteneva.

Nel 1780, d'Arcon, che faceva parte, in qualità d'ingegnere generale, del corpo ausiliare che il duca di Crillon condusse all'assedio di Gibilterra, immaginò il piano delle batterie galleggianti, delle quali doveva farsi uso contro le formidabili difese di quella città, considerata come inespugnabile dalla parte di terra. Questo ardito progetto, che non poteva esser mandato ad esecuzione che col mezzo di un apparecchio straordinario, ha menato gran romore in Europa; ma, in generale, è stato troppo male apprezzato, per non crederci in dovere, nell'interesse della memoria di d'Arcon, di esporne rapidamente la storia.

La situazione di Gibilterra non permetteva di applicarvi le operazioni ordinarie di un assedio regolare. Questa circostanza sola avrebbe dovuto far perdonare a d'Arcon ciò che si è voluto chiamare *singularità* del suo piano, se quest'uomo di talento avesse avuto bisogno di giustificazioni. Dopo lunghe meditazioni, e dopo molte esperienze fatte sulla combustione, compilò, sotto la forma di progetto, il piano delle sue batterie insommergibili e incombustibili. Nell'esecuzione, d'Arcon

le destinava a far breccia nel corpo della piazza dalla parte del mare; ma, nel tempo stesso, per favorire il loro avvicinamento e secondare il loro effetto, altre batterie avanzate sul continente dovevano investire di fianco tutte le opere assalite di fronte dalle 306 batterie galleggianti. Il consiglio spagnolo adottò con entusiasmo il piano dell'ingegnere francese, che diede prova di un raro talento nel modo col quale ne preparò l'esecuzione. Fece costruire cinque macchine a due ordini di batterie, ed altre cinque ad un ordine solo, le quali formavano insieme un'artiglieria di 150 pezzi di cannone, portati sopra solidi piani di legno che potevano per mezzo di remi dirigersi anco contro il vento.

La spedizione, come è noto, ebbe luogo il 13 Settembre 1782; ma parve esser condotta coll'intenzione evidente di farla andare a vuoto. Invano d'Arçon, salito sopra una fragile barchetta, si espose a tutti i pericoli, per presedere e sorvegliare all'esecuzione de' suoi ordini; iovano in quella circostanza on il sangue freddo e la pazienza del dotto all'intrepidezza e al coraggio di un capo militare: nessuna delle sue disposizioni fu eseguita, e le batterie galleggianti, fulminate dal cannone inglese, furono incendiate in pieno mare, senza avere avvantaggiato in nulla le operazioni dell'assedio. Si attribuì con ragione il cattivo successo di quella intrapresa al poco accordo che esisteva tra i generali francesi e spagnoli. Ma il difensore di Gibilterra, Elliot, come un altro Marcello, rese un glorioso omaggio all'Archimede francese. Fu questa la sola consolazione che ebbe d'Arçon, profondamente afflitto per questo rovescio: nella sua patria, ei non trovò che derisori pianti disposti ad apprezzare il suo genio in questa dolorosa circostanza. Non ostante si accinse a difendere la sua invenzione io una memoria, nella quale le persone della sua arte poterono giudicarla più favorevolmente. Negli anni successivi, d'Arçon pubblicò un'altra opera sulla teoria delle mezze lune di ridotto con fuoco di fianco, l'oggetto delle quali era di stabilire una resistenza imponente, quantunque con poca spesa e sopra un piccolissimo spazio isolato. Nel 1793, d'Arçon fu incaricato di fare una recognizione sul monte San Bernardo, e si distinse in seguito nella campagna dell'invasione dell'Olanda, dove i suoi piani combiati diedero in mano delle armi repubblicane parecchie piazze, e tra le altre Breda. Proscritto due volte nell'intervallo di queste due spedizioni, e sempre salvato dal rispetto che incute il talento, d'Arçon, membro dell'Istituto, fu chiamato nel Senato, nel 1799, dal primo console Buonaparte, che onorava il suo carattere e la sua scienza. Ma per poco tempo godè del favore del giovane capo dello stato; egli morì a Parigi il primo Luglio 1800, io età di 67 anni.

D'Arçon era un uomo distinto per tutti i rapporti, dotato di una forte immaginazione e di una infaticabile attività: egli appartiene nel tempo stesso alla teoria e alla pratica militare. I suoi scritti sono pregiati per una grande abbondanza d'idee, e sono sparsi di tratti ingegnosi che fanno perdonare la trascuratezza di stile che qualche volta vi si osserva.

Il più importante degli scritti pubblicati da d'Arçon, e quello che ne forma in certo modo il sunto, è intitolato: *Considérations politiques et militaires sur les fortifications*, Parigi, stamperia della repubblica, 1795, io-8.

Maggiori particolarità sulla vita e sulle opere di d'Arçon si leggono nella *Biographie universelle*, Parigi, 1810 e segg. in-8; in quanto all'impresa di Gibilterra e alle batterie galleggianti, si veda Drinkwater, *Account of the late siege of Gibraltar*, Londra, 1785, in 8, come pure il racconto dell'assedio di Gibilterra, che si trova in Coxe, *Memoirs of the kings of Spain of the house of Bourbon*, Londra, 1813, 3 vol. in-4.

ARCY (PATRIZIO D') nacque a Galloway, io Irlanda, il 18 Settembre 1725. I suoi genitori, che erano cattolici, lo inviarono nel 1739 a Parigi, dove concepì un ardente amore per lo studio delle matematiche, amore che divenne più forte per l'amici-

zia che strinse con Clairaut. Fino dall'età di diciassette anni, pubblicò la soluzione di alcuni problemi che richiedevano molta sagacia e penetrazione. Abbracciato avendo la professione militare, fece varie campagne in Alemagna e in Fiandra, dove molto si distinse. Nel 1746, fece parte delle truppe inviate in Scozia per soccorrere il pretendente; ma venne fatto prigioniero, e poco mancò che non fosse condannato a morte per essere stato, irlandese d'origine, preso colle armi alla mano contro il proprio paese. Al suo ritorno in Francia, l'Accademia delle Scienze di Parigi gli aprì le sue porte nel 1749 per alcune interessanti memorie, che aveva pubblicato durante la guerra. D'Arcy riprese in seguito le armi, e fece, come colonnello al reggimento Fitz-James, la campagna del 1757. Restituito nuovamente alle scienze per la pace, scrisse parecchie opere nelle quali spicca l'acutezza del suo ingegno. Molti de'suoi scritti sono inseriti nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi. Le principali e le più stimate delle sue opere sono: I *Réflexions sur la théorie de la lune*, Parigi, 1749, in-8; II *Mémoire sur la durée des sensations de la vue*, Parigi, 1765, in-8; III *Essai d'une nouvelle théorie d'artillerie*, Parigi, 1766, in-8. D'Arcy morì a Parigi il 18 Ottobre 1779. Si trova un esame minutissimo di tutti i suoi lavori nell'elogio che di lui ha scritto Condorcet, allora segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze. Il lettore potrà ancora consultare, per altre particolarità sulla vita di questo dotto, la *Biographie universelle*, Parigi, 1810 e segg.

AREA (*Geom.*). Questa parola, che deriva dal latino, significa la stessa cosa che *superficie* o *quantità di superficie*, ma si applica esclusivamente alle figure piane. Così diciamo: la *superficie* di una sfera, l'*area* di un triangolo, la *superficie* del cubo è sei volte l'*area* d'una delle sue facce, ec. Per misurare l'*area* o la *superficie* di una figura piana, si prende per unità di misura l'*area* di un quadrato i di cui lati sono l'unità lineare. Così, adottando il metro per unità delle misure lineari, e la superficie del quadrato costruito sopra un metro per unità di superficie, l'*area* di una figura qualunque sarà determinata, quando conosceremo quanti metri quadrati o parti di metro quadrato essa contiene. Tutte le proposizioni della geometria relative all'*area* delle figure piane possono ridursi alle seguenti:

I. *Qualunque rettangolo ha per misura il prodotto della sua base per la sua altezza.*

La linea CF (*Tav. XXXI, fig. 9*) essendo presa per l'unità lineare, il quadrato GCFE sarà l'unità di superficie. Ora, si vede, dall'esame della figura, che il rettangolo ABCD contiene tanti di questi quadrati, quante unità sono contenute nel prodotto che risulta dal moltiplicare il numero delle unità lineari contenute nella base CD, pel numero delle unità contenute nell'altezza AC. Nel caso presente, questi numeri sono 5 e 4, ed il loro prodotto 20 esprime infatti il numero dei quadrati GCFE contenuti nel rettangolo ABCD.

È necessario però osservare che la parola *prodotto* non ha il senso aritmetico consueto; poichè, in aritmetica, il prodotto è sempre della medesima natura del moltiplicando, o, in generale, di uno dei fattori, mentre adesso è di una specie tutta diversa da quella dei fattori; poichè le sue unità esprimono superficie e non linee.

Se l'unità lineare non fosse contenuta un numero esatto di volte nella base e nell'altezza del rettangolo, l'*area* di questo rettangolo sarebbe egualmente espressa dal prodotto della sua base per la sua altezza; poichè, paragonando due rettangoli qualunque, come ABCD e GCFE, abbiamo la proporzione (*Vedi Rettangolo*)

$$\text{superf. } ABCD : \text{superf. } GCFE :: AC \times CD : GC \times CF.$$

Ora, prendendo il quadrato GCFE per unità di misura, si ha

$$\text{superf. } ABCD : \text{superf. } GCFE :: AC \times CD : 1.$$

Dunque il prodotto $AC \times CD$ conterrà tante unità e parti dell'unità, quante volte il rettangolo $ABDC$ conterrà il quadrato $GCFE$. Questo prodotto esprimerà dunque, in tutti i casi, l'area del rettangolo.

Un quadrato non essendo che un rettangolo la di cui base ed altezza sono eguali, la sua area sarà espressa dalla *seconda potenza di uno dei suoi lati*.

11. *L'area di un triangolo è eguale alla metà di quella di un rettangolo della medesima base e della medesima altezza.* Ovvero, il che significa lo stesso, *l'area di un triangolo è eguale alla metà del prodotto della sua base per la sua altezza.*

Si possono dare tre casi:

1°. Che il triangolo sia rettangolo, come ABC (Tav. XXXI, fig. 7). Allora esso è evidentemente la metà del rettangolo $ABCD$, della medesima base BC e della medesima altezza AB .

2°. Che la perpendicolare che misura l'altezza del triangolo cada nell'interno del triangolo. Tale è il triangolo ABD (Tav. XXXI, fig. 10), la di cui altezza è AC . Ma questo triangolo può essere considerato come la somma di due triangoli rettangoli ABC, ACD , il primo dei quali è la metà del rettangolo $AMBC$, ed il secondo la metà del rettangolo $ANDC$. Dunque il triangolo intero ABD è pure la metà del rettangolo intero $MBDN$, della medesima base BD e della medesima altezza AC .

3°. Che la perpendicolare che misura l'altezza del triangolo cada fuori del triangolo. Tale è il triangolo ABD (Tav. XXXI, fig. 8), che può considerarsi come la differenza dei due triangoli BCD e BCA , eguali ciascuno alla metà dei rettangoli $BCDN$ e $BCAM$; esso sarà perciò eguale alla metà della differenza di questi due rettangoli, ossia eguale alla metà del rettangolo $MADN$, della medesima base AD e della medesima altezza AM o BC . L'area di qualunque triangolo è dunque eguale alla metà del prodotto della sua base per la sua altezza.

Corollario. Due triangoli aventi la medesima base o basi eguali, e compresi fra le medesime parallele, sono eguali in superficie.

Tutte le figure rettilinee essendo decomponibili in triangoli, la proposizione precedente basta dunque per determinare la loro superficie. *Vedi POLIGONI.*

III. *L'area di un parallelogrammo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.*

Poichè, conducendo una diagonale, si divide il parallelogrammo in due triangoli che hanno basi eguali, cioè i due lati opposti del parallelogrammo, e di più sono compresi tra linee parallele, che sono questi medesimi lati; questi due triangoli sono dunque eguali in superficie, in forza del corollario precedente. Ora, l'area di ciascuno di essi è eguale al semi-prodotto della sua base per l'altezza comune, che è nel medesimo tempo quella del parallelogrammo, dunque la loro somma, o l'area del parallelogrammo, è eguale a due volte questo semi-prodotto, vale a dire al prodotto totale.

IV. *L'area di un trapezio è eguale alla metà del prodotto della sua altezza per la somma delle due basi parallele.*

Conducendo la retta CB (Tav. XXXII, fig. 2), si divide il trapezio $ABDC$ in due triangoli CAB e BCD , che hanno una medesima altezza EF , e dei quali il primo ha AB per base, ed il secondo CD . Ora l'area del triangolo CAB è eguale a $\frac{1}{2} EF \times AB$, o l'area del triangolo BCD è eguale a $\frac{1}{2} EF \times CD$. Dunque la somma di questi due triangoli, o l'area del trapezio è eguale a $\frac{1}{2} EF \times AB + \frac{1}{2} EF \times CD$, o ciò che è lo stesso a $\frac{1}{2} EF \times (AB + CD)$.

Per l'area delle superficie terminate da linee curve, si vedano nel Dizionario gli articoli QUADRATURA e QUADRATURA NEL CIRCOLO. Quanto alle superficie dei solidi, si tratterà di esse per ogni solido in particolare.

** Non crediamo però inutile il dar qui in anticipazione un'idea dei principj che si seggono per giungere alla misura delle aree delle figure curvilinee. Sia ABC (Tav. XXXII, fig. 3) una figura curvilinea circondata dalla curva AC, e dalle rette AB, BC poste ad angolo retto. Si divida AB in un numero qualunque di parti eguali (per esempio in sette parti) nei punti 1, 2, 3 ec.; e si costruiscano i rettangoli Am, 1n, 2o, ec. È chiaro che l'area della figura ABC è maggiore della somma dei rettangoli inscritti, accennati colle lettere e coi numeri posti agli angoli opposti,

$$2m, 3n, 4o, 5p, 6q, Br,$$

e minore della somma dei rettangoli circoscritti

$$Am, 1n, 2o, 3p, 4q, 5r, 6C.$$

Per conseguenza l'area cercata non differisce dall'una o dall'altra di queste somme che di una quantità minore di quella della quale differiscono tra loro queste stesse somme; ma esse differiscono della somma dei rettangoli

$$Am, mn, no, op, pq, qr, rC,$$

che, posti l'uno sotto l'altro, danno il rettangolo 6C, dunque l'area cercata differisce da una o dall'altra delle due somme di una quantità minore del rettangolo 6C. Ma dividendo la linea AB in un maggior numero di parti si può rendere il rettangolo 6C minore di qualunque quantità assegnabile, perciò con una tal divisione più serrata si può giungere ad avere la somma dei parallelogrammi inscritti e circoscritti approssimata quanto si vuole all'area curvilinea.

Il metodo rigoroso per ottenere l'area della figura consiste nel trovare il *limite*, al quale la somma dei rettangoli inscritti va continuamente avvicinandosi a misura che cresce il numero delle divisioni di AB. Questo limite, come è chiaro, è un'espressione esatta dell'area richiesta. Se x rappresenta una delle linee A1, A2, ec., ed y la linea corrispondente 1m, 2n, ec., l'area della curva vien data per mezzo del calcolo integrale dall'espressione

$$\int y dx$$

Si veda l'articolo QUADRATURA.

AREE PROPORZIONALI AI TEMPI (*Astron.*). È questa una delle leggi del moto dei pianeti scoperte da Keplero (*Vedi LEGGI DI KEPLERO*). Ecco in che consiste: se si suppone che dalle varie situazioni a, b, c (Tav. XXXII, fig. 4) di un pianeta, prese sulla sua orbita, siano condotte delle rette ideali aS, bS, cS , al fuoco di quest'orbita occupato dal sole, le aree comprese tra queste rette e le porzioni corrispondenti ab e bc dell'orbita, cioè Sab, Sbc , saranno proporzionali ai tempi impiegati dal pianeta a percorrere gli archi ab e bc . Se dunque questi tempi fossero eguali, l'area Sab sarebbe eguale all'area Sbc ; se il primo tempo fosse la metà del secondo, Sab sarebbe parimente la metà di Sbc , e così di seguito.

Newton, nel suo libro dei *Principj*, ha fatto vedere che questa legge è una conseguenza necessaria dell'attrazione universale, e ne ha data la seguente dimostrazione:

Sia B (Tav. XXXII, fig. 5) il luogo di un pianeta che gira intorno al sole, e che ha percorso la porzione piccolissima AB della sua orbita, che possiamo considerare come una linea retta; il raggio SA, o il raggio vettore, essendo passato da A in B, ha descritto l'area SAB in un tempo piccolissimo, che noi supporremo un minuto; ora, se il pianeta, giunto in B, fosse abbandonato a sé stesso, continuerebbe a muoversi in linea retta, percorrendo in un secondo minuto uno

spazio BD eguale ad AB; e il suo raggio vettore descriverebbe l'area SBD eguale alla prima SAB, poichè queste aree sono due triangoli che hanno le basi AB, BD eguali ed una stessa altezza. Ma, giunto in B, il pianeta è attratto dal sole; e se non fosse sollecitato che da questa sola forza d'attrazione, prenderebbe la direzione BS, e percorrerebbe in un minuto uno spazio, che indicheremo con BP. Così, nel punto B, il pianeta è sollecitato da due forze, una delle quali gli farebbe percorrere BD, e l'altra BP, in un minuto; esso dunque descriverà, nello stesso tempo, la diagonale BC del parallelogrammo BDCP, costruito sopra BD e BP, e l'area descritta dal raggio vettore sarà il triangolo SBC. Ora i triangoli SBD e SBC sono eguali poichè hanno una stessa base SB, e di più sono compresi tra le parallele SB e DC (Vedi AREA, II). Dunque l'area SBC, descritta nel secondo minuto, è eguale all'area SAB, descritta nel primo. Proseguendo nella stessa maniera per tutti i minuti successivi, e per tutta la durata della rivoluzione, si dimostrerebbe che il pianeta descrive costantemente la stessa area in un minuto, qualunque sia il punto della sua orbita nel quale si trova, fintantochè non sopraggiungano cause estranee che vengano a torbare l'azione delle forze primitive che lo fanno muovere.

All'articolo LEGGI DI KEPLERO si vedrà la storia di questa scoperta, e alla parola **ATTRAZIONE** sarà esposto il partito che ne trasse Newton per stabilire il suo sistema. Per la deduzione matematica di questa legge, si veda nel Dizionario l'articolo TRAJETTORIA.

AREOMETRIA (Fisica). Con questa parola, che deriva da *ἀρην*; *leggero, sottile*, e *μέτρον*, *misura*, s'indica l'arte di misurare il peso specifico o la densità dei liquidi. Vedi DENSITÀ.

AREOMETRO (Fisica). Strumento per misurare la densità dei liquidi. L'invenzione di questo strumento è dovuta, secondo alcuni autori, ad Ipazia, figlia di Teone; ma secondo altri era conosciuto e adoprato da Archimede. In oggi consiste ordinariamente in un piccolo globo di vetro che si prolunga in un tubo lungo, stretto e cilindrico; si chiude questo tubo ermeticamente, dopo avere introdotto nel globo una quantità di mercurio sufficiente per far prendere allo strumento una situazione verticale, quando s'immerge in un liquido. La densità di un liquido si conosce dalla maggiore o minor profondità alla quale scende il globo; poichè il fluido nel quale scende più è più leggero, e quello nel quale scende meno è più pesante. Vedi PESO SPECIFICO.

Per stabilire un confronto tra le densità dei diversi liquidi, basta dunque applicare lungo il tubo una scala, i di cui numeri indichino immediatamente questa densità, a partire da un punto fisso. Per esempio, quando l'areometro scende fino alla divisione segnata col numero 1200, la densità è 1200; se s'immerge fino a 800 la densità è 800. La densità dell'acqua è indicata col numero 1000, e serve di punto fisso di partenza tanto per la graduazione inferiore quanto per la superiore.

Gli strumenti che si chiamano *pesa-sali*, *pesa-acidi*, *pesa-spiriti*, sono specie di areometri, la di cui scala non è destinata a far conoscere la densità, ma unicamente il grado della concentrazione dei liquidi. Il più comune di questi strumenti è il *pesa-acidi*, o *areometro di Baumé*. Per graduarlo, si segna zero al punto in cui lo strumento si ferma nell'acqua pura, e 15 al punto in cui si ferma in una mescolanza di 85 parti di acqua e di 15 di sale marino. L'intervallo tra questi due ponti si divide in 15 parti eguali, e si prolunga la scala al di sopra di zero, e al di sotto di 15 con queste stesse parti. Due liquidi di pesi ineguali indicheranno evidentemente gradi differenti sull'areometro: ma non se ne potrà concluder nulla immediatamente sulle densità reali di questi liquidi. Così questo areometro, come pure tutti gli altri del medesimo genere, è uno strumento puramente di commercio, che serve a regolare il prezzo delle mercan-

zie. Si consulti l'articolo *Areometro* del *Nuovo Dizionario tecnologico*, Venezia, 1833, e segg. 10-8.

ARGANO (*Mecc.*). Verricello verticale, che si fa girare circolarmente con stanghe o leve orizzontali. Esso si compone di un pezzo di legno cilindrico o un poco conico AB (*Tab. XXXII, fig. 6*), situato verticalmente in una intellatura di legno, e di cui l'estremità superiore A, fatta a forma di cubo, è forata in guisa da potervi introdurre le leve GE ed HF, che servono a farlo girare.

Con questa macchina, si possono vincere resistenze grandissime facendo uso di una forza molto minore. Per servirsene, si fanno fare diversi giri alla corda CD, che tiene in D il peso da muoversi; l'estremità di questa corda si fissa, ovvero si fa tenere da uno o più uomini, ed altri se ne pongono alle leve GE, HF. Quando questi ultimi fanno girare il cilindro, la corda si avvolge sempre più intorno al cilindro, facendo avanzare la resistenza D. È evidente che l'argano agisce come una leva di primo genere, o piuttosto come una riunione di leve, e che il braccio della resistenza è più corto di quello della potenza; poichè il primo è il semidiametro, o il raggio del cilindro, mentre il secondo è questo medesimo raggio prolungato della lunghezza delle leve in croce.

Quanto più lunghe saranno queste leve, tanto più la potenza potrà vincere una maggiore resistenza; soltanto le sarà necessario più tempo, poichè essa avrà un maggiore spazio da percorrere. *Vedi VERRICELLO e LEVA.*

Questa macchina viene impiegata sopra i vascelli per alzare le ancore o altri pesi, ai quali sono legati i canapi che si fanno passare intorno al cilindro. Per questo oggetto vi sono ordinariamente due argani sopra i vascelli; cioè, uno grande, che si chiama *argano doppio*, ed uno piccolo, che è l'*argano ordinario*. L'argano doppio è situato sopra il primo ponte dietro l'albero maestro, e si eleva fino a quattro o cinque piedi al di sopra del secondo ponte. Gli si dà il nome di argano doppio perchè si possono ad esso applicare gli uomini contemporaneamente sopra i due ponti per farlo girare, e raddoppiare così la sua forza. Esso serve particolarmente ad alzare le ancore. L'argano ordinario è situato sopra il secondo o sopra il terzo ponte, e serve ad alzare gli alberi di gabbia e le grandi vele, e in tutte le occasioni in cui si possono alzare le ancore con poca forza.

Esistono ancora argani mobili, che si possono trasportare con facilità da un luogo all'altro. Essi si adattano nell'architettura, o piuttosto nella costruzione degli edifizj, per muovere le grosse pietre.

L'argano è soggetto a diversi inconvenienti, che ancora non è stato possibile di correggere. Richiede un uomo che serva unicamente a fare scorrere il canapo a misura che esso si avvolge, perchè i giri che fa sopra il cilindro non vi si accumulino. La parte del canapo che si avvolge, elevandosi o abbassandosi progressivamente ad ogni giro, quando è giunta all'alto o al basso del cilindro, l'argano non può più girare, quindi conviene arrestare la macchina, affine di rimettere il canapo nella posizione che deve occupare. Questa operazione, che gli operai chiamano *ripiegare*, fa perdere moltissimo tempo.

L'Accademia delle Scienze di Parigi, nell'anno 1739, propose, per soggetto di premio, di *trovare un argano che avesse i vantaggi dell'antico, senza averne i difetti*. Questo premio, che non fu conseguito da nessuno, fu rimesso al concorso nel 1741, e, in un grandissimo numero di memorie, le quattro seguenti furono coronate: *Discorso sopra l'argano*, di Giovanni Bernoulli figlio; *Dissertazione sopra la miglior costruzione dell'argano*, di un anonimo; *De ergata navali praestabiliore usu, dissertatio*, di Giovanni Poleni; *Ricerche sopra la miglior costruzione dell'argano*, di Ladoi, avvocato al parlamento. Tre altre memorie ottennero l'accessit; cioè: *Memoria sopra l'argano*, di de Pontis; *Raccolta di esperienze sopra l'argano*, di Feuel, canonico di Sena; *Argano o*

ganci e argano a braccia, di Delorme. Queste sette memorie furono impresso nel 1745. Ciò non ostante, l'Accademia disse, nel suo avvertimento, di non aver trovato nessuno degli argani proposti esente da inconvenienti; ma essa riconobbe che vi erano molte cose eccellenti, principalmente nel rapporto della teoria, in ciascuna delle opere coronate.

Nel 1793, un ingegnere francese, chiamato Cardinet, presentò all'ufficio di consultazione un argano di una costruzione più semplice di tutti quelli proposti fino a quel tempo, e nel quale viene evitata l'operazione del *ripiegare*. Cardinet per la verità si è servito di un'invenzione che si trova nelle memorie sopra citate di Giovanni Bernoulli e di Lédot; ma esso l'ha considerabilmente perfezionata, e la sua macchina offre vantaggi incontestabili. Nel 1794, E. C. di La Lande, professore di matematiche alla Scuola di La Flèche, inventò un nuovo argano che l'illustre Borda dichiarò superiore a tutto ciò che era stato fatto per l'avanti. Per tutto quello che riguarda l'argano si deve consultare il tomo V della bella collezione intitolata, *Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie*, come pure il volume intitolato, *Mouvement des fardeaux*, che è il secondo dell'opera di Bognis, *Traité complet de mécanique appliquée aux arts*, Parigi, 1818-23, 10 vol. in-4.

ARGETENAR (*Astron.*), e più esattamente *ARGËT-ËL-NARA*. È questo il nome di una stella di quarta grandezza, che si trova nella costellazione dell'Eridano.

ARGO (*NAVĖ D'*) (*Astron.*). Nome di una delle costellazioni dell'emisfero meridionale, che presso varii autori si trova ancora rammentata coi nomi di *Celor Jasonis*, *Currus maris*, *Navigium praedatorium*, *Carina Argoa*, *Equus neptunius*, sebbene più comunemente venga indicata col semplice nome di *NAVĖ*. Questa costellazione fu creata per eternare la memoria della celebre spedizione degli Argonauti, che sulla nave Argo furono portati in Colchide alla conquista del vello d'oro. Questa nave finsero i poeti che fosse il primo naviglio che solcasse il mare, e che fosse costruita in Tessaglia per ordine di Minerva e di Nettuno col legno della selva sacra di Dodona. La costellazione Argo nel catalogo di Flamsteed comprende 64 stelle fra le quali ve n'è una detta *Canopo*, che dopo Sirio è la più bella di tutte le stelle di prima grandezza. A motivo della grande estensione, che questa costellazione occupa nel cielo, si divide essa in quattro parti che si dicono *Argo*, *Argo in Carina*, *Argo in Puppi*, *Argo in Velis*.

ARGOLI (*ANDREA*), matematico ed astronomo italiano, nato nel 1570 a Tagliacozzo, terra dell'Abruzzo, nel regno di Napoli. Terminati gli studi elementari di belle lettere, si dieda con ardore allo studio della medicina, delle matematiche e dell'astronomia, e vi fece grandi progressi. Trasferitosi a Roma vi fu fatto lettore di matematiche nella Sapienza: ma, essendosi dato per quanto sembra ai delirj dell'astrologia, i suoi nemici trassero partito da questa sua debolezza per suscitargli forti persecuzioni, per cui fu costretto a rifugiarsi a Venezia, dove il Senato accolse onorevolmente, gli somministrò strumenti per le sue osservazioni, e nel 1632 lo nominò professore nell'Università di Padova, con uno stipendio di 500 fiorini, che successivamente in più volte gli fu accresciuto fino a 1200. Questo dotto morì a Padova il 27 Settembre 1657 in età di 87 anni. Le principali sue opere sono: I. *Problemata astronomica triangulorum ope demonstrata ec.*, Roma, 1604, in-4; II. *Tabulae primi mobilis*, Roma, 1610, in-4; III. *Ephemerides*, Padova, 1638, in-4. Queste effemeridi hanno goduto di un gran credito, e furono in seguito continuate e ristampate a Venezia, e a Lione. Notizie più estese sopra Argoli si possono riscontrare nel Mazzuchelli, che ha dato ancora un esattissimo elenco di tutte le sue opere.

ARGOMENTO (*Astron.*). Chiamasi, in generale, con questo nome un numero che serve a trovarne un altro in una tavola; ed è, in particolare, una quantità dalla

Dis. di Mat. Vol. I. 52

quale dipende un'equazione, un'ineguaglianza, o una circostanza qualunque del moto di un pianeta. Così,

L'ARGOMENTO di *latitudine* è la distanza di un pianeta dal suo nodo ascendente, perchè questa distanza serve a calcolare la latitudine del pianeta.

L'ARGOMENTO *annuo* è la distanza del sole dall'apogeo della luna, o l'arco dell'eclittica compreso tra il sole e questo apogeo.

L'ARGOMENTO *dell'equazione del centro* è l'anomalia, o la distanza dall'afelio o dall'apogeo, perchè l'equazione del centro si calcola, in un'orbita ellittica, per ogni grado di anomalia, a motivo che essa varia secondo i cangiamenti dell'anomalia.

L'ARGOMENTO *della parallasse* è l'effetto che essa produce sopra una osservazione, effetto che serve a determinare la parallasse orizzontale.

ARIA. Sostanza fluida, trasparente, elastica, ponderabile e dilatabile, che circonda il globo terrestre e forma la sua atmosfera. Gli antichi consideravano l'aria come un elemento; ma la chimica moderna ha riconosciuto che è una mescolanza di due gas, l'ossigeno e l'azoto, e che questi gas vi sono mescolati nel rapporto di 2:4. L'aria contiene ancora una piccola quantità di gas acido carbonico, e tiene pure senza dubbio in dissoluzione molte altre sostanze. Le proprietà meccaniche dell'aria, cioè il suo peso e la sua elasticità sono le sole che debbano occuparci.

Gli antichi avevano qualche idea del peso dell'aria, sebbene le loro opinioni su questo soggetto fossero confuse ed incomplete. Aristotile afferma (*De Coelo, lib. IV*) che una vescica piena d'aria pesa più di una vescica vuota. Empedocle attribuisce la respirazione al peso dell'aria che, colla sua pressione, s'introduce nei polmoni. Asclepiade era della stessa opinione. Erone di Alessandria, e il suo contemporaneo Ctesibio, conoscevano tutti e due la gravità e l'elasticità dell'aria, e fondandosi appunto su queste proprietà inventarono i fuochi a vento, che si credevano una invenzione moderna. Dobbiamo ancora al primo una macchina ingegnosa, nella quale l'acqua zampilla al di sopra del suo livello, per effetto del peso dell'aria combinato colla sua elasticità (*Vedi FONTANA DI ERONA*). Pare dunque astrano che i successori di Aristotile abbiano potuto abbandonare le dottrine del loro maestro, e sostenere per molti secoli opinioni contrarie. Gli effetti risultanti dal peso e dalla elasticità dell'aria sono stati per lungo tempo attribuiti ad un principio immaginario detto *fuga vacui*, ossia l'orrore che la natura ha pel vuoto. Da lungo tempo si sapeva che aspirando l'aria contenuta in un tubo, una delle di cui estremità è immersa nell'acqua, questo fluido s'innalzava al di sopra del suo livello, e subentrava nel posto dell'aria. In forza di questa osservazione erano state inventate le trombe aspiranti e diverse altre macchine idrauliche, nelle quali si spiegava l'elevazione dell'acqua per mezzo del *fuga vacui*. Galileo stesso, malgrado la sua sagacia, non aveva saputo trovare una ragione più soddisfacente; niente dimeno era stato obbligato ad assegnare dei limiti a quest'orrore pel vuoto, avendo veduto che le trombe aspiranti non sollevavano più l'aria al di sopra dell'altezza di 32 piedi. Ciò non ostante, questo sommo fisico conosceva benissimo la gravità dell'aria, poichè, ne' suoi *Dialoghi*, insegna due mezzi per dimostrarla e misurarla; ma non era andato più oltre, e l'onore di scoprire la pressione dell'atmosfera era riservato al suo discepolo Torricelli.

Nel 1643, Torricelli concepì finalmente l'idea che la forza, che sostiene i fluidi al di sopra del loro livello nei tubi privi di aria, non poteva essere che la colonna atmosferica che gravita sulla loro superficie esterna. Adottato questo principio, ne concluse che un fluido più pesante dell'acqua non s'innalzerebbe a 32 piedi, e che l'altezza, alla quale potrebbe giungere, sarebbe in ragione inversa del suo peso paragonato con quello dell'acqua. Così, il mercurio essendo presso a poco 14 volte più pesante dell'acqua non doveva elevarsi che alla quattordicesima parte di 32 piedi, cioè a 29 o 30 pollici. Torricelli prese in conseguenza un tubo di

vetro di alcuni piedi di lunghezza, ehinso ermeticamente ad una delle sue estremità, lo empl di mercurio, quindi lo rovesciò turando l'apertura con un dito, ed avendo immerso questa parte del tubo in un vaso pieno di mercurio, ne ritirò il dito. Ciò che accadde giustificò pienamente la sua congettura: il mercurio contenuto nel tubo scese finchè non ne rimase che una colonna dell'altezza di circa 30 pollici al di sopra della superficie del mercurio che si trovava nel vaso.

L'esperienza di Torricelli divenne subito popolare; il padre Mersenne la ripeté nel 1644, e ne inviò il rapporto ai dotti francesi coi quali era in corrispondenza. Pascal e Petit la verificarono di nuovo, e il primo pubblicò su questo soggetto un trattato pieno d'ingegnose considerazioni col titolo: *Expériences nouvelles touchant le vide* (1647). Pascal avendo adottato, dopo qualche titubanza, l'opinione di Torricelli, immaginò varie esperienze per confermarla. Egli indusse il suo cognato Périer ad eseguire la celebre esperienza del Puy-de-Dôme, nella quale trovò che l'altezza della colonna di mercurio, sostenuta nel tubo di Torricelli, andava diminuendo a misura che si saliva sulla montagna. In questo modo la questione fu sciolta compiutamente, e non fu più permesso di dubitare che fosse il peso dell'atmosfera che teneva la colonna di mercurio in equilibrio, poichè elevandosi nell'aria, e rendendo così la colonna atmosferica più corta e per conseguenza meno pesante, quella di mercurio diminuiva nel tempo medesimo.

A questa esperienza si deve la prima idea della misura delle altezze per mezzo del barometro (Vedi ALTIMETRIA). I lettori senza dubbio hanno già riconosciuto, nel tubo del Torricelli, lo strumento divenuto sì popolare sotto il nome di barometro. Vedi BAROMETRO.

La gravità dell'aria si dimostra ancora in una maniera sensibilissima in un fenomeno da tutti conosciuto; in quello del *Sifone*. Si chiama sifone un tubo piegato ABC (Tav. XXXII, fig. 7), composto di due bracci diseguali AB e BC. Se s'immerge il braccio più corto AB in un vaso MN pieno di un liquido qualunque, e se si toglie l'aria contenuta in questo tubo, succhiandola dalla estremità C, il liquido del vaso salirà nel sifone e sgorgerà dall'apertura C, purchè quest'apertura sia al di sotto della superficie del liquido.

Questo fenomeno è della stessa natura di quello del tubo del Torricelli; poichè è evidente che fatto una volta il vuoto per mezzo del succhiamento, l'acqua del vaso deve salire in B, e sgorgare quindi per l'apertura C; ma questo sgorgo non lasciando più che l'aria penetri nel sifone, la pressione atmosferica deve far salire continuamente del nuovo liquido nel tubo AB, fintantochè il peso della colonna BC è maggiore di quello della colonna AB, poichè questo eccesso di peso impedisce l'equilibrio che la pressione atmosferica nel punto C potesse fare alla pressione atmosferica in A; ma se queste due colonne divengono eguali, l'acqua non sale più nel tubo AB, e lo sgorgo cessa.

Dall'invenzione della macchina pneumatica in poi, la pressione dell'atmosfera è stata verificata in mille maniere differenti, e la gravità dell'aria è stata il soggetto di un numero grande di lavori. Dopo l'esperienza di Torricelli, il padre Mersenne cercò di determinare il peso specifico dell'aria; ma si avvicinò al vero

anco meno di Galileo; poichè quest'ultimo l'aveva calcolato $\frac{1}{400}$ di quello dell'

l'acqua, mentre Mersenne lo trovò soltanto $\frac{1}{130}$. Boyle ottenne un risultato più

esatto, trovando $\frac{1}{938}$. Hawksbee lo fissò a $\frac{1}{885}$. Ma, in tutte queste ricerche, è

necessario aver riguardo allo stato dell'atmosfera; e risulta finalmente dalle espe-

rienze dei sigg. Biot e Arago che il peso dell'aria atmosferica asciutta, alla temperatura del ghiaccio che si fonde e alla pressione di $0^m,76$, vale a dire essendo il termometro a zero e il barometro a $0^m,76$, è, a volume eguale,

$\frac{1}{770}$ di quello dell'acqua stillata.

Prima di esaminare le altre proprietà dell'aria, dobbiamo qui dire che pare che Descartes avesse riconosciuto il suo peso prima di Torricelli, e che gli appartenga ancora la prima idea dell'esperienza del Puy-de-Dôme. Ciò si rileva dalla raccolta delle sue lettere.

L'elasticità dell'aria è una proprietà di questo fluido che consiste nel cedere a qualunque pressione, restringendo il suo volume, che essa riprende immediatamente subitochè la pressione cessa d'agire. Per lungo tempo si è creduto che l'aria atmosferica fosse il solo fluido elastico che si trovasse in natura. Ma i lavori dei chimici del nostro tempo ci hanno fatto conoscere che esiste un gran numero di questi fluidi, ai quali si è dato il nome generico di *gas*. L'elasticità si manifesta visibilmente in una vescica che sia piena di questo fluido, e di cui siasi chiusa esattamente l'apertura; essa si schiaccia comprimendola tra le mani, e allora si prova una resistenza sensibile, dovuta alla reazione delle molecole compresse. Lasciata che sia libera, riprende la sua forma primitiva. Se la pressione è tanto forte da dar luogo ad una reazione che superi la tenacità delle pareti della vescica, essa scoppia con strepito.

Quanto al grado d'intensità della forza elastica dell'aria, è provato dalle esperienze le più esatte che, per una pressione moderata, è sempre proporzionale alla densità della massa d'aria compressa, e che questa densità è eguale alla forza compressiva. Per assienrarsene, si prende un tubo di vetro ricurvo, uno dei bracci del quale sia molto più lungo dell'altro; si chiude ermeticamente il braccio più corto, e quindi si versa del mercurio per l'estremità aperta del braccio più lungo. Riempiendo a poco a poco il braccio maggiore, e misurando successivamente lo spazio che occupa l'aria rinchiusa, che va sempre più comprimendosi nel braccio minore, si trova che gli spazj sono in ragione inversa dei pesi che premono l'aria. Ora, siccome questi pesi sono la misura dell'elasticità, dunque l'elasticità è anch'essa in ragione inversa dello spazio, o in ragione diretta della densità, poichè anco la densità è in ragione inversa dello spazio. In conseguenza di ciò si stabilisce la seguente legge generale:

La densità di una massa d'aria cresce e decresce nel rapporto delle pressioni, fintantochè la sua temperatura e la sua combinazione chimica rimane la stessa.

Questa legge importante si conosce col nome di *Legge di Mariotte*. Essa fu scoperta quasi nello stesso tempo da Roberto Boyle e Townley in Inghilterra, e da Mariotte a Parigi. Dalle esperienze di Gay-Lussac e di Dalton risulta che questa legge è esatta per tutte le temperature.

I fisici hanno cercato se la forza elastica dell'aria potesse esser distrutta; ma Boyle non ha trovato nessun grado di rarefazione capace di produrre questo effetto. Désaguliers rinchiusa dell'aria in un fucile a vento, e vide che dopo sei mesi essa non aveva perduto nessuna delle sue qualità primitive. Roberval, ripetendo questa esperienza, ottenne gli stessi risultati dopo un tempo molto più lungo. Da ciò può concludersi che niuno stato di rarefazione o di condensazione potrebbe distruggere interamente la forza elastica dell'aria. Ciò nonostante, il colonnello Roy ha provato che le molecole di una massa d'aria possono essere scomposte in modo da perdere una gran parte della loro forza elastica. Risulta ancora dalle sue esperienze che l'aria umida è più elastica dell'aria asciutta, e che l'aria atmo-

sferica, nel suo stato naturale, è proporzionalmente più elastica che quando la sua densità è considerabilmente aumentata dalla pressione. Hawksbee ha trovato pure che l'elasticità dell'aria può risentire talmente gli effetti di una violenta pressione, da abbisognarle in seguito qualche tempo per ritornare al suo stato primitivo. Finalmente il Dottore Hale pretende che esistano varii casi in cui questa elasticità è indebolita e alterata.

L'aria essendo un fluido pesante, se s'immagina l'atmosfera divisa in un'infinità di strati, è chiaro che gli strati inferiori, portando il peso dei superiori, saranno più compressi, e conseguentemente la densità dell'aria varierà colla sua elevazione al di sopra della superficie della terra. Per trovare la legge di questa variazione, supponiamo gli strati infinitamente piccoli, per poter considerare ognuno di essi come omogeneo in tutte le sue parti; indichiamo con d, d', d'' le densità di tre strati successivi di cui d sia l'inferiore; indichiamo inoltre con p il peso di tutta la colonna atmosferica che gravita sul primo strato, ossia il peso della colonna che comincia al secondo strato, con p' il peso della colonna atmosferica che comincia al terzo strato, e finalmente con p'' il peso della colonna che gravita sul terzo strato. Il peso particolare del secondo strato, considerandolo isolatamente, sarà dunque $p - p'$, e quello del terzo sarà $p' - p''$.

Ora, siccome le densità di due corpi eguali in volume stanno nel rapporto diretto dei loro pesi (*Vedi DENSA'.*), perciò si ha

$$d' : d'' :: p - p' : p' - p''.$$

Ma, per la legge di Mariotte, si ha pure

$$d' : d'' :: p' : p'',$$

poichè p' e p'' sono le pressioni che determinano le densità d' e d'' .

Da queste due proporzioni si deduce la seguente

$$p - p' : p' - p'' :: p' : p'',$$

donde si ha (*Vedi PROPORZIONI*)

$$p : p' :: p' : p''.$$

Ma le densità d, d', d'' sono proporzionali ai pesi p, p', p'' , dunque si ha pure

$$d : d' :: d' : d''.$$

Il che significa che la densità di uno strato qualunque è *media proporzionale* tra la densità dello strato precedente, e quella dello strato seguente.

Da questa proprietà risulta che le densità degli strati atmosferici formano una progressione geometrica. Noi abbiamo, per verità, supposto questi strati infinitamente piccoli; ma siccome, in una progressione geometrica, le somme di uno stesso numero di termini successivi sono anch'esse in progressione geometrica (*Vedi PROGRESSIONE GEOMETRICA*), così possiamo considerare come dimostrato il teorema principale dell'aerostatica, cioè:

Nello stato di equilibrio, la densità dell'aria va decrescendo dal basso in alto in serie geometrica, quando la natura chimica e la temperatura della colonna sono eguali in tutta la sua altezza.

L'elasticità dell'aria si manifesta sempre nella stessa maniera in tutte le occasioni; o che l'aria sia libera, o che sia compressa, la sua elasticità si esercita in tutti i sensi, e fa prendere all'aria stessa una forma sferica. Ciò si vede chiaramente nei liquidi posti sotto il recipiente di una macchina pneumatica; poichè, estraendo l'aria, comparisce subito sulla massa liquida una moltitudine di piccole bolle d'aria che vanno ingrossando, e conservano sempre la loro sfericità: queste bolle non si producono che a motivo dell'aria contenuta nel liquido, la quale si

dilata a misura che la pressione dell'aria esterna diminuisce in forza dell'azione della macchina. Per questa stessa ragione, si forma sempre un globo, quando si soffia a traverso un tubo di ferro in una massa di vetro fuso. L'espansione dell'aria, quando si toglie istantaneamente la forza compressiva, è tale che occupa in certi casi uno spazio 13 a 14,000 volte più grande del suo spazio primitivo, e ciò per la sola sua forza di dilatazione, e senza l'applicazione del fuoco.

Il calorico esercita sulla densità e sull'elasticità di una massa d'aria un'influenza che forma l'oggetto della seguente proposizione:

In una massa d'aria perfettamente rinchiusa, e che non può cangiare il suo volume, l'elasticità cresce per l'effetto del calorico in quel medesimo rapporto nel quale si accrescerebbe il suo volume, se, sotto la stessa pressione, le fosse possibile di dilatarsi.

Gay-Lussac avendo scoperto che tutti i fluidi elastici sono egualmente dilatati dal calorico quando la pressione resta la stessa, ed avendo trovato che questa dilatazione, dalla temperatura della congelazione fino a quella dell'ebullizione, è di

0,375, ossia di $\frac{3}{8}$ del volume che la massa aveva alla prima temperatura, biso-

gna dunque che, negli stessi limiti, l'elasticità di una massa d'aria rinchiusa cresca nel rapporto di 1 a 1,375, ossia di 8 a 11. Da ciò è facile concludere che

l'accrescimento della elasticità è di $\frac{3}{800}$, o presso a poco di $\frac{1}{267}$ per ogni grado

del termometro centigrado. *Vedi TERMOMETRO.*

ARIANNA (*Astron.*). *Vedi CORONA.*

ARIDED (*Astron.*). Nome della stella che sembra formare ciò che dicesi *la coda del Cigno*, nella costellazione di questo nome, e che nei cataloghi si trova segnata colla lettera β .

ARIE TE (*Astron.*). Nome d'una costellazione, e del primo dei dodici segni dello zodiaco che viene indicato col carattere ∇ . Il principio del segno dell'Ariete è il *punto equinoziale ascendente*, uno dei due punti in cui l'eclittica taglia l'equatore. Quando il sole, nel suo corso apparente, esce dalle regioni australi del cielo, e ci apporta la primavera, esso attraversa il *punto ascendente* verso il 21 di Marzo, e si eleva quindi ogni giorno avvicinandosi al polo boreale fintantoché non è giunto al segno del Cancro: arrivato a questo segno, sembra che stia per qualche tempo stazionario, quindi comincia a discendere allontanandosi a poco a poco dal polo fino al segno della Libbra, dove abbandona il nostro emisfero verso il 23 di Settembre, attraversando il primo punto di quest'ultimo segno, vale a dire il *punto equinoziale discendente*.

Il moto retrogrado dei punti equinoziali ha cangiato la corrispondenza dei segni colle costellazioni di cui portano i nomi (*Vedi LIBBRA*); così la costellazione dell'Ariete non si trova più in oggi compresa nel segno di questo stesso nome, come lo era nell'antico zodiaco, ma è quasi tutta intera nel segno del Toro.

La costellazione dell'Ariete trovasi indicata presso i varj autori coi nomi di *Princeps Zodiaci*, *Vervex*, *Ovis aurea*, *Jovis sidus*, *Vernus portitor*. Varie sono le opinioni sulla sua origine. I più dicono che Frisso ed Elle, costretti a fuggire dal loro padre Atamante che voleva sacrificarli, attraversarono l'Ellesponto portati sopra un ariete che aveva il vello d'oro. Nel passaggio, Elle si annegò, e Frisso giunto in Colehide sacrificò l'Ariete a Marte, che infatti è il Dio che presiede al segno dell'Ariete. Moltissime altre favole sono state immaginate dai poeti su questa costellazione, le quali possono vedersi in Dupuis, *Origine de tous les cultes*, Parigi, 1795, 3 vol. in-4.

Questa costellazione è circondata dalla Balena, dal Toro, da Andromeda e dai Pesci, e contiene 19 stelle di qualche considerazione, cioè: 3 di terza grandezza, delle quali quelle segnate colle lettere α e β sono situate ai corni dell'Ariete, 1 di quarta grandezza, 2 della quinta, e 13 della sesta. Essa si trova nel cielo, immaginando condotta per Aldebaran e per Prozione una linea retta, la quale prolungata passa tra le due stelle α e β dell'Ariete.

ARIE TE (*Mecc.*). Macchina da guerra di cui si servivano gli antichi per atterrare le mura della città asediata. Consisteva in una grossa trave che ad una delle sue estremità era armata di un capo di ferro che rappresentava la testa di un ariete, dal quale ha preso la sua denominazione. Questa trave veniva sospesa orizzontalmente per mezzo di funi ad un grosso intavolato che ricopriva tutta la macchina, quindi le si imprimeva un moto oscillatorio, e dopo averle fatto acquistare una gran velocità si lasciava andare ad urtare con violenza le mura nemiche, che a tali ripetuti colpi crollavano ed erano rovesciate. Si vedano i *Comenti* di Folard alla traduzione francese della Storia di Polibio fatta dal p. Thuillier.

ARIE TE IDRAULICO. Macchina ingegnosa per elevare l'acqua, inventata da Montgolfier. Si veda il *Nuovo Dizionario Tecnologico*, Venezia, 1833 e segg. io-8.

ARISTARCO di Samo, geometra ed astronomo celebre, appartiene alla prima e brillante epoca della scuola d'Alessandria, quantunque le sue opinioni sul moto della terra l'abbiano spesso fatto designare come discepolo della scuola pitagorica. Viveva durante il terzo secolo avanti G. C. Tolomeo riporta infatti l'osservazione di un solstizio fatta da Aristarco l'anno 50° del primo periodo di Calippo, che corrisponde all'anno 281 avanti l'era cristiana (Vedi la *Sintassi* di Tolomeo, Lib. III, cap. 2, tom. I, pag. 163 ediz. di Halma). Questa circostanza notevole non permette d'ingannarsi sulla vera epoca della sua esistenza, malgrado le diverse opinioni dei biografi moderni su questo proposito.

Abbiamo avuto altrove (*Vedi SCUOLA D'ALESSANDRIA*) occasione di rammentare alcuni dei lavori di Aristarco, ma egli si è acquistato una gloria più solida e più grande, tentando con generosi sforzi di far rivivere l'opinione pitagorica del moto della terra, e di farla prevalere in Alessandria sull'ipotesi contraria, adottata allora da tutti gli astronomi, ipotesi che i lavori di Tolomeo eressero in seguito in sistema. Non è senza interesse per lo studio della scienza il ricondurre talvolta il pensiero su quelle lotte antiche tra l'errore e la verità, poichè esse racchiudono in sé profonde lezioni filosofiche. L'opinione di Pitagora era troppo evidentemente contraria alla cosmogonia antica, che riposava specialmente sull'immobilità della terra nel centro dell'universo, per poter trionfare ad un tratto degli errori invecchiati dell'uomo, non ostante che essa spiegasse le apparenze sulle quali questi stessi errori si erano stabiliti. Aristarco, che aveva abbracciato questa opinione, aveva sentito la necessità di dimostrarne i principj con maggiore sviluppo di quello che fatto avevano i suoi predecessori. Compose un libro su questo argomento nel quale attese a confutare tutte le obiezioni che l'ipotesi pitagorica aveva fatto nascere. Questo libro è perduto; ma Archimede ne parla abbastanza estesamente lo uno de' suoi scritti intitolato *Psammitte* o *Arenario*, per poterci formare un'idea della sua importanza scientifica. Da varii passi di quest'illustre geometra si vede che Aristarco poneva il sole immobile nel mezzo delle stelle fisse, non ammettendo altro moto che quello della terra nella sua orbita intorno a quest'astro. All'obiezione che si opponeva che, in questa disposizione, le stelle fisse sarebbero soggette ad una diversità di aspetto, secondo i differenti punti nei quali la terra venisse successivamente a trovarsi, Aristarco rispondeva che tutta l'orbita di questo pianeta, paragonata colla sua distanza dalle fisse, non occupava nello spazio che un punto di una grandezza insensibile. Un passo ancora di Plutarco, nel suo trattato *Delle Apparenze nel disco della Luna*, ci fa testimonianza che

Aristarco sosteneva il moto della terra. Ecco come si esprime Plutarco: « Non ci » tacciate di empietà alla maniera di Cleanto, il quale teneva che i Greci avreb- » ber dovuto accusare di empietà Aristarco di Samo, perchè distrutto aveva le » fondamenta del mondo, e voleva spiegare gli aspetti degli astri, supponendo che » i cieli siano immobili, e che la terra giri circolarmente in un'orbita obliqua, » e in pari tempo roti intorno al suo asse ». Così si manifestò fino nei primordi della scienza la tendenza irresistibile dello spirito umano verso la verità.

Il libro di Aristarco doveva necessariamente contenere parecchi sviluppi importanti su queste prime idee, più atte certamente ad essere apprezzate da noi che dalla generazione, della quale non ebbero la forza di correggere la erronee credenze; ed in questo rapporto dobbiamo deplorarne la perdita. Ma forse la scienza deve dolersi anco di più per non avere Archimede pronunziato il suo giudizio su questa grave questione; poichè l'opinione di un tal uomo, appoggiata a tutta l'autorità della sua scienza e del suo genio, avrebbe senza dubbio compiuto il trionfo dell'ipotesi pitagorica, ed avanzato così di parecchi secoli i progressi dell'astronomia.

Vitruvio parla con ammirazione di Aristarco, come inventore di parecchie macchine, e in particolare di un orologio solare ch'ei chiama *Scafo*. Quest'orologio è descritto da Marziano Capella, dal quale si rileva che era un emisfero concavo con uno stile che terminava al centro e che segnava le ore. Montucla ne descrive uno scavato a Frascati nel 1741, che, siccome Cicerone descrive uno strumento simile, si congettura avere appartenuto a quell'oratore. Si veda Montucla, *Histoire des mathématiques*, Parigi, 1799, 4 vol. in-4, tom I, pag. 721.

La sola opera che ci rimane di Aristarco è un *Trattato sulle grandezze e sulle distanze del Sole e della Luna*, nel quale egli espone il metodo per determinare la distanza del sole dalla terra per mezzo della dicotomia della luna, metodo di cui è reputato l'inventore, e che è certamente una delle sue più belle scoperte. Ecco in che consiste.

S'immagini un triangolo formato dalle tre linee rette che uniscono la terra, la luna e il sole: in questo triangolo possiamo misurare direttamente l'angolo alla terra, vale a dire l'angolo di elongazione tra la luna e il sole, poichè accade spesso che la luna e il sole si trovino nello stesso tempo sull'orizzonte. Di più (ed in questo consiste lo spirito del metodo), l'angolo alla luna diviene retto quando la parte illuminata della luna e la parte oscura sono eguali, il che accade quando il piano del circolo che nelle differenti fasi della luna separa la parte illuminata dalla parte oscura, è diretto verso la terra, o si proietta in linea retta sul disco lunare. Allora il triangolo proposto essendo rettangolo alla luna, e conoscendosi l'angolo di elongazione tra la luna e il sole, si conoscono i tre angoli del triangolo, e per conseguenza anco i rapporti de' suoi lati. In tal modo Aristarco avendo trovato che l'angolo di elongazione tra la luna e il sole era di circa 87 gradi, mentre effettivamente è di pochi minuti minore di 90 gradi, calcolò il rapporto dei lati con un metodo lungo e difficile che è stato esposto da Delambre nella sua *Storia dell'Astronomia antica*, e trovò che il rapporto cercato tra la distanza dalla terra alla luna e quella dalla terra al sole è tra 18 e 1 : 19; risultato molto lontano dal vero, poichè la seconda distanza è $401 \frac{1}{2}$ volte più grande della prima. Il metodo di Aristarco è buono, e per 1800 anni gli astronomi non ne hanno conosciuto di migliore; ma la difficoltà sta nel cogliere con sufficiente precisione l'istante in cui la luna è dicotoma, cioè divisa in due parti eguali dall'ombra, il che rende incerto l'angolo di elongazione; e per poco che uno s'inganni, l'angolo al sole, che è piccolissimo, prova variazioni sensibili che influiscono moltissimo sul rapporto delle distanze della terra dal sole e dalla luna.

La storia non ci ha lasciato sulla vita di Aristarco nulla di più importante di quanto abbiamo detto. Ei visse senza dubbio in quella pacifica solitudine in cui l'uomo dedito alle scienze dimentica, in seno alle sue utili meditazioni, le agitazioni del mondo. Ciò non ostante alcuni autori, avendo male interpretato il passo di Plutarco che abbiamo di sopra citato, hanno asserito che Aristarco fu accusato d'irreligione per aver osato, col suo sistema, di turbare il riposo di Vesta (la terra). Ciantio, discepolo di Zenone, aveva effettivamente scritto contro di lui, poichè Diogene Laerzio cita un passo del suo libro che allude a una vaga accusa di questo genere; ma nulla ci dimostra che i tribunali siano stati richiamati a pronunciare su tal questione, che si ridusse così a una polemica un poco viva tra due discepoli di differenti scuole.

Le principali edizioni di Aristarco sono: I. La traduzione latina di Giorgio Valla, impressa a Venezia nel 1498 in-fol. unitamente al commento o ristretto che ci ha lasciato Pappo nelle sue *Collezioni matematiche*; questa edizione è unita ad altre opere trasportate dal greco in latino dal medesimo traduttore, ed è intitolata: *Niceforus, De Astrolabio; Proclus, De Astrolabio, seu hypotyposis astromonicarum positionum; Aristarchi Samii, De magnitudinibus et distantis solis et lunae; Timaeus, De Mundo; Cleomedes, De Mundo; Aristoteles, De Caelo*; II. *Aristarchus, De magnitudinibus et distantis solis et lunae liber unus cum Poppi Alexandrini explicationibus quibusdam n. Freder. Commandino in latinum conversus*, Pasaro, 1572, in-4; questa edizione, che contiene la sola traduzione latina, è accompagnata da un commento del traduttore; III. *Aristarchi Samii, De magnitudinibus et distantis solis et lunae liber graece et latine: edidit notisque illustravit Joh. Wallis geometriae professor savilianus*, Oxford, 1688, in-fol.; la versione latina è quella stessa del Commandino, e l'intera edizione è stata ristampata nel secondo volume delle opere di Wallis, Oxford, 1699, in-fol. Una nuova edizione del testo greco con una traduzione latina comparve a Parigi nel 1810 in-8, ed esiste pure una traduzione francese di Aristarco eseguita da de Fortia d'Urban, Parigi, 1823 in-8.

Venne attribuito ad Aristarco un trattato sul sistema del mondo, che sotto il suo nome venne pubblicato a Parigi dal p. Mersenne nel 1644 col titolo: *Aristarchi Samii, De Mundi systemate, partibus et motibus ejusdem, libellus cum notis Aegid. Roberval*, in-12: quest'opuscolo fu nuovamente pubblicato a Parigi nel 1647 dallo stesso p. Mersenne nel tomo terzo delle sue *Novae observationes physico-mathematicae*. Nella prefazione, Roberval dice di averlo tradotto da un manoscritto in stile barbaro e quasi inintelligibile; ma Menagio ci avverte che il libro è supposto ed appartiene interamente a Roberval. Su questo lavoro, che è del genere di quei ristabilimenti dai quali abbiamo parlato all'articolo AROLOMO, il lettore potrà leggere una notizia molto particolarizzata alla pag. 233 dell'edizione di Aristarco pubblicata da de Fortia d'Urban, che di sopra abbiamo citata.

ARISTEO di Crotone, celebre geometra dell'antichità, nacque verso l'anno 536 avanti l'era volgare, e fu per sentimento di Giamblico il miglior discepolo e il successore di Pitagora. A torto quindi Montucla e Bossut hanno creduto che fosse discepolo di Platone, che nacque l'anno 429 av. G. C., a che fiorisse nel quarto secolo avanti l'era cristiana; e a torto pure è stato affermato essere egli stato maestro ad amico di Euclide che vivava 280 anni av. G. C. Il suo nome ha sopravvissuto alle sue opere, che non sono giunte fino a noi, a che ci sono nota soltanto per le citazioni che di esse si trovano in alcuni antichi scrittori. Profitando di quanto prima di lui era stato scoperto, compose un'opera divisa in cinque libri sulle *Sezioni Coniche*, di cui è probabile che Apollonio si sia servito nella prima parte del bel trattato che ha composto sullo stesso argomento. Gli si attribuisce pure un altro scritto sui *Luoghi Solidi*, che comprendeva pure cinque libri.

e che non è stato meno utile della prima di queste opere ai progressi della geometria. Il trattato dei *Luoghi solidi*, di cui fa menzione Pappo nel settimo libro delle sue *Collezioni matematiche*, era destinato a completare la dottrina delle sezioni coniche, coll'applicazione delle medesime alla soluzione dei problemi geometrici dipendenti da equazioni del terzo e del quarto grado. Nel secolo XVII, Viviani, discepolo di Galileo, in età appena di 23 anni, che si era già reso celebre per la sua *Divinazione* sul quinto libro delle *Sezioni coniche* di Apollonio, risolvette di ristabilire collo stesso metodo l'opera di Aristeo sui *Luoghi solidi*. Questo lavoro ingegnoso, che pare essere stato uno dei primi che abbiano richiamato le meditazioni di Viviani, è non ostante l'ultimo che questo dotto abbia pubblicato. Esso comparve nel 1701, epoca in cui il Viviani era giunto ad un'estrema vecchiezza, col titolo: *De locis solidis secunda divinatio geometrica in quinque libros injuria temporum amissos Aristaei senioris geometrae*, Firenze, in-fol. (Vedi VIVIANI). Si attribuiscono pure ad Aristeo una *Historia Geometrica*, e un trattato *De Anima*; ma forse questi scritti appartengono a qualche altro autore omonimo. Si veda il Mazzucchelli, *Gli Scrittori d'Italia*, Brescia, 1752-63, 2 vol. in 6 parti, in-fol.

- ** ARISTILLO, celebre astronomo dell' antichità. Egli e Timocaride furono i primi che, alla fondazione della scuola d' Alessandria, cominciarono a studiare l' astronomia nell' osservazione dei fenomeni celesti. Di questi due astronomi non si conosce che quel poco che si legge in Tolomeo: ma da alcuni pa-si di questo autore può rilevarsi che Aristillo e Timocaride furono i primi che determinarono la posizione delle stelle rapporto all' eclittica, indicando cioè le loro latitudini e le loro longitudini: pare ancora che si accingessero a formare un catalogo di stelle, poichè da varie loro osservazioni riportate da Tolomeo si vede che non si limitarono ad osservare le stelle comprese nella fascia zodiacale, ma determinarono ancora la posizione di molte altre stelle lontane da questo circolo. In quanto all' epoca in cui fiorirono questi astronomi, si sa soltanto che essi osservarono dall' anno 295 av. G. C., data della loro prima osservazione conosciuta, fino al 130° anno del regno di Tolomeo Filadelfo, il che forma un intervallo di 27 anni. Si veda Montucla, *Histoire des mathematiques*, Parigi, 1799, 4 vol. in-4; Vossio, *De universae matheseos natura et constitutione liber*, Amsterdam, 1660, in-4, e Delambre, *Histoire de l' astronomie ancienne*, Parigi, 1817, 2 vol. in-4.

ARISTOTILE, uno dei più celebri filosofi dell' antichità, nacque a Stagira, piccola città dell' Olinzia, in Macedonia, il primo anno della 99^a olimpiade (anno 384 av. G. C.). Non è solamente sui suoi contemporanei che le dottrine di Aristotile hanno esercitato un' immensa influenza in tutti i rami del sapere. Fondatore di una scuola rivale di quella di Platone, non solamente acquistò durante la sua vita un' autorità quasi senza limiti, poichè il suo genio enciclopedico aveva abbracciato tutte le scienze conosciute fino al suo tempo, ma è restato ancora lungo tempo dopo la sua morte, e presso tutti i popoli civilizzati, il legislatore assoluto dell' intelligenza. Il segreto di questa fama, la potenza e l' estensione della quale nessun uomo ha potuto divider con lui, sta nel principio stesso sul quale riposa il dogmatismo delle sue idee. Al razionalismo di Platone sostituì l' empirismo, vale a dire non ammise altre cognizioni che quelle che emanano dai fatti e risultano dall' esperienza. Le apparenze grossolane di questa dottrina, le deduzioni logiche della quale possono essere afferrate e comprese dalle intelligenze le meno coltivate, dovettero colpire i Greci, soggetti a una religione tutta materiale, che non aveva potuto riguardare che come un sistema empio lo spiritualismo di Socrate. Ciò non ostante, Aristotile non era potuto giungere a stabilire le sue categorie che per mezzo dell' astrazione: ma i risultati della sua dottrina sembrarono tanto gli spiriti, che non si pensò al principio intellettuale dal quale erano state dedotte.

Due cose debbonsi osservare in Aristotile. La prima è che il suo sistema, tanto opposto alla teoretica del cristianesimo, abbia servito per sì lungo tempo di base all'educazione de' popoli moderni, malgrado l'anatema di cui era stato l'oggetto per parte dei primi padri della Chiesa. La seconda è che questo filosofo, cui non può ricusarsi uno spirito esatto e scrutatore, abbia potuto trascorrere quasi del tutto l'applicazione delle scienze matematiche ai fatti che egli spiegava per mezzo di ragionamenti dedotti dai loro rapporti coi sensi e dall'esperienza. Ciò non ostante, è questo il solo ed ultimo punto di vista sotto il quale noi dobbiamo adesso esaminare i suoi lavori.

I soli rami delle matematiche applicate, di cui si trovano alcune tracce negli scritti di Aristotile, sono l'*astronomia*, la *meccanica* e l'*ottica*. I ragionamenti, talvolta giudiziarii, del filosofo di Stagira, sul sistema del mondo, non possono essere riguardati come formanti un sistema astronomico. Ciò non ostante, non fu che sull'appoggio d'idee le più false in fisica, sul moto e sul peso, sulla natura e sulla disposizione dei corpi celesti, ch'ei giunse a rovesciare il sistema pitagorico dell'immobilità del sole. Nei primi due libri *De Coelo* si trovano esposte le sue idee astronomiche su questo proposito. Forse non deve sorprendere che Aristotile abbia potuto al suo tempo trionfare così facilmente di un sistema che, per esser considerato come una verità fondamentale, ha avuto bisogno di tutti i progressi della ragione; ma non si spiega con egual facilità il rispetto che i più illustri maestri della scuola d'Alessandria conservavano per le opinioni di questo filosofo, e l'influenza che esse hanno esercitato sulla scienza fino ad un'epoca da noi non molto lontana. Le *Questioni meccaniche*, che procacciarono ad Aristotile una fama, che per altro aoro tutte le altre sue opere hanno avuto il privilegio di eccitare, non contengono che giudizi del tutto falsi su questa scienza. Egli comincia con un ragionamento puerile sulla ragione per la quale la leva, o la bilancia a braccia diseguali, pone in equilibrio pesi o potenze diseguali, ragione che egli cerca nelle proprietà del circolo delle quali fa una lunga e inutile enumerazione. « Come stupire, aggiunge egli terminando, che una figura così ferma conda di maraviglie ne produca una di più, ponendo in equilibrio potenze diseguali? » Aristotile non è stato più felice nelle sue ricerche sull'ottica: tutto ciò che ne ha detto è vago ed erroneo, ed annunzia appena i primi passi di una scienza che non era dato al suo genio di creare. Aristotile morì in età di 63 anni, vale a dire l'anno secondo della CXIV olimpiade (anno 322 avanti l'era cristiana). La ragione umana ha trionfato finalmente del luogo servaggio nel quale è stata ritenuta in un modo così inconcepibile dalle dottrine di questo filosofo. Tutti i suoi lavori scientifici sono stati talmente superati, che non possono in oggi esser considerati che come monumenti istorici dell'intelligenza. Lo stesso dovrebbe essere dei principj sui quali riposa la sua filosofia, sebbene il suo empirismo sia ancora molto superiore allo stupido e inesorato materialismo, che l'ignoranza delle leggi più semplici dell'intelligenza umana cerca di opporre anche ai nostri giorni alla sua filosofia.

Le migliori edizioni delle opere complete di Aristotile sono, quella di Buhle stampata a Due-Ponti, 1791 e segg. 5 vol. in-8, e quella di Bekker impressa a Berlino, 1831, 3 vol. in-4, nella quale il testo greco è stato riscontrato sopra più di 100 manoscritti. Sulla vita di Aristotile, potranno consultarsi gli antichi biografii riportati nel tomo primo dell'edizione di Buhle, e Stahl, *Aristotelia*, Halle, 1830-32, 2 vol. in-8. Sulla sua dottrina, si vedano Brucker, *Historia critica philosophiae*, Lipsia, 1742, 6 vol. in-4, Tennemann, *Storia della Filosofia*, Lipsia, 1798-1810, 18 vol. in-8, ed in particolare la *Storia della Filosofia* di Ritter tom. III, pag. 3-395. Sull'influenza de' suoi scritti sulle opinioni e sulla filosofia delle età di mezzo, si veda Launoy, *De varia Aristotelis fortuna*, l'articolo

Aristotile nel Dizionario storico di Bayle, Jourdain, Recherches sur l'âge et l'origine des traductions latines d'Aristote, e Fabricio, Bibliotheca graeca.
ARISTOTILE. Vedi ALBERTI.

ARITMETICA (Da ἀριθμός, numero, e da τέχνη, arte). Secondo ramo della SCIENZA DEI NUMERI, l'oggetto del quale è l'effettuazione dei calcoli, o i fatti dei numeri.

I numeri, come tutti gli oggetti delle cognizioni umane, possono esser considerati in generale e in particolare, vale a dire nel rapporto delle loro leggi, e nel rapporto dei loro fatti. Per esempio, questa proposizione: *la somma di due numeri, moltiplicata per la loro differenza, è eguale alla differenza dei loro quadrati*, è una legge dei numeri, perchè si applica generalmente a tutti i numeri; mentre questa: *undici moltiplicato per cinque è eguale a cinquantocinquale*, è un fatto dei numeri, perchè non può applicarsi che ai soli numeri 11, 5 e 55.

Questa distinzione divide la scienza dei numeri in due rami generali, il primo dei quali, quello cioè che tratta delle leggi, è l'ALGEBRA, e il secondo, ossia quello che tratta dei fatti, è l'ARITMETICA.

Da questa deduzione dell'oggetto dell'aritmetica risulta necessariamente, che le suddivisioni particolari di questa scienza non possono esser fondate che sulle suddivisioni dell'algebra. Noi dobbiamo dunque anche adesso considerare i fatti dei numeri nel doppio aspetto della generazione, e del paragone (Vedi ALGEBRA); ma prima di esaminare la natura delle operazioni che nascono da questi due distinti punti di vista, daremo un'idea storica del cammino progressivo dell'aritmetica, cammino talmente collegato coi primi sforzi dell'intelligenza, che le sue tracce risalgono alla più alta antichità, e vanno a perdersi nell'infanzia del genere umano.

L'origine dell'aritmetica, come quella di un gran numero di altre scienze, è sì oscura e sì complicata di favole e di tradizioni incerte, negli scritti degli antichi storici, che poche sono le indicazioni soddisfacenti che in questo rapporto sono giunte fino a noi, malgrado le numerose investigazioni dei moderni. D'altronde gli scrittori, che si sono occupati di una tal questione, sono lungi dall'esser d'accordo sui popoli ai quali deve attribuirsi l'invenzione dell'aritmetica.

Così, Giuseppe, nelle sue *Antichità Giudaiche*, lib. I, cap. 9, afferma che Abramo, avendo lasciato la Caldea per recarsi in Egitto durante la carestia, fu il primo che insegnò agli abitanti di quel paese l'aritmetica e l'astronomia, di cui non avevano cognizione veruna. Al contrario, Platone (in *Phaedone*) e Diogene Laerzio (in *Proemio*) pretendono che l'aritmetica e la geometria siano di origine egiziana. Queste due scienze, secondo essi, sarebbero state comunicate agli Egiziani dal loro Dio Theut o Thot, divinità i cui attributi, molto simili a quelli che i Greci accordarono in seguito al loro Mercurio, si estendevano sul commercio e sui numeri.

Da un'altra parte, Strabone, nel libro 17 della sua *Geografia*, dice che l'aritmetica e l'astronomia sono, secondo un'opinione comunemente ricevuta al suo tempo, di origine fenicia. Ma questa opinione è evidentemente erronea, poichè siamo debitori ai Caldei, che sono un popolo molto più antico, della cognizione di alcuni cicli o periodi astronomici, la determinazione dei quali suppone una scienza già molto avanzata.

È certamente inutile l'arrestarci sopra tali questioni, forse insolubili, poichè è certo che un'idea più o meno perfetta dei numeri deve esser nata dai bisogni naturali dell'uomo, e al primo svilupparsi della sua intelligenza. Senza dubbio il metodo del calcolo deve essere stato estremamente limitato nell'infanzia delle società; ma, a misura che esse progredivano nella civiltà, gli uomini ebbero l'occasione di rendere più frequenti le loro transazioni; le nozioni numeriche

gradatamente si estesero; s' inventaron dei segni e dei metodi per ajutare la memoria e risparmiare la fatica. Ma il determinare con precisione l'epoca, nella quale si stabilirono questi segni e questi metodi, ci è assolutamente impossibile, poichè nessuno scritto di quell'epoca, ad eccezione di un frammento che Proclo ci ha trasmesso ne' suoi *Comenti* al primo libro di Euclide, è giunto fino a noi. Ciò non ostante, e in mezzo a tutte le incertezze che sono state il risultato delle tante ricerche storiche che su questo soggetto sono state fatte, è almeno indubitato che quasi tutte le nazioni sono state condotte a stabilire la stessa scala numerica per base della loro aritmetica; poichè ad eccezione dei Chinesi, e di un' oscura tribù di cui parla Aristotile, tutti gli altri popoli hanno scelto la divisione decupla, o il metodo di calcolare per periodi di dieci, come la più naturale e la più comoda.

Questa conformità generale delle diverse nazioni non ha potuto evidentemente avere altre cause che l'abitudine, contratta fino dall'infanzia, di contare sulle dita. Si è cominciato dal contare da *uno* fino a *dieci*, quindi si è ricominciato nella stessa maniera, e di qui si è formata la scala decimale o la divisione decupla dei numeri. Gli uomini hanno dunque scelto il numero dei loro diti per base dell'aritmetica, ed è probabile che un popolo che avesse avuto sei dita a ciascuna mano avrebbe contato per periodi di *dodici*.

Dobbiamo nulladimeno fare osservare che, ad eccezione della pratica di dividere i numeri in unità, diecine, centinaia, ec., l'aritmetica antica differisce molto dalla moderna, non solamente nei segni dei numeri, ma ancora nel modo di eseguire le operazioni elementari della scienza. Gli Ebrei e i Greci in particolare, e dopo di essi i Romani, ricorsero alle lettere dell'alfabeto per rappresentare i numeri. Ma siccome non sapevano dare ai loro caratteri un valore locale, le operazioni della moltiplicazione e della divisione erano rese complicate da un gran numero di difficoltà.

La superiorità del nostro sistema di numerazione su quello degli antichi è così grande, che fino dalla sua introduzione in Europa qualunque altro metodo usato anteriormente è stato quasi del tutto dimenticato. Le vestigie che ne rimangono sono sì rare e sì difficili a scoprirsi, che le relazioni incomplete di Wallis, e le indicazioni somministrategli da Delambre, nella sua *Storia dell'astronomia antica*, formano tutto ciò che si possiede di certo su questo soggetto; poichè si sa che gli autori delle opere antiche si sono contentati di dare i risultati dei loro calcoli, senza indicare la natura dei metodi di cui facevano uso, o le differenti parti delle loro operazioni. Tuttavia, siccome le regole degli antichi possono avere qualche interesse, almeno per la storia della scienza, ci accingeremo a dare un'idea generale dell'aritmetica dei Greci.

ARITMETICA DEI GRECI. I Greci, come già abbiamo detto, dividevano i numeri in periodi di dieci; ma siccome ignoravano il metodo di rappresentarli coi medesimi caratteri semplici, dando a questi caratteri un valore locale, furono obbligati a fare uso di trentasei caratteri differenti, quasi tutti tratti dal loro alfabeto, per rendere la loro aritmetica regolare e possibile.

Così, per esprimere le nostre unità primitive

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

fecero uso delle lettere

α , β , γ , δ , ϵ , ς , ζ , η , θ .

Per le diecine

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90,

impiegarono

1, κ , λ , μ , ν , ξ , $\omicron$, π , ι ;

e per le centinaia

100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900,
si serviranno delle lettere

Ma le migliaia $\rho, \sigma, \tau, \upsilon, \varphi, \chi, \psi, \omega, \Xi$.

1000, 2000, 3000, 4000, 5000, 6000, 7000, 8000, 9000,
erano rappresentate così

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta,$
vale a dire coi caratteri stessi di quelli delle unità semplici, ponendo sotto ad
essi, per distinguerli, un piccolo accento o nn' *iota*.

Con questi trentasei caratteri, i Greci esprimevano tutti i numeri al di sotto di 10000, scrivendo gli uni accanto agli altri i caratteri che rappresentavano le unità dei differenti ordini. Per esempio,

991	era espresso da	$\Theta_1 \alpha$,
9999		$\theta, \Theta_1 \theta$,
7382		$\zeta, \pi \pi \beta$,
8036		$\pi, \lambda \zeta$,
4001		δ, x .

Da tutti ciò chiaramente risulta che l'ordine dei caratteri, come pure il loro numero, non serviva punto a determinare il valore delle quantità; poichè, per esempio, $\theta, \vartheta, \vartheta$ è la stessa cosa che $\vartheta, \vartheta, \theta$, o $\theta, \vartheta, \vartheta$, ec. Ciò non ostante, per maggior regolarità si scrivevano i caratteri secondo il loro valore, come anco noi abbiamo fatto negli esempi riportati di sopra.

Per esprimere un numero qualunque di *diecine di migliaia*, i Greci facevano uso della lettera M, che essi ponevano sotto il carattere che rappresentava il numero di queste diecine di migliaia. Così

$$\alpha_M, \quad \beta_M, \quad \gamma_M, \quad \delta_M, \text{ etc.}$$

significavano

10000 , 20000 , 30000 , 40000 , etc.

Per la stessa ragione

λ_5
M rappresentava 370000 $\delta_{70,9}$
M = 43720000.

In generale, la lettera M posta sotto un numero lo rendeva diecimila volte più grande. Questa notazione, evidentemente incomoda pei calcoli, è usata da Eutocio ne' suoi *Comenti* sopra Archimede.

Diofanto e Pappo rappresentano le diecine di migliaia colle due lettere Μν, poste dopo il numero: in tal modo si ha

$$\alpha.M_V = 10000, \quad \beta.M_V = 20000,$$

2

$$370000 = \lambda\gamma.\text{Mv} \quad , \quad 43720000 = \delta_{\text{to}\beta}.\text{Mv}.$$

Parimente

43728097 è rappresentato da $\partial_{\tau_0 \beta} M_{\mu_0 \alpha}^{\nu_0}$,
 99999999 $\theta_{\gamma \delta} \otimes \theta_{\mu_0 \nu_0} \otimes \theta_{\rho_0 \sigma_0}$.

6

Gli antichi autori si servivano spesso di una notazione più semplice: sopprimevano il segno $M\theta$, e si contentavano di mettere un solo punto per indicare le decine di migliaia. Così invece di

$\theta, \tau\theta\beta. M\theta\eta, \eta, \eta, \eta,$ scrivevano $\theta, \tau\theta\beta. \eta, \eta, \eta,$

e in luogo di $\theta, \theta, \theta. M\theta, \theta, \theta \dots \theta, \theta, \theta. \theta, \theta, \theta.$

Quest'ultimo numero diviene, aggiungendovi un'unità, $(10000)^2 = 100000000$, o il massimo numero dell'aritmetica volgare dei Greci. Questo limite era più che sufficiente per i bisogni ordinarii, poichè le unità di peso e di misura di lunghezza presso i Greci, cioè il *talento* e lo *stadion*, erano molto più grandi del nostro *chilogrammo* e del nostro *métro*. I soli geometri ed astronomi potevano trovare degl'inconvenienti in questa limitazione; ma pure questi inconvenienti esistevano, e si dovevano cercare i mezzi per farli sparire. Archimede, per esempio, nel suo libro intitolato *Arenarius*, per esprimere il numero dei grani di arena che potrebbe contenere una sfera che avesse per raggio la distanza che in quel tempo si supponeva esservi tra la terra e le stelle fisse, trova che sarebbe necessario un numero che avesse sessantaquattro cifre nel nostro sistema di numerazione. Per rappresentare questo numero, egli prende il quadrato di una diecina di migliaia, cioè 100000000, per una nuova unità, e chiama *numeri del secondo ordine* quelli che possono formarsi con questa nuova unità; il che gli somministra il mezzo di esprimere i numeri, per quali noi abbiamo bisogno di sedici cifre. Prendendo quindi $(100000000)^2$ per una nuova unità, giunge ad esprimere i numeri che richiedono ventiquattro cifre, e così di seguito. In questo modo ei giunge finalmente a potere esprimere il numero in questione, il quale, come abbiamo detto, richiede sessantaquattro cifre nella nostra scala di numerazione. Archimede intraprese questo calcolo singolare per confutare alcune persone che, poco istruite della natura dei numeri e delle progressioni, sostenevano che nessun numero, per quanto grande fosse, potrebbe esprimere la quantità di grani d'arena sparsi sulle rive del mare. Per maggiormente far risaltare il loro errore, Archimede dimostrò che, supponendo i limiti dall'universo molto al di là di quelli che allora si supponevano, il sessantaquattresimo termine di una progressione geometrica decupla crescente era più che sufficiente per esprimere il numero dei grani di arena che potrebbe contenere l'universo.

Secondo Archimede, tutti i numeri si dividevano dueque in periodi o ordini di otto cifre, ch'ei chiamava *ottadi*. Questo metodo, come ci vien narrato da Pappo, fu molto perfezionato da Apollonio, che ridusse le *ottadi* a periodi di sole quattro cifre: il primo di questi periodi era quello delle *unità*, il secondo quello delle *miriadi*, o decine di migliaia, il terzo quello delle *doppie miriadi*, se. e così di seguito indefinitamente.

Apollonio era dunque in grado di scrivere tutti i numeri che possono essere espressi col nostro sistema di numerazione. Così, per esempio, se avesse voluto rappresentare la circonferenza del circolo che ha per diametro una diecina di migliaia dell'ottavo ordine, avrebbe scritto

$\gamma. \alpha, \upsilon\iota. \theta, \tau\theta\epsilon. \gamma, \theta\eta\theta. \zeta, \theta\lambda\beta. \gamma, \omega\mu\epsilon. \beta, \chi\mu\gamma. \gamma, \omega\lambda\beta. \zeta, \theta\upsilon.$

3 1415 9265 3589 7932 3846 2643 3832 7950.

Ci rimane soltanto a spiegare come i Greci rappresentassero le frazioni. Quando il numeratore della frazione era semplicemente l'unità, segnavano con un piccolo accento il numero del denominatore. Così, per esempio, γ' significa-

va $\frac{1}{3}$, δ' significava $\frac{1}{4}$; $\xi\delta'$ significava $\frac{1}{64}$, e così di seguito; ma la frazio-

ne $\frac{1}{2}$ aveva un carattere particolare come C, o < C, o K.

Quando il numeratore non era l'unità, il denominatore si poneva accanto al numeratore, ma un poco più alto come si fa pei nostri esponenti. Così

$$\alpha\xi\delta \text{ rappresentava } 1564, \text{ o } \frac{15}{64},$$

$$\zeta^{\rho\kappa\kappa} \text{ rappresentava } 7^{121}, \text{ o } \frac{7}{121}.$$

Parimente

$$\sigma\zeta\gamma.\gamma,\varphi\mu\delta^{\lambda\gamma.\alpha,\psi\sigma\zeta} = 2633544^{331776} = \frac{2633544}{331776}.$$

Quest'ultima frazione si trova nel quesito 46 del Libro IV di Diofanto.

Con un sistema così complicato di numerazione i calcoli erano luoghi e penosi, e vi è tutta la probabilità che le operazioni si eseguissero a mente. Il lettore potrà formarsi un'idea della loro difficoltà dagli esempj semplicissimi che siamo per esporre.

ESEMPJO DI ADDIZIONE

tratto dal Comento di Eutocio sulla misura del circolo di Archimede.

$\omega\mu\zeta.\gamma,\varpi\kappa\kappa$	847 3921
$\xi.\eta,\nu$	60 8400
<u>$\varpi\eta.\beta,\tau\alpha\alpha$</u>	<u>908 2321</u>

In quest'esempio, il metodo è abbastanza chiaro per non richiedere spiegazione alcuna: l'andamento è esattamente eguale a quello che si tiene nell'addizione complessa di lire, soldi e denari.

ESEMPJO DI SOTTRAZIONE

tratto dal Comento di Eutocio sulla misura del circolo di Archimede.

$\theta.\gamma,\chi\lambda\zeta$	93636
<u>$\beta.\gamma,\nu\theta$</u>	<u>23409</u>
<u>$\zeta.\tau\alpha\zeta$</u>	<u>70227</u>

Anco in quest'esempio si può eseguire senza difficoltà l'operazione, procedendo da destra a sinistra, ed è tanto chiamante di maggior vantaggio il tenere questo andamento, che difficilmente si può comprendere come i Greci avessero adottato un metodo contrario. Essi eseguivano tutte le loro operazioni da sinistra a destra.

ESEMPIO DI MULTIPLICAZIONE.

$$\begin{array}{r}
 \rho\nu\gamma \\
 \rho\nu\gamma \\
 \hline
 \alpha, \epsilon, \tau \\
 \epsilon, \beta, \gamma\rho\nu \\
 \tau\rho\nu\theta \\
 \hline
 \beta, \gamma, \nu\theta \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

I Greci scrivevano i prodotti parziali nella moltiplicazione senza alcun ordine apparente; ma siccome ognuno dei loro caratteri conservava il medesimo valore, qualunque fosse il posto che occupasse, il solo inconveniente che poteva risultare da questo metodo consisteva nel rendere l'addizione finale più laboriosa. Noi possiamo rappresentarci i dettagli della moltiplicazione precedente, tratta anch' essa da Eutocio, nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 \rho \times \rho &= 100 \times 100 = 10000 = \alpha\mathfrak{M} \\
 \nu \times \rho &= 50 \times 100 = 5000 = \epsilon, \\
 \gamma \times \rho &= 3 \times 100 = 300 = \tau;
 \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned}
 \rho \times \nu &= 100 \times 50 = 5000 = \epsilon, \\
 \nu \times \nu &= 50 \times 50 = 2500 = \beta, \gamma \\
 \gamma \times \nu &= 3 \times 50 = 150 = \rho\nu;
 \end{aligned}$$

e finalmente

$$\begin{aligned}
 \rho \times \gamma &= 100 \times 3 = 300 = \tau \\
 \nu \times \gamma &= 50 \times 3 = 150 = \rho\nu \\
 \gamma \times \gamma &= 3 \times 3 = 9 = \theta
 \end{aligned}$$

Prodotto totale

$$23409 = \beta, \gamma, \nu\theta$$

Le operazioni superiori, come la divisione e l'estrazione delle radici, di vengono talmente complicate, che ci sarebbe impossibile il farne conoscere l'andamento, senza entrare in particolarità troppo estese per questo Dizionario. Delambre ha unito alla traduzione francese delle opere di Archimede un saggio sull'aritmetica dei Greci, al quale rimandiamo quelli dei nostri lettori, cui una simile materia potesse interessare. Essi debbono ancora consultare la *Storia dell'Astronomia antica* dello stesso autore.

Prendendo per punto di partenza il perfezionamento introdotto da Apollonio nella numerazione greca, sarebbe assai verisimile il supporre che qualche altro matematico, colpito dai vantaggi della riduzione dei periodi di otto cifre di Archimede a periodi di quattro cifre, abbia cercato di ridurre ancora questi ultimi a un minor numero di cifre, e che per una serie di miglioramenti successivi si sia finalmente riconosciuto esser sufficiente il considerare i periodi di una sola cifra per potere esprimere tutti i numeri; ma non è accaduto questo: il nostro sistema numerico non è il risultato di una simile trasformazione successiva, poichè i Greci non si elevarono mai al di sopra del metodo di Apollonio.

Deve rincrescere che non si sappia a chi sia dovuta la bella invenzione della scala decimale, di cui non ostante sembra che l'idea primitiva appartenga agli Indiani. Da questi popoli infatti gli Arabi che ce l'hanno trasmessa dichiarano di averla ricevuta; e gli autori che hanno voluto dare un'origine puramente araba alla numerazione attuale, si sono patentemente ingannati. Senza dubbio questa

numerazione fu per lungo tempo familiare agli Arabi prima di penetrare nelle nostre contrade; ma sarebbe un accordare a questo popolo un onore, che egli stesso confessa esser dovuto ad un altro, l'attribuirgliene l'invenzione. Per verità Boezio, nel suo trattato *De Geometria*, ci fa sapere che alcuni pitagorici facevano uso nei loro calcoli di nove caratteri particolari, mentre gli altri si servivano dei segni ordinarii, cioè delle lettere dell'alfabeto; ed alcuni autori si appoggiano su questa asserzione per rivendicare in favore dei Greci un' anteriorità smentita da documenti irrefragabili. Ammettendo ancora che nella scuola di Pitagora si conoscesse un modo di esprimere i numeri simile al nostro, si può congetturare soltanto che fosse una di quelle cognizioni che Pitagora attinse dagl' Indiani, e che, comunicata da questo filosofo ad un piccolo numero di iniziati, rimase sterile nelle loro mani.

I dotti arabi sono tutti d' accordo sull' origine della loro aritmetica. Dai popoli dell' India confessano di avere preso, verso il decimo secolo dell' era nostra, i caratteri che chiamiamo cifre arabe, e che essi chiamavano cifre indiane. Questi caratteri sono presso a poco gli stessi di quelli di cui ci serviamo attualmente, ad eccezione dello zero, che presso di essi è seguatato con un punto (.). Il nome stesso dell' aritmetica presso gli Arabi, *hendesséh*, significa *scienza indiana*.

Nel numero degli aritmetici arabi si trova il celebre Avicenna, non meno famoso presso gli Orientali per le sue cognizioni matematiche che per la sua scienza medica. Questo dotto, il cui vero nome è *Abou-Aly Ébn-Syna*, ha composto un gran numero di opere di cui si terrà parola all' articolo che lo riguarda, e che per la maggior parte sono rimaste ignote agli Europei. Il sig. J. J. Marcel, antico direttore della stamperia nazionale al Cairo, e membro della commissione di Egitto, possiede nella sua biblioteca un manoscritto di Avicenna intitolato: *Ressalet futyhat àbouâb el-medresséh, fy beyân oussoul el hissâb ou-el-hendesséh*, che letteralmente significa: *Lettera che apre le porte dell' accademia per mezzo dell' esposizione delle radici del calcolo e dell' aritmetica*. Egli ha condiscusso, dietro le nostre preghiere, a tradurre un frammento enioso di questo manoscritto, che crediamo dover qui inserire, perchè può dare un' idea esatta del modo nel quale gli Arabi riguardavano l' aritmetica. Ecco il principio dell' opera.

« In nome d' Iddio clemente e misericordioso.

« Lode a Dio che ha creato l' universo e tutti gli esseri, che ha regolato col peso e colla misura tutte le sue ereazioni; egli ha creato e fatto nascere dal nulla i numeri e le cose, il tempo e lo spazio, e le diverse influenze dei numeri che modificano lo spazio e il tempo. Ha dotato l' uomo, figlio d' Adamo, della scienza dei numeri, affinchè per mezzo dei numeri potesse conquistare la potenza delle cose e dominare il tempo e lo spazio, ambedue abissi senza limiti, l' uomo che occupa su questa piccola terra uno spazio sì limitato, l' uomo che apparisce in questa bassa vita per un tempo circoscritto dentro limiti sì ristretti, in mezzo al mare immenso dei secoli, che si accavallano gli uni sugli altri. »

« Che la benedizione dell' altissimo Iddio, d' Iddio il cui numero è uno, discenda sul profeta prediletto, su Maometto, la missione del quale ha avuto luogo nel tempo prefisso, determinato irrevocabilmente dai calcoli sublimi della Provvidenza unica, e il nome del quale ha chiuso il numero dei profeti eletti da Dio. »

« Or dunque, comprendendo io che ignota all' uomo esiste una potenza soprannaturale e indefinita nei numeri, ho voluto comporre questo opuscolo. Che Iddio abbia misericordia del povero autore di questo libretto, come pure di quelli che lo leggeranno e ne faranno buon uso. »

« E primieramente sappi che qualsivoglia numero non è altra cosa che il nu-

mero 9, o un suo multiplo, più un eccesso; poichè i segni dei numeri non hanno che 9 caratteri e 9 valori, più il punto (zero) che per sé stesso non esprime nessun numero. »

« Se giungi a conoscere questo eccesso e il moltiplicatore novenario, conoscerai ancora il numero intero. »

« Qualunque multiplo novenario, se tu sommi insieme orizzontalmente i caratteri che lo compongono, senza aver riguardo al loro valore di posizione, ti darà necessariamente il numero 9, o solo, o estratto dal totale per mezzo di una operazione simile. Così,

18 dà	1 più 8 eguale a 9
27	2 più 7 9
36	3 più 6 9
45	4 più 5 9
ec.	ec. ec.

2763 dà	2 più 7 più 6 più 3 eguale a 18 che dà 9
3456	3 più 4 più 5 più 6 18 9
17847	1 più 7 più 8 più 4 più 7 27 9
ec.	ec. ec. ec.

« Ogni volta che sommando in tal modo i segni di un numero qualunque troverai 9 per risultato della tua operazione orizzontale, sii certo che questo numero è un multiplo di 9; in caso diverso, dopo avere estratto questo numero multiplo di 9, ti resterà un eccesso che varierà soltanto da 1 a 8. »

« Qualunque numero composto di segni dissimili cambia necessariamente di valore se si cambia l'ordine dei segni. Così 23 diviene 32, 164 può divenire 146, 416, 461, 614, 641, ec.; ma sappi ancora che tra il numero primitivo e il secondo, il terzo ec. non può mai esservi altra differenza che nove, o un multiplo di nove. »

« Così, 12 rovesciato farà 21, e la differenza sarà 9,

42	24	18 ossia 2 volte 9
85	58	27 . . . 3 volte 9
357	375	18 . . . 2 volte 9
id.	537	180 . . . 20 volte 9
id.	573	216 . . . 24 volte 9
ec.	ec.	ec. ec.

ADDIZIONE.

« Quando avrai sommato insieme differenti numeri, se vuoi assicurarti dell'esattezza della tua operazione, procederai in questo modo: 1° Somma orizzontalmente ognuno dei segni isolati, scrivi il numero trovato, se è inferiore a 9, e, se hai un numero maggiore di 9, somma di nuovo i suoi segni, e poni il risultato in una colonna laterale; somma quindi tutti questi eccessi, e scrivi sotto ciò che infine ti rimane, dopo avere ottenuto un numero inferiore a 9 sommando le cifre isolate come hai fatto di sopra. 2° Fai la stessa operazione sul totale che averi ottenuto per la somma risultante delle somme parziali, eseguendo l'addizione secondo il metodo ordinario; somma finchè tu abbia un numero inferiore a 9 ed avrai egualmente un eccesso. »

« Se la tua operazione era stata fatta bene la prima volta, i due eccessi saranno identici; altrimenti, la tua operazione era stata fatta male: ricomincia dunque con pazienza. »

« Osserva l'esempio seguente :

Addizione ordinaria				Prova
1147	somma delle cifre	13	seconda somma	4
381		12		3
16119		18		0
2345		14		5
9123		15		6
58		13		4
611		8		8
Totale	29784 .. somma delle cifre	30		30
	eccesso	3	 eccesso	3

SOTTRAZIONE.

« Per verificare se la tua operazione di sottrazione, fatta col metodo ordinario, è esatta, ecco il mezzo: 1.º Opera, come hai fatto di sopra, orizzontalmente sulla somma che hai dovuto sottrarre e su quella che hai avuto per residuo; somma gli eccessi e scrivi a parte l'eccesso finale; 2.º opera in egual modo sulla somma dalla quale hai sottratto, e se la tua sottrazione è esatta, i due eccessi saranno identici. »

« Osserva questo esempio :

Sottrazione				Prova
	2165 somma dei segni	14	eccesso	5
	1321	"	...	7
Residuo	844	16	...	7
	Somma degli eccessi		14	
	Eccesso finale			5

MOLTIPLICAZIONE.

« Quando tu hai moltiplicato una quantità per un numero qualunque, se vuoi riscontrare l'esattezza della tua operazione, e assicurarti di non aver commesso errore nessuno, seguendo il metodo volgarmente usitato, eseguirai la seguente verificaione: »

« 1.º Somma orizzontalmente, come hai fatto di sopra, i valori isolati delle cifre del tuo moltiplicando, in modo da estrarne per mezzo delle tue addizioni successive la cifra ultima inferiore a nove, che per maggior brevità chiamerò la *cifra radicale*. »

« 2.º Fai la stessa operazione sul moltiplicatore. »

« 3.º Moltiplica l'una per l'altra le due *cifre radicali* che avrai ottenuto. »

« 4.º Estrai la *cifra radicale* da questo prodotto. »

« 5° Estrai egualmente la *cifra radicale* dal prodotto che avevi ottenuto per mezzo dell'operazione ordinaria. »

« Se questa operazione era stata fatta bene e senza errore, queste ultime due *cifre radicali* debbono essere le stesse. »

« Osserva questo esempio:

Moltiplicando	275	1 ^a somma	14,	cifra radicale	5
Moltiplicatore	122	 id ..	5	 id ...	5
	550		prodotto		25 cifra radicale 7
	550				
	275				
Prodotto	33550	1 ^a somma	16		cifra radicale 7

DIVISIONE.

« E per verificare un'operazione nella quale avrai diviso un numero per un altro, terrai lo stesso metodo; e dopo avere estratto le *cifre radicali* dal *divisore* e dal *quoziente*, moltiplicherai questi due numeri l'uno per l'altro; la *cifra radicale* di questo prodotto dovrà essere la stessa di quella del tuo *dividendo*, se non hai commesso errore nella operazione ordinaria. »

« Del resto, sappi che le quattro operazioni precedenti non sono che la permutazione di numeri complessi, spesso suscettibili d'indurre in errore per la molteplicità dei segni e dei calcoli parziali che richiedono, in un numero semplice, di una sola figura, che vi si trova riposto come il uccello del dattero in mezzo al frutto, e che rappresenta perfettamente, in tutte le loro funzioni, i numeri nei quali è rinchiuso. Questo numero, per la sua semplicità, non è più suscettibile di errore come quello ch'ei rappresenta; ed io l'ho chiamato *cifra radicale*, perchè è effettivamente la *radice* degli altri numeri, e ce ne rende padroni, come lo siamo di un albero, avesse pure mille rami, quando ci siamo impossessati della sua radice; come ancora in una malattia siamo in grado di dominarne i sintomi i più complicati e i più allarmanti, quando si è conosciuta ed attaccata con successo la causa latente della malattia, e quando se n'è estirpata la radice. »

Fu verso il principio del XIII secolo che l'aritmetica araba cominciò a spargersi in Europa. La più antica opera composta da un cristiano su questa materia è l'*Abaco* di Leonardo Bonacci o Fibonacci, scritto nel 1202. Circa un secolo dopo, troviamo un'altra opera intitolata: *Algorithmus demonstratus*, e scritta da Giordano di Namur, al quale siamo pure debitori di un trattato di aritmetica, commentato quindi e pubblicato da Giacomo Fabre d'Étapes, poco dopo l'invenzione della stampa, nel XV secolo, col titolo: *Jordanus arithmeticae libri duodecim cum commentariis Jac. Fabri Stapulensis*, 1480. Il monaco Planudo, contemporaneo di Giordano, scrisse pure un'opera intitolata: *Aritmetica indiana*, o *maniera di calcolare secondo gl' Indiani*, della quale esistono anche oggi dei manoscritti. Intorno allo stesso tempo, Giovanni Halifax, più conosciuto sotto il nome di Sacro-Bosco, compose la sua aritmetica in versi latini, nella quale la forma delle cifre è già quasi identica a quella delle nostre.

Poco tempo dopo, la scienza dei numeri fece molti progressi, ai quali contribuirono grandemente Luca da Borgo, e Niccolò Tartaglia. In Francia, Clavius e Ramo; in Germania, Stifelio ed Heuschio; in Inghilterra, Buckley, Diggs e Recorde, possono esser citati come i principali aritmetici di questa prima epoca della scienza. Ma soltanto agli immensi progressi dell'algebra, operatisi negli ultimi due secoli, l'aritmetica deve il completo suo perfezionamento; e se adesso possiamo conside-

rarla in tutta la sua pienezza, ne siamo debitori a quegli uomini illustri che coltivarono con tanto successo, durante questa seconda epoca, la scienza dei numeri. Per maggiori particolarità sulla storia dei progressi dell'aritmetica, oltre le varie opere sparsamente citate in questo articolo, ed oltre quelle citate all'articolo *ALGEBRA*, pag. 116, il lettore potrà consultare ancora Heilbronner, *Historia matheseos universae*, Lipsia, 1742 in-4; Vossio, *De universae matheseos notione et constitutione*, Amsterdam, 1660, in-4; Saverien, *Histoire des progrès de l'esprit humain dans les sciences, savoir l'arithmétique, la géométrie, etc.* Parigi, 1766, in-8; Wallis, *Algebrae tractatus historicus et practicus*, Oxford, 1684, in-fol; e soprattutto l'articolo *Aritmetico* del sig. Peacock nell'*Encyclopaedia Metropolitana*, che è certamente il trattato più completo che sia stato ancora scritto sulla storia di questo ramo importante di matematiche pure.

1. I numeri si presentano prima di tutto all'intelletto umano come collezioni di unità (*Vedi ALGEBRA* 2). Gli antichi gli definivano ancora: come *la riunione di più unità*. Ma questa definizione incompleta non è realmente applicabile che ai numeri interi; e siccome questi numeri non sono i soli dei quali la scienza deve occuparsi, i moderni hanno inutilmente cercato di generalizzarla. Le definizioni di Wolf e di Newton, che si riducono a considerare i numeri come il *rapporto* di una quantità ad un'altra della medesima specie, presa per unità, contengono già implicitamente l'idea primitiva di *numero*; e salvo alcune piccole modificazioni segue lo stesso di tutte le altre, che però ci disporremo di riportare. I numeri, astrazione fatta da qualunque oggetto estraneo, sono un prodotto dell'intendimento e formano una classe particolare di realtà intellettuali; la loro definizione è dunque una vera *costruzione filosofica* che non è più del dominio della loro scienza; e non ci deve recar meraviglia se tutti i tentativi dei matematici sopra questo subbietto sono tornati a vuoto. Infatti, la sola filosofia può risalire all'origine degli oggetti primitivi delle scienze, come pure essa sola può spiegare i loro principj e legittimarne le leggi; questo è almeno l'ideale di questa *scienza delle scienze*, ed all'articolo *Filosofia della Matematica*, vedremo in qual maniera al giorno d'oggi essa preteende adempire questo alto ufficio. Il nostro scopo non potendo essere qui che di dare un'esposizione semplicemente elementare dell'aritmetica, dobbiamo contentarci delle seguenti volgari deduzioni, le quali ci sembrano sufficienti per farne conoscere il complesso ed i progressi.

2. L'*unità* è un oggetto qualunque preso per termine di paragone per tutti gli oggetti della medesima specie.

3. Un numero è la riunione di più unità. Così, quando indichiamo la lunghezza di uno spazio dicendo che vi sono *tre metri*, tre è un numero che esprime quante volte questo spazio contiene l'unità di lunghezza o il metro.

4. Ma il metro, o in generale qualunque unità di misura, può essere considerata come avente delle parti; non vi è dunque un'unità assoluta, e quelle di cui ci serviamo, per esempio, come

Il *franco*, per le monete,
Il *grammo*, per i pesi,
Il *metro*, per le lunghezze,
L'*oro*, per le superficie,
Il *litro*, per i liquidi,
L'*ora*, per i giorni,
ec., ec.,

sono necessariamente arbitrarie.

5. Considerata in se medesima, l'unità è l'opposto della *pluralità*, ed è l'*elemento* primo di qualunque collezione.

6. I numeri si possono ancora considerare indipendentemente dagli oggetti: si chiamano allora *numeri astratti*, all'opposto si chiamano *numeri concreti* quando esprimono degli oggetti determinati. Così *cinque* è un *numero astratto* fintanto che non si applica ad alcun oggetto; ma *cinque metri*, o *cinque grammi* è un *numero concreto*.

7. Siccome è evidente che, qualunque sieno le proprietà individuali del numero *cinque*, queste proprietà avranno sempre luogo, tauto che si esprimano metri, grammi o qualunque altra specie di oggetti, basta però il considerare i numeri astratti nella ricerca dei processi dell'aritmetica.

8. L'aritmetica si divide in due parti, di cui una ha per oggetto la *costruzione* dei numeri, e l'altra il loro *paragone*. Nella prima ci occupiamo a formare i numeri; nella seconda ricerchiamo, quando sono formati, le loro relazioni e i loro rapporti.

9. Il primo modo di formazione dei numeri è l'*addizione*. Aggiungendo primieramente l'*unità* con se medesima si forma il numero *due*; aggiungendo quindi l'unità col *due* si forma il *tre*, e così in seguito. Quando un numero è una volta formato, si rappresenta per mezzo di un carattere particolare o *cifra*, la quale serve a distinguerlo da tutti gli altri; così *due* vien rappresentato da 2, *tre* da 3, *quattro* da 4, ec., ec. Ma siccome si possono formare un'infinità di numeri, e sarebbe d'altra parte impossibile di avere per ciascuno di loro un carattere particolare, bisogna necessariamente trovare il mezzo di esprimere tutti i numeri con una quantità limitata di caratteri.

10. La prima operazione dell'aritmetica, sopra la quale riposa la sua esistenza, ha dunque per oggetto di rappresentare un numero qualunque con l'aiuto di altri numeri che si considerano come semplici, e che si rappresentano con segni particolari. Questa operazione si chiama *NUMERAZIONE*.

11. Nell'aritmetica attuale, i caratteri e i nomi adottati per rappresentare i numeri considerati come semplici sono i seguenti:

0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 .
zero , uno , due , tre , quattro , cinque , sei , sette , otto , nove .

12. Per esprimere tutti i numeri per mezzo di questi dieci caratteri, gli si attribuiscono due valori: l'uno assoluto, indicato dalla quantità di unità che essi contengono; l'altro relativo, determinato dal posto che essi occupano quando vengono scritti sopra una medesima linea orizzontale. Per esempio, 2 preso isolatamente esprime *due unità*; situato alla sinistra di un'altra cifra, esprime una quantità dieci volte più grande, o *due decine*, cioè come si è convenuto di chiamarlo in questo caso.

In generale, quando diverse cifre sono scritte le une accanto alle altre, come,

2 2 2 2 2,

la prima a destra, non ha che il suo valore assoluto; la seconda vale *dieci* volte più, la terza *cento* volte più, la quarta *mille* volte più, e così di seguito andando da destra a sinistra.

13. Si è dunque convenuto di chiamare *diecina* la riunione di dieci unità, e di contare per decine come si conta per unità, cioè di avere *una, due, tre*, ec., fino a nove decine; e per esprimerle, si vede che basta di situare al secondo posto la cifra che esprime il numero di queste decine; 60, per esempio, esprime sei decine, nel tempo che 6 solo non esprime che sei unità.

Il carattere o serve particolarmente a dare alle cifre il posto che esse devono occupare.

14. Si chiama *centinaja* la collezione di *dieci diecine*, *migliaja* quella di *dieci centinaja*; e si conta per centinaja e per migliaja come per unità e per diecine. Basta, dietro quello che abbiamo esposto, di situare al terzo o al quarto posto la cifra che indica il numero delle centinaja o delle migliaja per farle esprimere il suo doppio valore. Così, 500 indica CINQUE CENTINAJA, e 5000 CINQUE MIGLIAJA.

15. Ciò posto (imponiamo i nomi dei numeri conoscinti), per scrivere *seicento quarantacinque*, si osserverà che questo numero è composto di *cinque* unità semplici, di *quattro* diecine e di *sei* centinaja. Si sitnerà dunque la cifra cinque al primo posto, la cifra quattro al secondo, e finalmente la cifra sei al terzo, e 645 esprimerà il numero proposto.

16. Passato mille, si conta per *diecine di migliaja* e *centinaja di migliaja*; dieci centinaja di migliaja si chiamano un *milione*. Si conta quindi per *diecine di milioni* e *centinaja di milioni*; dieci centinaja di milioni si chiamano un *biglione*; dieci centinaja di biglioni un *triglione*, ec., ec. Si dà particolarmente il nome di *miliardo* al biglione. Così, per esprimere il numero *otto miliardi due cento milioni duecento ventiquattro mila cinque cento trentotto*, si scriverà:

8 200 2:4 538,

mettendo degli zeri in luogo delle unità di milioni e delle diecine di milioni le quali non si trovano nel numero proposto.

17. Per enunziare un numero scritto in cifre, bisogna dividerlo in periodi di tre cifre, andando da destra a sinistra, il primo periodo sarà quello delle *unità semplici*, il secondo quello delle *migliaja*, il terzo quello dei *milioni*, ec., ec.; ed allora basta di enunziare successivamente ciascun membro come se fosse solo, unendo al numero di unità che esso contiene il suo nome particolare. Per esempio, per enunziare il numero 8875648585607832506, si dividerà in membri di tre cifre, nella seguente forma

8, 875, 648, 585, 607, 832, 506;

ed osservando che l'ultimo membro è quello dei *quintilioni*, si leggerà *otto quintilioni, ottocentosettantacinque quadriglioni, seicentoquarantotto triglioni, cinquecento ottantacinque biglioni, secentosette milioni, ottocentotrentadue mila, cinquecentosei unità*.

18. È da osservarsi che in Italia e in Germania i numeri si enunziano con una piccola differenza dal modo che abbiamo esposto. Infatti dopo avere stabilito per le prime sei cifre a destra la stessa regola che abbiamo fissato noi pure, dividono gli Italiani le cifre di un numero qualunque in periodi di sei cifre l'uno ed enunziano ciascun periodo come se fosse un numero isolato colla stessa regola colla quale connozzano le prime sei cifre. I nomi dati ai periodi sono i seguenti per il primo *unità*, per il secondo *milioni*, per il terzo, *biglioni*, ec. Ma ognuno vede che questi nomi non corrispondono perfettamente al significato che abbiamo dato di sopra ai medesimi.

19. Da ciò che precede, si vede che non vi può esser numero, per quanto grande sia, che non si possa rappresentare per mezzo dei dieci caratteri, adottati, a che perciò il problema della numerazione è completamente risoluto.

Vedremo all'articolo NUMERAZIONE che si può egualmente rappresentare tutti i numeri impiegando più o meno di dieci caratteri, cioè prendendo una sola numerica qualunque differente da *dieci*.

20. I numeri essendo così costruiti in una maniera generale, la prima operazione

dell'aritmetica è l'*addizione*, dalla quale si deduce la *sottrazione*; dall'*addizione* si passa alla *moltiplicazione*, da cui deriva la *divisione*; e finalmente da ciò si arriva all'*elevazione alle potenze* ed alla sua inversa l'*estrazione delle radici*. (Vedi queste diverse parole, come pure le *FRAZIONI*).

21. I rapporti dei numeri ci danno le *PROPORZIONI* e le *PROGRESSIONI* (Vedi queste parole), e dalle diverse considerazioni che si può farne derivare nascono: la *REGOLA DEL TALE*, quella di *SOCIETÀ*, quella di *ALLIQUAZIONE*, quella di *SCOSTO D'INTERESSE*, di *FALSA POSIZIONE*; la regola *CONGIUNTA*, ed ancora, i *LOGARITMI*, considerandoli in una maniera puramente aritmetica. Vedi queste diverse parole.

ARITMOMETRO o ARITMOGRAFO. Istrumenti sopra i quali sono delineate delle divisioni logaritmiche, e che servono ad eseguire i calcoli aritmetici.

Poco tempo dopo la scoperta dei logaritmi *Edmondo Gunter*, astronomo inglese, ebbe l'idea di costruirli linearmente sopra una riga di legno o di metallo, per potere effettuare, con l'aiuto di un semplice compasso, tutte le operazioni che esigono l'impiego di questi numeri. Questa ingegnosa costruzione fu dopo poco perfezionata da *Wingate*, *Oughtred*, *Milburne*, e soprattutto da *Lambert*, che rese inutile l'uso poco sicuro del compasso, impiegando due righe in luogo di una. Prima di *Lambert*, *J. Biler*, nel 1696, aveva costruito due semicircoli che giravano l'uno sopra dell'altro, e portavano sopra le loro semicirconferenze i numeri, i seni e le tangenti. La riga logaritmica, o *riga che scorre*, in uso al giorno d'oggi, e che gl'inglesi chiamano ancora *scala di Gunter*, è il risultato di questi perfezionamenti.

Questo strumento, di un uso così semplice e altrettanto vantaggioso, restò per molto tempo ignoto in Francia; il primo tentativo fatto per introdurvelo è dovuto, per quanto crediamo, al Sig. *Jomard*, dell'Istituto. Dopo, la *scala di Gunter* ricevette un nuovo perfezionamento con la costruzione circolare dei logaritmi sopra due circonferenze concentriche, ciò che permette di ottenere una maggiore esattezza, rendendo tuttavia l'istrumento più portatile.

Se il circolo logaritmico non è divenuto in Francia di un uso tanto generale quanto la riga che scorre lo è in Inghilterra, ove i fanciulli apprendono a servirsene imparando a leggere, non si può attribuirlo che all'esecuzione difettosa di quelli fra questi istrumenti che finqui sono stati messi nelle mani del pubblico; poichè la minima inesattezza nelle divisioni, o nella centrazione rende il circolo logaritmico intieramente inutile. Non segue lo stesso dell'*aritmetometro* che abbiamo attualmente sotto gli occhi: questo è un vero istrumento di precisione, eseguito con tanta diligenza quanto i migliori circoli ripetitori, e sopra del quale si può trovare in un istante i risultati dei calcoli i più complicati dell'aritmetica.

Un deposito di questi *aritmetometri* essendo stabilito a Parigi presso gli editori *Dénain* del testo francese del nostro Dizionario, ci dispenseremo da maggiori dettagli sopra questa utile ed interessante macchina, che ognuno può al giorno d'oggi procurarsi. Si trovano egualmente al medesimo deposito dei modelli di circoli logaritmici di una maggiore dimensione per i calcoli superiori del catasto, del genio e della marina.

ARMATI (SALVINO DEGLI), fiorentino, inventore degli occhiali. Per lungo tempo erasi creduto che tale invenzione fosse dovuta a frate *Alessandro Spina* da Pisa; ma l'epitaffio, che leggevasi sulla tomba di *Armati*, lo indica positivamente come autore di questa invenzione. Rinerisce che nessuna particolarità intorno alla sua vita sia giunta fino a noi, sapendosi unicamente che morì nel 1317, che apparteneva ad una famiglia di banchieri, che uu suo nipote ottenne cinque volte una delle prime cariche della repubblica di Firenze, e che lasciò un figlio che morì nel 1333. Si consulti il *Supplimento della Biografia universale*, il *Mazzuchelli, Diz. di Mat.*, Vol. I.

Gli Scrittori d'Italia, Brescia, 1752-63, 3 vol. in 6 part. in-fol., e il Manni, *Degli Occhiali da naso*, Firenze, 1738, in-4.

ARMILLA (*Astron.*). Antico strumento del quale si servivano gli astronomi per le loro osservazioni. Le armille di Alessandria sono celebri per le osservazioni di Timocaride e di Eratostene, che servirono io seguito ad Ipparco per scoprire il cangiamento della situazione delle stelle fisse, ossia la precessione degli equinozi. Questo strumento probabilmente era composto di due circoli di rame fissati l'uno nel piano dell'equatore e l'altro in quello del meridiano, e forse di un terzo circolo mobile, presso a poco come l'astrolabio che Tolomeo descrisse nel suo Almagesto. Da lungo tempo un tale strumento è stato abbandonato.

ARMILLARE (*Sfera*) (*Astron.*). Riunione di diversi circoli di metallo, di legno, o di cartone, nel centro dei quali è posto un piccolo globo che serve a indicare la terra. Questi circoli sono stati immaginati per rappresentare i movimenti degli astri, secondo il sistema di Tolomeo, vale a dire nell'ipotesi che la terra sia immobile nel centro dell'universo. Sebbene il vero sistema del mondo sia in oggi fuori di qualunque disputa, pure la sfera di Tolomeo è la più usitata, come la più semplice; essa basta infatti per le nozioni elementari dell'astronomia e della geografia, e serve a spiegare i fatti apparenti del moto dei corpi celesti. Non si sa con certezza chi sia l'inventore della *sfera armillare*; alcuni scrittori ne hanno attribuita la prima idea a Talete, altri ad Archimede. Ma, per le testimonianze le più autentiche, è da credersi che sia dovuta ad Anassimandro. Il nome di *armillare* le è derivato dalla voce latina *armilla*, che significa *braccialetto*. Tutti i circoli che compongono questa sfera sono infatti fasce circolari assai somiglianti ai braccialetti.

1. Nella sfera armillare si distinguono dieci circoli: sei *massimi* e quattro *minori*. I circoli *massimi* sono quelli che passano pel centro della sfera, e che per conseguenza la dividono in due parti eguali, che si chiamano *emisferi*. I circoli *minori* sono quelli che non passano pel centro; essi dividono la sfera in due parti diseguali.

2. I circoli massimi sono (*Tab. XXXIII*): l'*orizzonte*, il *meridiano*, l'*equatore*, lo *zodiaco*, che comprende l'*eclittica*, e i due *coluri*.

3. I circoli minori sono: i due *tropici*, e i due *circoli polari*.

4. I dieci circoli della sfera servono a spiegare i movimenti degli astri, o a determinare la loro situazione. Noi passeremo dunque ad esporre successivamente l'uso particolare di ciascuno di questi circoli; ma prima dobbiamo rammentare che vi sono due specie di astri, cioè: le *stelle fisse* e i *pianneti*. Le stelle fisse sono astri che sembrano conservare sempre la stessa situazione tra loro, il che ha fatto dar loro l'epiteto di *fisse*. I pianeti, al contrario, cambiano continuamente di situazione gli uni rapporto agli altri e rapporto alle stelle fisse. Gli antichi, che ponevano il sole e la luna nel numero dei pianeti, ne contavano sette, cioè: il *Sole*, la *Luna*, *Mercurio*, *Venere*, *Marte*, *Giove* e *Saturno*. Oggi si contano undici pianeti principali: *Mercurio*, *Venere*, la *Terra*, *Marte*, *Giove*, *Saturno*, *Urano* (scoperto da Herschel nel 1781), *Cerere*, *Pallade*, *Giunone* e *Vesta* (scoperti recentemente dagli astronomi Piazzi, Harding e Olbers), e diciassette pianeti inferiori o satelliti, cioè: la *Luna*, satellite della Terra, i quattro satelliti di Giove, i sette di Saturno e i cinque di Urano. Quanto alle stelle fisse, il loro numero è immenso; e, per poter distinguere le principali, se ne sono formati differenti gruppi che si dicono *costellazioni*.

Si osservano nelle stelle e nei pianeti due specie di moti, il primo dei quali si effettua in ventiquattro ore da oriente in occidente, e si dice *moto diurno* o *giornaliero*: questo moto essendo presso a poco lo stesso in tutti gli astri, gli si dà ancora il nome di *moto comune*. Il secondo moto, opposto al primo, si fa da

occidente in oriente, e si dice *periodico* e *proprio*. Quando si tratta del sole, questo secondo moto si chiama *annuo*, perchè si eseguisce infatti nello spazio di un anno. La sua durata differisce per ogni pianeta, ed è talmente grande per le stelle fisse, che è stata necessaria un'immensa serie di osservazioni, per potere constatare in questi astri l'esistenza di un moto proprio.

Per concepire come questi due moti opposti possano convenire ai medesimi corpi, si può immaginare una rota che giri sul suo asse, e sulla quale una mosca cammini in un senso contrario a quello della rotazione; il moto comunicato alla mosca dalla rota può rappresentare il *moto comune* degli astri verso l'occidente, mentre il moto proprio della mosca può rappresentare il loro *moto proprio* verso l'oriente. Tuttavia si deve notare che questa complicità di moti non esiste che in apparenza, e che adesso noi descriviamo i fenomeni quali appaiono ai nostri sensi, e non quali sono in realtà.

Il moto diurno fa descrivere a tutti gli astri dei circoli paralleli, che hanno tutti per conseguenza lo stesso asse, che dicesi *l'asse del mondo*, e di cui i due poli sono pure i poli del mondo. Il polo che è nella parte del cielo visibile pei popoli dell'Europa si chiama *settentrionale*, *artico*, o *boreale*, e il polo che gli è opposto si chiama *meridionale*, *antartico*, o *australe*. Ciò posto, passiamo alla spiegazione dei circoli della sfera.

5. L'*Orizzonte* divide la sfera o il mondo in due parti eguali, una delle quali è visibile, e l'altra ci è nascosta a motivo della terra che la toglie ai nostri sguardi. La parte visibile si chiama l'*emisfero superiore*, e la parte invisibile l'*emisfero inferiore*. L'*orizzonte* è dunque rappresentato dal circolo che riposa sui quattro sostegni attaccati al piede della sfera. È necessario avere sotto gli occhi la figura della Tavola XXXIII, per comprendere esattamente quanto siamo per dire.

6. L'*asse dell'orizzonte* è una linea retta, la quale passa pel punto del cielo che rimane direttamente sopra la nostra testa, e pel punto diametralmente opposto che corrisponde ai nostri piedi: il primo di questi punti si chiama *zenit*, e il secondo *nadir*. Quest'asse passa pure pel centro della terra.

7. L'*orizzonte* serve a determinare il levare e il tramontare degli astri. Così, per esempio, si dice che il sole si leva quando si alza al di sopra dell'*orizzonte*, e che tramonta quando si abbassa al di sotto. Si distinguono varie specie di orizzonti; ma questa considerazione è estranea affatto alla sfera armillare. *Vedi Orizzonte*.

8. L'*orizzonte* si divide in due metà, una delle quali si chiama *orientale* e l'altra *occidentale*. Queste due metà sono separate l'una dall'altra dal meridiano.

9. Il *Meridiano* è un circolo massimo che passa pei due poli del mondo. Esso divide la sfera in due parti, chiamate *emisfero orientale* ed *emisfero occidentale*. Questo circolo, che è perpendicolare all'*orizzonte* e che passa pure per lo zenit e pel nadir, è stato inventato per determinare la metà del corso degli astri al di sopra dell'*orizzonte*. Gli si dà il nome di *meridiano*, perchè, quando il sole vi è giunto, è mezzogiorno per tutti quelli che hanno lo stesso meridiano, o più esattamente lo stesso semi-meridiano; mentre per quelli che hanno il semi-meridiano opposto è mezzanotte in quel momento.

10. Ogni luogo avendo necessariamente un meridiano particolare sul quale si trova il suo zenit e il suo nadir, è chiaro che vi ha un numero infinito di meridiani che vanno tutti a tagliarsi ai poli del mondo. Per distinguere uno di questi meridiani da tutti gli altri, bisogna aggiungerli, quando se ne parla, il nome del luogo al quale appartiene. Così si dice: il *meridiano di Parigi*, il *meridiano di Londra*, cc. Deve ancora osservarsi che con questa indicazione si sottintende un punto particolare di Parigi o delle altre città, il quale è ordinariamente l'osservatorio di tali città. In questa maniera, pel meridiano di Parigi,

s' intende il meridiano che passa per lo zenit dell' osservatorio. La linea corrispondente condotta sulla superficie della terra si chiama *meridiana*. Tutti i punti della meridiana sono i soli che abbiano lo stesso meridiano. I poli del meridiano si dicono l'*oriente vero*, e l'*occidente vero*, e sono i punti nei quali si leva e tramonta il sole nel tempo dell' equinozio.

11. L' *EQUATORE* è un circolo massimo che ha gli stessi poli e lo stesso asse della sfera, e che la divide in due emisferi, uno dei quali si chiama *settentrionale o boreale*, perchè contiene il polo di questo nome, e l' altro si dice *meridionale o australe*, per la stessa ragione. Questo circolo si chiama *equatore*, perchè, quando il sole occupa uno de' suoi punti, i giorni sono eguali alle notti per tutta la terra; ciò accade verso il 21 di Marzo e verso il 23 di Settembre, e a quest' epoca si dà il nome di *equinozio*. L' equatore taglia l' orizzonte in due punti che sono l'*oriente* e l'*occidente*. Questi punti sono i poli del meridiano.

Secondo questa definizione dell' equatore, si vede che esso è tagliato perpendicolarmente da tutti i meridiani, poichè tutti i meridiani passano pei suoi poli.

12. L' *ECCLITTICA* è un altro circolo massimo che taglia obliquamente l' equatore, e fa con esso un angolo di circa $23^{\circ} 28'$. Quest' angolo si dice l'*obliquità dell' ecclittica*. L' ecclittica occupa il mezzo di una fascia chiamata *Zodiaco*, che ha una larghezza dai 16 ai 18 gradi. Il sole non si allontana mai dal circolo dell' ecclittica, nel cammino ch' ei sembra percorrere col suo moto proprio; ma i pianeti se ne allontanano, ora verso un polo ora verso l' altro, gli uni più gli altri meno. Per questo motivo gli antichi astronomi hanno formato lo zodiaco, al quale hanno dato una larghezza sufficiente, perchè potesse contenere le orbite dei pianeti che conoscevano.

13. L' ecclittica, o piuttosto il suo piano, formando un angolo col piano dell' equatore, gli assi di questi circoli formano necessariamente lo stesso angolo, e per conseguenza il polo dell' ecclittica è distante di $23^{\circ} 28'$ da quello dell' equatore.

14. Lo zodiaco si divide in dodici parti eguali, che si chiamano *segni*. Ogni segno ha un' estensione di 30° , poichè il circolo intero si suppone diviso in 360° . I nomi di questi segni, come pure le epoche dell' anno in cui pare che il sole vi giunga, sono:

♈ l' <i>Ariete</i> ,	21 Marzo.
♉ il <i>Toro</i> ,	20 Aprile.
♊ i <i>Gemelli</i> ,	21 Maggio.
♋ il <i>Cancro</i> ,	22 Giugno.
♌ il <i>Leone</i> ,	23 Luglio.
♍ la <i>Vergine</i> ,	23 Agosto.
♎ la <i>Libbra</i> ,	23 Settembre.
♏ lo <i>Scorpione</i> ,	24 Ottobre.
♐ il <i>Sagittario</i> ,	23 Novembre.
♑ il <i>Capricorno</i> ,	22 Dicembre.
♒ l' <i>Aquario</i> ,	20 Gennaio.
♓ i <i>Pesci</i> ,	19 febbrajo.

15. Il sole sembra percorrere i primi tre segni durante la primavera, i tre successivi durante l' estate, gli altri tre durante l' autunno, e gli ultimi tre durante l' inverno.

16. Si chiamano *punti equinoziali* i punti in cui l'eclittica taglia l'equatore, e *punti solstiziali* i due punti dell'eclittica i più lontani dall'equatore. Questi quattro punti separano i segni di una stagione da quelli di un'altra.

17. I *Coluri* sono circoli massimi che si tagliano perpendicolarmente ai poli della sfera, ed uno dei quali passa per i punti equinoziali, e l'altro per i punti solstiziali: essi dividono lo zodiaco e l'equatore in quattro parti eguali. Si distinguono coi nomi di *coluro dei solstizj*, e di *coluro degli equinozj*, secondo i punti per i quali passano. Questi due circoli sono veri meridiani.

18. I *Tropici* sono due circoli minori paralleli all'equatore, i quali toccano l'eclittica nei punti solstiziali. Quello che è nella parte settentrionale si chiama *tropico del cancro*, e l'altro *tropico del capricorno*. Sono stati dati loro questi nomi, perchè toccano l'eclittica al principio dei segni del Cauro e del Capricorno.

Nel cammino che il sole sembra percorrere sull'eclittica, se si tien dietro al suo corso, partendo da uno dei punti in cui questo circolo taglia l'equatore, lo vediamo allontanarsi dall'equatore, descrivendo ogni giorno, in forza del suo moto diurno, dei circoli continuamente più piccoli e paralleli a quest'ultimo, o più esattamente delle porzioni di spirale presso a poco parallele. Giunto ad uno dei punti solstiziali, esso descrive il circolo tropico, quindi si avvicina nuovamente all'equatore, e dopo averlo oltrepassato se ne allontana per andare a toccare l'altro punto solstiziale, e tornar quindi ad avvicinarsene di nuovo. Per questa ragione si è dato il nome di *tropici* ai due circoli minori che il sole descrive quando si trova ai punti solstiziali, nei quali sembra che esso cominci a ritornare verso l'equatore, poichè la parola *tropico* viene dal greco *τρεπω*, io ritorno.

19. I punti del circolo dell'orizzonte, nei quali il sole si leva e tramonta nei nostri climi, quando descrive il tropico del Cancro, si chiamano l'*oriente* e l'*occidente d'estate*; e quelli nei quali si leva e tramonta quando descrive il tropico del Capricorno si chiamano l'*oriente* e l'*occidente d'inverno*.

20. I due *Circoli polari* sono descritti dai poli dell'eclittica, nel tempo che la sfera intera fa la sua rivoluzione intorno ai poli dell'equatore. Questi circoli sono dunque lontani dai poli del mondo di $23^{\circ} 28'$.

21. Oltre i circoli di cui abbiamo parlato, e che compongono la *sfera armillare*, ve ne sono altri la cognizione dei quali è indispensabile per l'astronomia e per la geografia. Si chiamano *circoli verticali*, *circoli di declinazione*, di *Intitudine*, e *circoli orari*. Vedi DECLINAZIONE, LATITUDINE, VERTICALE.

22. Ci resta a parlare delle differenti posizioni della sfera, indicate sotto i nomi di *sfera retta*, *sfera obliqua* e *sfera parallela*.

23. La *SFERA RETTA* è quella nella quale l'equatore taglia l'orizzonte ad angolo retto. Così tutti i popoli che sono sotto la linea equinoziale, o che hanno lo zenit sull'equatore celeste, hanno la sfera retta. In questa situazione, l'equatore, come pure tutti i circoli paralleli all'equatore, tagliano ad angolo retto l'orizzonte, e reciprocamente l'orizzonte taglia l'equatore e tutti i circoli paralleli all'equatore in due parti eguali. Tale è la sfera retta, ed eccome i suoi effetti principali. I giorni vi sono eguali alle notti in tutto il corso dell'anno: il sole passa due volte l'anno allo zenit, cioè il 21 di Marzo e il 23 di Settembre: i poli del mondo sono situati precisamente sull'orizzonte: il sole tramontando direttamente sotto l'orizzonte se ne allontana più presto che se tramontasse obliquamente, quindi il crepuscolo è più corto: i popoli che hanno questa sfera vedono tutte le stelle nello spazio di 24 ore.

24. La *SFERA OBLIQUA* è quella nella quale l'equatore taglia obliquamente l'orizzonte. Tale è dunque la posizione della sfera per tutti i popoli della terra,

ad eccezione di quelli che sono sotto l'equatore, o sotto i poli. I principali effetti che risultano da questa posizione della sfera sono i seguenti. Uno dei poli del mondo è sempre elevato al di sopra dell'orizzonte ed è sempre visibile, mentre l'altro è perpetuamente al di sotto e sempre invisibile; e l'altezza dell'uno è sempre eguale all'abbassamento dell'altro: il 21 di Marzo e il 23 di Settembre, il giorno è eguale alla notte: nella sfera obliqua boreale il giorno più lungo dell'anno è il 22 di Giugno, e il più corto è il 22 di Dicembre; il contrario avviene nella sfera obliqua australe: nella sfera obliqua boreale i giorni sono più lunghi delle notti dal 21 di Marzo fino al 23 di Settembre, e da questo giorno fino al 21 di Marzo dell'anno successivo i giorni sono più corti delle notti; il contrario ha luogo per la sfera obliqua australe: quelli che hanno la sfera obliqua hanno alcune stelle che non tramontano mai, e sono quelle la cui distanza dal polo elevato è minore dell'altezza di questo polo; altre stelle poi non compariscono mai sul loro orizzonte, e sono quelle la cui distanza dal polo depresso è minore dell'abbassamento di questo polo.

25. Finalmente la **SFERA PARALLELA** è quella nella quale l'equatore si confonde coll'orizzonte: essa ha luogo per due soli punti della terra, che sono i poli. Ecco le conseguenze più notabili di questa posizione. Il sole gira parallelamente all'orizzonte nello spazio di 24 ore: l'anno è composto di un sol giorno e di una sola notte, che sono l'uno e l'altra di sei mesi: lo zenit si confonde con uno dei poli del mondo, e il nadir coll'altro: le stelle non si alzano e non tramontano mai; quelle che sono sull'orizzonte vi rimangono sempre, quelle che sono al di sotto non compariscono mai.

È facile comprendere che, in queste tre posizioni della sfera, le apparenze dei movimenti celesti debbono essere continuamente differenti. Si vedano gli articoli **LEVARE, TRAMONTO, GIORNO NATURALE, GIORNO ARTIFICIALE**.

Per una maggiore istruzione sulla sfera armillare, oltre i diversi articoli di questo Dizionario, il lettore potrà consultare Rivard, *Traité de la Sphère et du Calendrier*, Parigi, 1836, in-8, 8^a edizione con note e aggiunte di Puissant; Lacroix, *Introduction à la connaissance de la sphère*, Parigi, 1832 in 18; detto, *Introduction à la géographie mathématique et physique*, Parigi, 1828 in-8; e generalmente tutte le introduzioni ai trattati di geografia.

ARMONICA (PROPORZIONE). Si dice che tre numeri sono in *proporzione armonica*, quando il rapporto geometrico di due di questi numeri è eguale al rapporto delle differenze di ognuno di essi col terzo. Per esempio, i numeri A, B, C saranno in proporzione armonica se si ha

$$A : C :: A - B : B - C (1)$$

il numero di mezzo B prende allora il nome di *medio armonico*.

Il valore di questo medio è dato per mezzo di quello degli estremi dall'espressione

$$B = \frac{2AC}{A+C} (2)$$

che si deduce facilmente dalla proporzione (1).

L'operazione indicata da questa espressione, e che consiste nel *dividere il doppio del prodotto degli estremi per la loro somma*, vien chiamata **DIVISIONE ARMONICA**, perchè contiene il principio della scala diatonica della musica. Per ben comprendere la generazione che di questa scala passiamo adesso ad esporre, è essenziale ridursi alla memoria le seguenti nozioni fondamentali.

1°. L'altezza di un tono qualunque è interamente determinata dal numero delle

vibrazioni che esso fa in un tempo dato, o dalla durata del tempo nel quale compie un dato numero di vibrazioni.

2^o. L'intervallo di due toni è espresso dal rapporto dei tempi nei quali questi toni fanno un medesimo numero di vibrazioni.

3^o. Due intervalli sono eguali, quando i tempi, nei quali i toni che formano questi intervalli fanno un medesimo numero di vibrazioni, formano tra loro una proporzione geometrica.

Ciò posto, indicando coll'unità il tempo che impiega un tono detto ut_1 , per fare un determinato numero di vibrazioni, si sa dall'esperienza che la frazione $\frac{1}{2}$ esprime rigorosamente il tempo in cui l'ottava di questo tono, cioè ut_2 , fa il medesimo numero di vibrazioni.

Prendendo il medio armonico tra 1 e $\frac{1}{2}$, facendo cioè $A=1$ e $C=\frac{1}{2}$, si otterrà $B=\frac{2}{3}$, e tale è il tono detto *sol*, o la quinta di ut_1 .

L'intervallo tra la quinta e l'ottava è una quarta: quest'intervallo è eguale a $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$, e si dice *fa*.

Il medio armonico tra ut_1 e *sol*, o tra 1 e $\frac{2}{3}$, è $\frac{4}{5}$, che è la terza maggiore, o *mi*.

Il medio armonico tra ut_1 e *mi*, o tra 1 e $\frac{4}{5}$, è $\frac{8}{9}$, che è la seconda maggiore, o *re*.

Il medio armonico tra *fa* e ut_2 , o tra $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$, è $\frac{3}{5}$, che è la sesta maggiore, o *la*.

L'intervallo tra la terza e la quarta è eguale a quello tra la settima maggiore e l'ottava; cosicchè ne risulta la proporzione

$$\frac{3}{4} : \frac{4}{5} :: \frac{1}{2} : x = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} : \frac{3}{4} = \frac{8}{15},$$

e per conseguenza $\frac{8}{15}$ è la settima maggiore, o *si*.

I sette toni della scala diatonica saranno dunque rappresentati dai termini della progressione

$$1, \quad \frac{8}{9}, \quad \frac{4}{5}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{3}{5}, \quad \frac{8}{15}.$$

$ut_1, \quad re, \quad mi, \quad fa, \quad sol, \quad la, \quad si.$

In questa serie si trovano i tre intervalli

$$\frac{ut_1}{re} = 1 : \frac{8}{9}, \quad \frac{fa}{sol} = \frac{3}{4} : \frac{2}{3}, \quad \frac{la}{si} = \frac{3}{5} : \frac{8}{15},$$

che sono eguali ognuno a $\frac{9}{8}$, e che chiamansi *toni maggiori*. I due intervalli

$$\frac{re}{mi} = \frac{8}{9} : \frac{4}{5}, \quad \frac{sol}{la} = \frac{2}{3} : \frac{3}{5}$$

sono eguali ognuno a $\frac{10}{9}$, e diconsi *toni minori*. Finalmente i due intervalli

$$\frac{mi}{fa} = \frac{4}{5} : \frac{3}{4}, \quad \frac{si}{ut_2} = \frac{8}{15} : \frac{1}{2},$$

eguali ognuno a $\frac{16}{15}$, si chiamano *semi-toni maggiori*.

L'intervallo tra il *semi-tono maggiore* e il *tono minore* si dice *semi-tono minore*, e quello tra il *tono maggiore* e il *tono minore* prende il nome di *comma*. Il primo è dunque rappresentato dal numero $\frac{25}{24}$, e l'altro da $\frac{81}{80}$.

Se si vogliono intercalare dei toni intermedj tra i toni primitivi della scala diatonica, per formare la scala che procede interamente per *semi-toni*, e che si chiama *scala cromatica*, si terrà lo stesso metodo, facendo uso degl'intervalli adottati dai musici. Infatti:

L'intervallo tra la quarta e la *settima minore* è una quarta, per conseguenza si ha la proporzione

$$ut_1 : fa :: fa : si bimmolle,$$

donde si ottiene *si bimmolle* $= \frac{9}{16}$.

L'intervallo tra la *sesta minore* e la *settima minore* è una seconda maggiore, e questa eguaglianza dà luogo alla proporzione

$$ut_1 : re :: sol diesis : si bimmolle,$$

donde si trae, facendo le opportune sostituzioni numeriche, *sol diesis* $= \frac{81}{128}$.

L'intervallo tra la seconda maggiore e la *quarta maggiore* è una terza maggiore, quindi si ha

$$ut_1 : mi :: re : fa diesis,$$

e per conseguenza *fa diesis* $= \frac{32}{45}$, che è la *quarta maggiore*, detta ancora *quinta falsa*, o *tritono*.

L'intervallo tra la seconda maggiore e la quarta è una *terza minore*, donde si ha

$$re : fa :: ut_1 : re diesis,$$

e quindi *re diesis* $= \frac{27}{32}$.

Finalmente l'intervallo tra *re* e *re diesis* è una *seconda minore*, e siccome quello tra *ut_1* e *ut_1 diesis* deve essere pure una *seconda minore*, per conseguenza si ha

$$re : re diesis :: ut_1 : ut_1 diesis,$$

donde si ottiene *ut_1 diesis* $= \frac{243}{256}$.

I do-li-ci toni della gamma cromatica completa, cioè: *ut*₁, *ut*, *diesis*, *re*, *re diesis*, *mi*, *fa*, *fa diesis*, *sol*, *sol diesis*, *lo*, *si bimmolle*, *si*, *ut*₂, avranno dunque per valori numerici

$$1, \frac{24}{256}, \frac{8}{9}, \frac{27}{32}, \frac{4}{5}, \frac{3}{4}, \frac{32}{45}, \frac{2}{3}, \frac{81}{128}, \frac{3}{5}, \frac{9}{16}, \frac{8}{15}, \frac{1}{2},$$

che tutti sono dedotti dal principio semplicissimo della *divisione armonica* dell'ottava. Ciò non ostante, dobbiamo dire che non tutti gli autori si trovano d'accordo sui valori dei toni intercalari; ma i precedenti sono generalmente adottati dai primi armonisti tedeschi.

ARO (*Metrolologia*). Unità delle misure agrarie nel nuovo sistema metrico francese. Questa unità consiste in un quadrato, il quale ha il lato di *dieci metri* di lunghezza, e per conseguenza una superficie di *cento metri quadrati*. L'*ettaro*, o *arpento metrico*, è composto di *cento ari*.

Siccome il rapporto dell'antica tesa di Parigi al metro è eguale a quello di 1 a 0,513074, perciò l'*aro* equivale a 26,3244929476 tese quadrate. Così, per convertire un numero qualunque di ari in tese quadrate, bisogna moltiplicare questo numero per 26,3244929476; e reciprocamente, per convertire un numero qualunque di tese quadrate in ari, bisogna dividere per questa stessa quantità il numero delle tese. In questa maniera si trova che un *ettaro* equivale a 2632,44929476 tese quadrate, e che l'antico arpent di Parigi, composto di 900 tese quadrate, equivale a 34,1887 ari, o, il che è lo stesso, a 3418,87 metri quadrati.

•• **ARPA DI GIORGIO** (*Astron.*). Costellazione moderna immaginata dall'astronomo Hell, per onorare Giorgio III re d'Inghilterra. Si veda l'opera di questo astronomo, intitolata: *Monumenta oere perenniora inter astro ponenda, primam Seren. Regi Angliæ Georgio III, olterum viro cel. F. W. Herschel*, Vienna, 1783, in-8.

• **ARICO** (*Astron.*). È un epiteto che deriva dal greco *ἄρκτος*, *Orso*, e che si dà al polo settentrionale, perchè l'ultima stella della costellazione boreale chiamata *Orsa minore* ne è vicinissima. Vedi *POLO*.

Il *Circolo polare artico* è un circolo minore della sfera, parallelo all'equatore, e distante dal polo circa 23° 28'. Come il circolo polare *ontartico*, che gli è opposto, è descritto dal polo dell'eclittica. Per ben comprendere la ragione per cui è stato immaginato questo circolo e quali effetti ne risultano, dobbiamo ricordarci che all'equatore tutti i giorni sono eguali alle notti, che partendosi dall'equatore, e andando verso il polo boreale, il giorno del solstizio di estate diviene più lungo a misura che cresce la latitudine, e che giunti al polo non si ha in tutto il corso dell'anno che un solo giorno e una sola notte, l'uno e l'altra di sei mesi. Per conseguenza deve esservi un circolo del globo, nell'emisfero settentrionale, nel quale il giorno del solstizio d'estate sia precisamente di ventiquattro ore, ed un circolo opposto nell'emisfero australe, nel quale il sole stia ventiquattro ore senza comparire sull'orizzonte. Il primo di questi circoli è il circolo *artico*, il secondo è il circolo *ontartico*.

Siano *P* e *p* (*Tab. XXXII, fig. 8*) il polo boreale e il polo australe della terra, *AB* l'equatore, e *OH, OL* le direzioni nelle quali il sole vibra i suoi raggi sulla terra nei solstizj d'estate e d'inverno. Noi non vogliamo adesso aver riguardo al moto *diurno* del sole intorno alla terra, poichè siccome il sole si trova sempre sul meridiano di qualche luogo, ciò che si dice rispetto al giorno e alla notte per un meridiano deve intendersi detto generalmente per qualunque altro meridiano; così, invece di supporre che il sole giri intorno alla terra, supporremo che rimanga sempre sul meridiano fisso *PBpA*, e che la rotazione diurna

della terra si accresca di una quantità eguale al moto giornaliero del sole sull'equatore, ossia alla differenza giornaliera dell'ascensione retta del sole; questa supposizione conserverà intatti gli effetti dei moti relativi, e non ci lascerà da considerare che l'avvicinamento e l'allontanamento del sole dall'equatore, ossia la sua declinazione, che è la causa dei fenomeni particolari del circolo polare artico. Ciò posto, si collochi il semicircolo OV (Tav. XXXII, fig. 9) sul circolo $PBpA$ in modo che il centro O cada in U , e che l'indice V sia sempre direttamente opposto al sole. Allora questo semicircolo coprirà tutte le parti della terra che non vedono il sole, e la rotazione intorno all'asse Pp porterà successivamente sotto OV quelle parti della terra per le quali si fa notte. MUm e NWn (Tav. XXXII, fig. 8) rappresentano la posizione del semicircolo OV nel solstizio d'estate e nel solstizio d'inverno; e MN e mn rappresentano il circolo artico e il circolo antartico. Ponendo ora OV in differenti situazioni, con un poco di attenzione si potranno fare le seguenti osservazioni.

1°. Nel solstizio d'estate (quando V è in U), tutti i circoli al di sopra di MN godranno della luce per ventiquattro ore continue, mentre tutti quelli al di sotto di mn si troveranno per lo stesso tempo nell'oscurità: ha luogo tutto l'opposto nel solstizio d'inverno.

2°. Negli equinozi (quando V è in A), tutti i circoli avranno il giorno per dodici ore, e per altrettanto tempo avranno la notte.

3°. Durante il passaggio dall'equinozio al solstizio d'estate (quando V si muove da A verso U), ad ogni momento qualche circolo al di sopra di MN emerge interamente alla luce, ed all'opposto qualche circolo al di sotto di mn comincia ad essere interamente coperto dall'oscurità; ed i circoli rimangono in tale stato, fintantochè il sole non ritorna nello stesso punto dopo il solstizio. Il contrario deve intendersi nel passaggio dall'equinozio al solstizio d'inverno (quando V si muove da A verso W).

4°. Nessun circolo tra MN e mn è interamente illuminato o interamente nell'oscurità.

Ciò posto, per trovare la durata della luce continua in un luogo qualunque al di sopra del circolo artico, vale a dire per trovare per quanto tempo in un dato luogo il sole fa il suo giro giornaliero intorno alla terra interamente al di sopra dell'orizzonte, si cercheranno in un almanacco le epoche avanti e dopo il solstizio d'estate, nelle quali la declinazione del sole è eguale alla distanza polare del luogo. Fra queste due epoche vi è perpetua luce. Per esempio, il capo nord della Nuova Zembla, che ha 75° di latitudine e per conseguenza una distanza polare di 15° , gode di una luce perpetua dal 1° Maggio al 12 Agosto. Per trovare il tempo della oscurità continua, si farà lo stesso per il solstizio d'inverno; così il luogo di sopra rammentato ha una perpetua oscurità dal 3 Novembre al 5 Febbraio.

La distanza del polo settentrionale dal circolo artico è eguale all'angolo HOH , che è la massima declinazione del sole, o l'*obliquità* dell'eclittica. La distanza del polo australe dal circolo antartico è la stessa. Questa distanza però cambia lentissimamente d'anno in anno, poichè l'*obliquità* dell'eclittica, che nel 1° Gennaio 1835 era di $23^\circ 27' 38'',81$, va diminuendo ogni secolo di $52'',1154$, ossia di circa un mezzo secondo ogni anno. Da ciò non dobbiamo per altro concludere che possa giungere un tempo in cui l'eclittica si confonda coll'equatore, poichè pei calcoli di Laplace si sa che la diminuzione di obliquità non continuerà eternamente, ma andrà rallentandosi a poco a poco, a misura che ci avvicineremo a quel termine lontano di stazione, dopo il quale l'inclinazione tornerà nuovamente a crescere. Da questi medesimi calcoli risulta che la variazione dell'*obliquità* non può eccedere 3° ; così i limiti di questa lenta oscillazione dell'asse terrestre sono molto ristretti.

La parte della terra che è compresa tra il polo artico e il circolo polare artico si chiama *zona frigida settentrionale*; come si chiama *zona frigida meridionale* la parte della terra compresa tra il circolo polare antartico e il polo antartico. *Vedi Zona.*

Il circolo artico e il circolo antartico, nella sfera celeste, occupano rispetto ai poli la stessa posizione che gli stessi circoli occupano sul globo terrestre. Così un viaggiatore che percorresse il circolo artico avrebbe sempre qualche punto del circolo artico celeste direttamente sul suo capo, ossia al suo zenit.

Anticamente il *circolo artico* aveva un significato differente da quello che gli si dà in oggi, e che di sopra abbiamo esposto. I Greci intendevano per *circolo artico* il parallelo all'equatore, che è tangente all'orizzonte, che rimane interamente al di sopra di questo circolo, e che per conseguenza separa quei paralleli che sono sempre al di sopra da quelli che si trovano in parte al di sopra e in parte al di sotto dell'orizzonte. Similmente il *circolo antartico* (se questa espressione fosse stata in uso presso gli antichi) sarebbe stato il parallelo all'equatore che tocca l'orizzonte, che rimane tutto al di sotto di questo circolo, e che per conseguenza separa quei paralleli che sono sempre al di sotto da quelli che sono in parte al di sopra e in parte al di sotto dell'orizzonte. Così ogni differente latitudine aveva un differente circolo artico; e siccome nella latitudine, nella quale fu dapprima coltivata l'astronomia, l'Orsa maggiore toccava precisamente il mare senza immergersi, così da questa costellazione ricevè il suo nome il circolo artico.

ARTIFICIALE (*Astron.*). In astronomia si chiama *sfera artificiale* il globo col quale si rappresenta la volta concava del cielo, e la superficie convessa della terra. Chiamasi pure così la sfera armillare.

L'*orizzonte artificiale* è la stessa cosa che l'*orizzonte razionale* o *matematico*, che passa pel centro della terra: esso è diverso dall'*orizzonte sensibile* che varia per ogni osservatore secondo la sua maggiore o minore altezza. *Vedi Orizzonte.*

Il *giorno artificiale* è l'intera durata di ventiquattro ore, in opposizione al *giorno naturale*, che è il tempo della presenza del sole al di sopra dell'orizzonte.

Talvolta si dà il nome di *numeri artificiali* ai seni, alle tangenti e alle secanti.

ARTIFICIALE (*Occhio*). *Vedi Occhio artificiale.*

ARTIGLIERIA, *ars tollendi*, da *ars*, *arte*, e dal gerundio di *tollere*, *alzare*, *lanciar da lungi*. Questo nome, che nel medio evo si usò per indicare le catapulte e le baliste che servivano all'attacco o alla difesa delle piazze, si applica in oggi espressamente alla teoria delle proiezioni che si eseguono per mezzo della polvere; questu nome si dà pure per estensione al corpo militare incaricato specialmente di dirigere il maneggio delle macchine destinate a quest'uso.

Considerata unicamente nel punto di vista storico della sua utilità militare, l'artiglieria ha fatti immensi progressi dall'epoca in cui per la prima volta si applicò la scoperta della polvere all'arte della guerra. Questo mezzo terribile di distruzione, sull'origine del quale gli storici non sono perfettamente d'accordo, sia che se ne voglia attribuire l'invenzione a Ruggero Bacone, o a Bertoldo Schwartz, o a Costantino Anchtzen, esercitò una prodigiosa influenza, non solamente sulla tattica militare, ma ancora sull'intero ordine sociale. Le armi a fuoco hanno infatti contribuito alla caduta del sistema feudale assai più di tutte le speculazioni dei pubblicisti e della politica dei re, ai quali si vuole attribuire l'onore di una vittoria, che ha cambiato le forme della civiltà. Esse fecero sparire dal campo di battaglia la disuguaglianza dei gradi, ed in oggi le masse uniformemente armate vi decidono la sorte degli imperi assai più che il coraggio personale. Così quando

l'armatura difensiva dei cavalieri fu divenuta impotente a garantirgli contro l'attacco anco lontano di un oscuro fante, la cavalleria cessò di essere una istituzione dominante; e spogliata ormai dell'antico prestigio della sua superiorità perdè ben presto i suoi privilegi, abbandonando la primitiva sua forma. Nientedimeno l'artiglieria non uscì che lentamente dallo stato d'infanzia, ed anco lungo tempo dopo i suoi primi saggi, l'assurdo pregiudizio, che sembrava interdire, come una occupazione bassa e vile, lo studio delle scienze alle persone di nascita elevata, fece che i governi abbandonassero a mani inabili la direzione di questa nuova arme. Ma la preminenza militare, che essa non tardò ad assicurarle alle nazioni che ne adottarono l'uso, doveva determinare presto o tardi una rivoluzione completa nella tattica.

La storia della scienza ha per iscopo piuttosto di constatare i risultati che di abbandonarsi a minute indagini sopra origini dubbiose. Ci sembra dunque di poca importanza il decidere se siano i Veneziani, nel 1336, all'assedio di Clodia-Fossa, ovvero gl'Inglesi alla battaglia di Crécy, nel 1346, che i primi abbiano fatto uso della polvere per mezzo di macchine alle quali in seguito si è dato il nome di cannoni. È certo però che quest'arme micidiale non cominciò veramente a far parte del materiale della guerra, che nella seconda metà del XV secolo. I cannoni di cui si faceva uso in quel tempo erano formati di sbarre o lastre di ferro, congiunte insieme per la loro lunghezza, e tenute ferme per mezzo di cerchi di ferro. Si ponevano quasi a fior di terra sopra grossi tavoloni, il che dimostra che s'ignorava affatto l'arte di dirigerne il fuoco. Questa rozza maniera di servirsi dei cannoni pose spesso a grave rischio la vita degli artiglieri, e fece in principio trascurare una scoperta, l'uso della quale presentava pericoli così grandi, senza condurre a risultati molto decisivi. Il getto di cannoni di ferro e di un enorme calibro, che con gran fatica si trasportavano sopra grossi carri, non permise di migliorarne il maneggio; cosicchè non si faceva uso di quest'arme che negli assedii, dove rimpiazzava con vantaggio le antiche baliste. In quell'epoca non si adopravano generalmente ancora che progetti di pietra; le macchine più portatili, delle quali si armarono i soldati a piedi, come la spingarda, non si caricavano con progetti di altra specie. Il cavaliere Bayard fu ucciso nella ritirata di Rebecro, il 30 Aprile 1524, da un colpo di pietra lanciata da un archibuso. Ciò non ostante, fino dai primi anni del XVI secolo, si cominciò a perfezionare il getto dei cannoni, e a collocarli sopra un apparecchio speciale, chiamato *affusto*, che ne facilitò moltissimo il maneggio. I primi modelli di questi nuovi carri furono in principio rozzi e pesanti; il loro trasporto difficile e costoso impediva il cammino delle armate, e spiega la lentezza colla quale si eseguivano in quel tempo i grandi movimenti militari. Questi primi saggi furono successivamente seguiti da importanti miglioramenti nel materiale dell'artiglieria, dei quali uno dei più decisivi fu la fabbricazione di cannoni di un calibro minore, ottenuti mediante la fusione di rame e di stagno uniti insieme in date proporzioni. Questi progressi dell'artiglieria, che furono dovuti meno all'esperienza che alle cognizioni matematiche, le quali si applicarono alla fabbricazione e all'uso delle macchine, decisero finalmente della superiorità di quest'arme, la cui direzione non potè più essere affidata che ad ufficiali istruiti, che sono divenuti il fiore delle armate europee. Nulladimeno l'alto grado di perfezione al quale è giunta l'artiglieria, sebbene suscettibile ancora di riforme e di progressi, non si è ottenuto che in un'epoca molto recente, e per così dire ai nostri giorni.

La costruzione degli apparecchi dell'artiglieria, e l'arte di dirigerne l'uso, presentano poche differenze presso le diverse nazioni dell'Europa. Queste differenze, se esistono, riguardano o il calibro dei cannoni, o le condizioni del ma-

teriale. Gli uffiziali d'artiglieria di tutta la Germania si fanno distinguere per una profonda istruzione, come ce ne fanno fede le opere dei Decker, dei Hauser, dei Leitfaden, dei Neander, degli Struensee ec.; gli uffiziali di questo stesso corpo Inglesi e Russi lasciano, al contrario, molto a desiderare su questo punto; e noi non crediamo di lasciarsi ingannare da un eccessivo spirito nazionale, dicendo che il corpo di artiglieria francese, tanto nel rapporto dell'istruzione degli uffiziali quanto in quello del materiale, ha da lungo tempo acquistato una superiorità incontestabile che ha saputo conservare. Un gran numero di sotto-uffiziali e di soldati di questa milizia sono giunti in Francia a gradi elevati e sono divenuti eccellenti generali, il che non è avvenuto presso nessun'altra nazione d'Europa.

La teoria dell'artiglieria, che deve essere l'oggetto speciale dei nostri lavori, riposa sull'applicazione di diversi rami delle scienze matematiche e fisiche. Essa richiede soprattutto una cognizione profonda della teoria delle curve e della meccanica; essa esige studj estesi in geometria, nelle arti grafiche, in chimica, e in fisica propriamente detta. Noi esporremo altrove sotto tutti questi rapporti scientifici, e in tutti i dettagli che esso richiede, questo ramo importante della tattica (*Vedi BALISTICA*). Frattanto sulla storia dei progressi dell'artiglieria il lettore potrà consultare Glenie, *History of Gunnery*, Londra, 1776, in-8; e, in quanto alla teoria e alla pratica dell'artiglieria, troverà nel *Dizionario d'Artiglieria* di Arnò e Carbone, Torino, 1835 in-4, un esteso elenco delle migliori opere scritte su questa materia.

ARTIMONE (*Morina*). Albero di mezzana, o terzo albero di un vascello; esso dà il suo nome alla vela che vi è attaccata.

ARTO (*Astron.*). Nome dato dai Greci alle due costellazioni dell'emisfero settentrionale, che noi chiamiamo *Orsa maggiore* e *Orsa minore*. *Vedi ORSA*.

ARTOFILACE (*Astron.*). Da ἄρτος, *Orsa*, e da φύλαξ, *custode*, cioè *Custode dell'Orsa*. Si dà qualche volta questo nome alla costellazione che si trova in vicinanza dell'Orsa maggiore e dell'Orsa minore, e che più comunemente si chiama *Boote*. *Vedi BOOTE*.

ARTURO (*Astron.*). Da ἄρτουρος, *Coda dell'Orsa*, parola formata da ἄρτος, *Orso*, e da οὐρα, *coda*. Stella fissa di prima grandezza, situata nella costellazione di Boote, verso la quale sembra che si diriga la coda dell'Orsa maggiore.

Gli Arabi hanno dato a questa stella il nome di *ARABECH*. Si osserva in Arturo un moto proprio, cioè un rangiamento di luogo rispetto alle stelle circostanti, il quale produce una diminuzione tanto nell'ascensione retta quanto nella declinazione di questa stella, che per conseguenza viene lentamente trasportata verso il mezzogiorno. Dal 1800 al 1830 è stato calcolato che per effetto di questo moto proprio la declinazione di Arturo è andata diminuendo annualmente di 1".99, e la sua ascensione retta di 1".14.

Da ciò anticamente si traeva talvolta la conseguenza che Arturo fosse la stella più vicina al nostro sistema solare, essendo essa una delle stelle più brillanti, ed avendo un moto proprio così determinato. Ma questa opinione, che non era che una debole presunzione, è in oggi affatto abbandonata, perchè si conoscono stelle molto più piccole, come la μ di Cassiopea, che hanno moti proprii assai più sensibili.

ARZACHELL (*ABRAMO*), o *EIZARACHELL*, nato a Toledo nel XII secolo o verso la fine dell'XI, è uno dei più dotti e laboriosi astronomi che siano vissuti dopo i Greci e prima del rinascimento delle lettere. Arzachel ha lasciato un'opera sugli eclissi e sulle rivoluzioni degli anni, e molte tavole del cielo, alle quali è stato dato il nome di *Toletane*. Questi scritti, di cui l'ultimo deve essere stato certamente consultato dai redattori delle famose *Tavole Alfonsine*, non sono

alati mai tradotti, e non esistono che manoscritti in alcune biblioteche, nelle quali i dotti hanno potuto consultarli. Arzachel è stato più utile alla scienza pel numero considerabile di osservazioni che ha raccolto, all'oggetto di determinare gli elementi della teoria del sole, come il luogo del suo apogeo e la sua eccentricità. Egli fissò l'obliquità dell'eclittica, pel suo tempo, a $23^{\circ} 34'$. Quest'astronomo, che per lungo tempo ha goduto di una gran celebrità, professava la religione giudaica. S'ignora l'epoca precisa della sua nascita, come pure quella della sua morte. Si veda quanto sopra di lui ha scritto Montucla nella sua *Storia delle Matematiche*.

ASCENDENTE (*Astron.*). Si adopra questa parola in astronomia per indicare il moto che si fa salendo. Il *nodo ascendente* di un pianeta è il punto in cui esso attraversa l'eclittica passando dal mezzodì al nord, mentre il *nodo discendente* è il punto dell'eclittica pel quale il pianeta passa per andare dal nord al mezzodì. Il nodo ascendente della luna, chiamato ancora *anabibazon* (*Vedi ANABIBAZON*), si rappresenta col segno Ω ; il nodo discendente di questo stesso astro ha il segno opposto Ω .

Si chiamano *segni ascendenti* i primi tre e gli ultimi tre dello zodiaco, cioè: l'Ariete, il Toro, i Gemelli, il Capricorno, l'Aquario e i Pesci, perchè il sole, percorrendo questi segni, va sempre più elevandosi al di sopra dell'orizzonte nelle nostre contrade settentrionali, e sembra che salga verso lo zenit. Per la ragione contraria, gli altri sei segni sono chiamati *discendenti*. I segni *ascendenti* divengono *discendenti*, e viceversa, pei popoli che hanno il polo boreale al di sotto dell'orizzonte. Ciò non ostante, il nome di *ascendenti* è rimasto ai segni da noi accennati anco per quei paesi nei quali tali segni diverrebbero *discendenti*: cosicchè un astronomo che parlasse di segni *ascendenti* e *discendenti*, avendo riguardo unicamente all'innalzarsi e all'abbassarsi del sole, dovrebbe renderne avvertiti.

Si dà pure il nome di *ascendente* al punto dell'eclittica situato nell'orizzonte orientale, vale a dire al punto che si alza.

ASCENDENTE (*Aritm.*) Si chiama qualche volta *progressione ascendente* quella di cui termini vanno crescendo: tale è la *progressione aritmetica*

$$\div 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \text{ ec.,}$$

o la *progressione geometrica*

$$\div 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, \text{ ec.}$$

ASCENSIONALE (*Astron.*). Dicesi *differenza ascensionale* la differenza tra l'ascensione retta e l'ascensione obliqua di uno stesso punto della sfera. *Vedi ASCENSIONE*.

Essendo l'obliquità dell'eclittica, per l'anno 1840, $23^{\circ} 27' 36''$, si troverà facilmente per mezzo della trigonometria sferica che l'ascensione retta del primo grado del Toro è $27^{\circ} 54' 25''$, e che l'ascensione obliqua dello stesso grado sull'orizzonte dell'osservatorio delle Scuole Pie di Firenze, che è situato ad una latitudine settentrionale di $43^{\circ} 46' 41''$, è $16^{\circ} 41' 11''$: cosicchè, se si sottrae questa quantità dalla prima, il resto $11^{\circ} 13' 24''$ sarà la *differenza ascensionale*. Riducendo in ore e in minuti la differenza ascensionale, si conosce quanto i giorni dell'anno ai quali corrisponde questa differenza sono più lunghi o più corti del giorno dell'equinozio: infatti, aggiungenlo alle 12 ore del giorno dell'equinozio il doppio della differenza ascensionale ridotta in tempo, si ha la durata dei giorni nell'epoca in cui il sole percorre la metà dell'eclittica che è dalla parte del polo elevato; e togliendo invece questa stessa quantità dalle 12

ore, si trova la durata dei giorni nel tempo in cui il sole percorre i segni dell'eclittica che rimangono dalla parte del polo invisibile. Così, il doppio di $11^{\circ} 13' 24''$ essendo $22^{\circ} 26' 48''$, se si riduce questa gradazione a tempo alla ragione di un'ora ogni 15 gradi, si avrà un'ora, 29 minuti e 47 secondi, e il giorno in cui il sole entra nel primo grado del Toro sarà di 13 ore, 29 minuti e 47 secondi per l'orizzonte dell'osservatorio delle Scuole Pie di Firenze, non avendo riguardo agli effetti della refrazione.

Per trovare immediatamente la differenza ascensionale, essendo data la latitudine del luogo e la declinazione del sole, si farà la seguente proporzione: *il raggio sta alla tangente della latitudine del luogo, come la tangente della declinazione del sole sta al seno della differenza ascensionale*. E siccome nei segni settentrionali le ascensioni rette dei gradi dell'eclittica sono maggiori delle loro ascensioni oblique, mentre l'opposto ha luogo nei segni meridionali nei quali le ascensioni rette dei gradi dell'eclittica sono minori delle loro ascensioni oblique, così sarà facile, trovata la differenza ascensionale e conoscendo l'ascensione retta, il determinare l'ascensione obliqua. Infatti, se il sole è in uno dei segni settentrionali, si toglierà la differenza ascensionale dall'ascensione retta, mentre al contrario si sommeranno queste due quantità, se il sole si troverà in alcuno dei segni meridionali: il resto, nel primo caso, e la somma, nel secondo, saranno l'ascensione obliqua.

ASCENSIONE (*Astron.*). Arco di circolo, misurato sull'equatore, e compreso tra il punto equinoziale o il punto dell'equatore che si alza nel tempo medesimo di una stella o di un pianeta. L'ascensione si distingue in *retta* e *obliqua*.

L'**ASCENSIONE RETTA** di un astro è l'arco dell'equatore, contato secondo l'ordine dei segni, dal principio dell'Ariete fino al punto in cui l'equatore è tagliato dal meridiano dell'astro, o, il che è lo stesso, è l'arco dell'equatore compreso tra il punto equinoziale e il punto dell'equatore che passa al meridiano nel tempo stesso dell'astro; questo punto si leva nel tempo stesso dell'astro, nella sfera retta, e perciò questa ascensione ha preso il nome di *retta*.

L'**ASCENSIONE OBLIQUA** d'un astro è l'arco dell'equatore compreso tra il primo punto dell'Ariete, cioè il coluro degli equinozi, e il punto dell'equatore che si alza nel tempo stesso dell'astro, nella sfera obliqua. L'ascensione obliqua è dunque più o meno grande secondo la differente obliquità della sfera; mentre questa obliquità non esercita nessuna influenza sull'ascensione retta. La differenza tra queste due ascensioni si chiama *differenza ascensionale*.

La posizione di un astro è interamente determinata, nella volta celeste, quando è conosciuta la sua ascensione retta, come pure la sua distanza dall'equatore nel momento del suo passaggio pel meridiano: l'arco del meridiano che misura questa distanza si chiama *declinazione* dell'astro. L'*ascensione retta* e la *declinazione* sono dunque, per un astro, la stessa cosa che la *longitudine* e la *latitudine* per un luogo terrestre.

Non si può determinare l'ascensione retta di una stella fissa eho per mezzo di quella del sole; poichè siccome è il sole che col suo corso segna l'eclittica e fissa il punto equinoziale nel suo passaggio per l'equatore, così non si possono conoscere le distanze da questo punto equinoziale che per mezzo del sole che ne dà l'indicazione. Ma l'ascensione retta del sole si trova facilmente, come lo vedremo in breve, per mezzo della sua declinazione. Quando l'ascensione retta di una stella fissa è conosciuta, quella di tutte le altre stelle può dedursene senza alcuna difficoltà: così la determinazione dell'ascensione retta del sole è la base di tutta l'astronomia, poichè questa scienza non riposa che sulla determinazione esatta dei luoghi che le stelle occupano nella volta celeste.

Il moto proprio delle stelle fisse essendo quasi insensibile, la loro ascensione

retta e la loro declinazione variano pochissimo; mentre quelle del sole e dei pianeti variano ogni giorno di una quantità più o meno considerabile.

Per trovare la declinazione del sole, bisogna osservare la sua altezza meridiana nel giorno dato, e toglierne l'elevazione dell'equatore al di sopra dell'orizzonte: il resto è questa declinazione. Così, per esempio, a Parigi, dove l'altezza dell'equatore è di $41^{\circ} 10'$, se si trova che quella del sole è di $50^{\circ} 15'$, si concluderà che nello stesso istante la declinazione del sole è di $9^{\circ} 5'$. Conosciuta questa declinazione, si può calcolare facilmente l'ascensione retta che è uno dei lati del triangolo sferico rettangolo formato dal meridiano, dall'equatore e dall'eclittica. Con un esempio schiureremo questo modo di trovare l'ascensione retta.

PROBLEMA. *Essendo data la declinazione del sole, trovare la sua ascensione retta.*

Sia $ASPBE$ (Tav. XXXII, fig. 10) il meridiano, P il polo, AB l'equatore, SE l'eclittica, N il punto equinoziale, e S la posizione del sole: AS sarà la declinazione.

Tutti i meridiani essendo perpendicolari all'equatore, il triangolo sferico SAN è rettangolo in A : si conosce dunque in questo triangolo l'angolo retto SAN , l'angolo ANS che è l'obliquità dell'eclittica, e il lato AS o la declinazione osservata, e si tratta di calcolare il lato AN , vale a dire la distanza del punto equinoziale dal meridiano sul quale si trova il sole, ossia l'ascensione retta.

Ora, in qualunque triangolo sferico rettangolo, la tangente di un angolo sta alla tangente del lato opposto, come il raggio sta al seno dell'altro lato. Dunque nel nostro caso si ha

$$\text{tang } ANS : \text{tang } AS :: R : \text{sen } AN,$$

donde

$$\text{sen } AN = \frac{R \times \text{tang } AS}{\text{tang } ANS}.$$

L'obliquità dell'eclittica essendo presso a poco $23^{\circ} 28'$, se si suppone AS eguale a $9^{\circ} 5'$, si avrà

$$\text{sen ascensione retta} = \frac{R \times \text{tang } (9^{\circ} 5')}{\text{tang } (23^{\circ} 28')},$$

ed eseguendo l'operazione per mezzo dei logaritmi, si troverà

$$\begin{array}{rcl} \log R & = & 10,0000000 \\ \log \text{tang } (9^{\circ} 5') & = & 9,2037825 \\ \text{Somma} & = & 19,2037825 \\ \log \text{tang } (23^{\circ} 28') & = & 9,6376106 \\ \text{Differenza} & = & 9,5661719 \end{array}$$

Questo risultato è il logaritmo del seno di $21^{\circ} 36' 33'',3$, oppure del seno di $158^{\circ} 23' 26'',7$. Per sapere quale di questi archi convenga all'ascensione retta cercata, bisogna conoscere in qual quarto dell'eclittica si trova il sole; poichè, se è nel primo quarto, l'ascensione retta è di $21^{\circ} 36' 33'',3$; mentre, se è nel secondo, bisogna prendere il supplemento di quest'arco.

Si come l'ascensione retta si conta da occidente in oriente cominciando da zero, vale a dire dal punto equinoziale fino a 360° , cioè fino al ritorno allo stesso punto, si vede facilmente che, se il sole si trovasse nel terzo quarto dell'eclit-

tica, bisognerebbe aggiungere 180° a $21^\circ 36' 33'',3$, per avere la sua ascensione retta; come pure bisognerebbe togliere quest'ultimo numero da 360° per avere questa ascensione, se il sole si trovasse nell'ultimo quarto.

Confrontando i passaggi del sole pel meridiano con quelli di una stella, si determina l'ascensione retta della stella, e basta quindi quest'ultima per ottenere quelle di tutte le altre stelle, poichè la differenza delle ascensioni rette di due astri non è che la differenza dei tempi dei loro passaggi pel meridiano convertita in gradi. Infatti il moto diurno della sfera celeste facendo descrivere ad ogni punto di questa sfera 360° in 24 ore, o 15° in un'ora, due astri, uno dei quali passi pel meridiano, per esempio, 5 ore prima dell'altro, sono situati in due circoli di declinazione distanti l'uno dall'altro di cinque volte 15° , o di 75° , misurando questa distanza sull'equatore: ma questa distanza è nel tempo stesso la differenza delle loro ascensioni rette, dunque quando una di queste ascensioni è conosciuta, l'altra si ottiene per mezzo di una semplice addizione o di una semplice sottrazione.

Quando si osservano le altezze del sole per ottenere la sua declinazione, è indispensabile aver riguardo agli effetti della parallasse e a quelli della refrazione che concorrono a modificare queste altezze.

ASCHEMIO (*Astron.*). Da alcuni autori è così chiamata la stella di prima grandezza, più comunemente conosciuta col nome di *Prozione*, nella costellazione del Cane minore: questa stella si trova indicata nei cataloghi colla lettera α .

ASCHERIO (*Astron.*). È questo un nome che qualche volta si dà alla bella stella *Sirio* di prima grandezza, che si vede nella costellazione del Cane maggiore. Nei cataloghi, è segnata colla lettera α .

ASCI (*Astron.*). Da α privativa, e $\sigma\lambda\upsilon\varsigma$, ombra. Con questo nome, che è stato introdotto nella geografia da Varenio, s'indicano i popoli che qualche volta sono privi d'ombra a mezzogiorno. Gli abitanti della zona torrida divengono *Asci* due volte l'anno quando il sole si trova al loro zenit; quelli che abitano sotto i tropici lo sono una volta sola l'anno. Per distinguere gli uni dagli altri, Varenio chiama *Asci-Anfisci* i primi, e *Asci-Eterosci* i secondi. Vedi *ANFISCI*.

ASCISSA (*Geometria*), (da *ascindere*, dividere). Per determinare la posizione di un punto sopra un piano, si riporta a due rette AX , AY (*Tav. XXXV, fig. 1*), perpendicolari l'una sopra l'altra, e date di posizione sopra questo piano. Queste rette si chiamano gli *assi*, e particolarmente AX si chiama l'*asse delle ascisse*, ed AY l'*asse delle ordinate*. La distanza By o Az del punto B all'asse AY si chiama l'*Ascissa* di questo punto, e s'indica generalmente con la lettera x . La distanza Bx o Ay del medesimo punto B all'asse AX si chiama l'*ordinata* di questo punto, e si esprime generalmente con la lettera y .

L'*ascissa* e l'*ordinata* portano congiuntamente il nome di *coordinate*.

Se gli assi non sono perpendicolari l'uno sopra l'altro, ciò che è indispensabile in alcune questioni, allora le coordinate non sono più perpendicolari a questi assi, ma sono parallele, cioè: l'*ascissa* all'asse delle *ascisse*, e l'*ordinata* all'asse delle *ordinate*.

Le *ascisse* si contano generalmente sopra il loro asse: così, per indicare l'*ascissa* del punto B , prenderemo Ax e non By .

Quando una curva MN è riportata a due assi, e che la relazione dalle ascisse Ax , Ax' , Ax'' , ec. o, come comunemente si scrive, delle ascisse x , x' , x'' , ec., con le ordinate corrispondenti $x'y$, $x'y'$, $x''y''$, ec., o y , y' , y'' , ec., è data da un'espressione algebrica, questa espressione è ciò che si chiama l'*equazione della curva*. (Vedi *APPLICAZIONE dell'algebra alla geometria*.)

ASIMETRIA (da α privativa, da $\sigma\upsilon\upsilon$, con, e da $\mu\epsilon\tau\epsilon\rho\omega$, misura). Senza misura.

Difetto di proporzione fra le parti di un'oggetto, come per esempio fra il lato

Dis. di Mat. Vol. I.

di un quadrato e la sua diagonale, il di cui rapporto, quello di $1:\sqrt{2}$, non può essere espresso nè in numeri interi nè in numeri frazionari. Vedi INCOMMENSURABILITÀ.

ASINI (Astron.). Con questo nome vengono chiamate due stelle della costellazione del Canero, segnate nei cataloghi colle lettere γ e δ , e che sono della quarta o quinta grandezza. Tra queste due stelle si scorge una macchia luminosa che si chiama il *Presepio*, e che più comunemente è conosciuta col nome di *Nebulosa del Canero*. Queste due stelle rappresentano, secondo i poeti, gli asini che nella guerra di Giove contro i Giganti contribuirono alla di lui vittoria, o coi loro ragli, o col portare Vulcano e i Satiri che venivano in soccorso di Giove. Questo nome è molto antico poichè trovasi nell' *Almagesto* di Tolomeo.

ASINTOTICO (Geom.). Spazio asintotico. È quello spazio racchiuso fra una curva e il suo asintoto. Quantunque di una lunghezza indefinita, questo spazio è alcune volte finito; nel maggior numero dei casi, esso è infinitamente grande. Vedi IPERBOLA.

ASINTOTO (Geom.) (da *a* privativa, da *syn*, con; e da *πτω*, io cado, ciò che equivale a dire, che non s'incontra, o che non coincide). Linea retta che si avvicina continuamente ad una linea curva senza poterla incontrare, quando ancora si suppongano l'una e l'altra prolungate all'infinito, e che la loro distanza possa essere allora considerata come più piccola di qualunque quantità finita assegnabile.

Qualche volta si estende il termine di *asintoto* applicandolo ad alcuni rami di curve le quali non possano egualmente incontrarsi quantunque esse si avvicinino le une alle altre all'infinito. Così, gli asintoti possono dividersi in *retti* e *curvi*; ma quando non le si dà un significato diversamente determinato, la parola *asintoto* non indica che una linea retta.

La natura degli asintoti non può essere che difficilmente concepita dalle persone poco addomesticate con le costruzioni dell'alta geometria. Infatti, come comprendere che due linee possano avvicinarsi indefinitamente senza che possano toccarsi o coincidere? Questo mistero però si rende chiaro con facilità quando si esamina la generazione della curva chiamata *concoide*.

1. Sia MN (Tav. XXXV, fig. 4) una linea retta indefinita. Da un punto A situato al di fuori, si conducano le rette AB, Aa, Ab, Ac, Ad, ec., e si prendano le diverse parti CB, fa, gb, hc, id, ec., tutte eguali fra loro; la curva Babcde, che passa per le estremità B, a, b, c, d, e, ec., è la *concoide*, e la retta MN è il suo *asintoto*; poichè è evidente che la curva non può giammai toccare MN, quantunque ciascuno dei suoi punti a, b, c, d, e, ec, si avvicini ad MN continuamente.

2. Tutte le curve non sono suscettibili di avere degli asintoti, fra quelle del secondo grado, l'*iperbola* sola è in questo caso, e fra quelle dei gradi più elevati, le quali generalmente ne hanno diversi, si contano un gran numero di curve prive di questa proprietà. Determiniamo adesso gli asintoti dell'*iperbola* in generale ed alcune proprietà dei medesimi, e per il primo oggetto adotteremo il metodo seguito dal signor CAUCHY nelle sue lezioni d'Analisi.

Sia CR (Tav. XXXV, fig. 2) un ramo della curva, e GH il suo asintoto, che supponiamo non sia parallelo all'asse Ay; e sieno MP, NP, delle ordinate qualunque di queste linee, corrispondenti ad una medesima ascissa AP. Bisognerà che la distanza MN divenga piccolissima per dei valori grandissimi di x, e che essa si riduca ancora a zero quando faremo x infinito; dunque, se l'equazione dell'*asintoto* è

$$y = cx + d,$$

è necessario che si possa ricavare dall'equazione della curva un valore di y, la

di cui differenza con $cx+d$ divenga nulla quando x è infinito. Questo valore può dunque mettersi sotto la forma

$$y = cx + d + V,$$

V essendo una funzione di x , che diviene zero per $x = +\infty$ o per $x = -\infty$ secondo che il ramo della curva di cui si tratta è infinito dal lato delle x positive o dal lato delle x negative. Da questa equazione se ne trae

$$c = \frac{y}{x} - \frac{d+V}{x}, \quad d = y - cx - V.$$

Ora, quando x è infinito, le quantità V e $\frac{d+V}{x}$ divengono nulle: otterremo dunque c cercando ciò che diviene allora il rapporto $\frac{y}{x}$, dell'ordinata della

curva alla sua ascissa; e dopo aver determinato c si otterrà d cercando ciò che diviene la quantità $y - cx$, per il medesimo valore $x = \text{infinito}$. Allora, c e d essendo conosciuti, l'equazione dell'asintoto sarà $y = cx + d$.

Se con questo metodo si possono determinare diversi sistemi di valori reali e finiti per c e d , ciò farà conoscere che nella curva esisteranno diversi rami infiniti i quali avranno degli asintoti non paralleli alle ordinate. Facendo $x = +\infty$, si ottengono gli asintoti dei rami che sono infiniti dal lato delle x positive, e facendo $x = -\infty$ si ottengono quelli dei rami che sono infiniti nel senso delle x negative.

3. Per non tralasciare alcun'asintoto bisogna ancora cercare quelli che sono paralleli alle ordinate, e perciò basterà osservare che essi risultano dai valori non infiniti di x , che rendono infinita l'ordinata della curva.

Del rimanente rangiando in tutto quello che abbiamo detto, x in y , e y in x , si avrebbero tutti gli asintoti non paralleli alle ascisse: in guisa che si ritroverebbero tutti quelli che sono di già conosciuti, più quelli che sono paralleli alle ordinate, i soli che restano ancora da scoprire.

4. Applichiamo all'iperbola le regole precedenti. Si sa (*Vedi LINEE CURVE*, o *DISCUSSIONE*), che per questa curva i valori generali di y sono

$$y = ax + b + \frac{1}{2A} \sqrt{r^2 x^2 + 2px + q}$$

$$y = ax + b - \frac{1}{2A} \sqrt{r^2 x^2 + 2px + q}.$$

Supponiamo che si tratti dell'iperbola rappresentata dalla (*Tav. XXXV, fig. 3*): secondo che si fa crescere x fino a $+\infty$ o fino a $-\infty$, il primo valore di y determina l'arco $H'S$ o l'arco HR , ed il secondo valore di y determina l'arco $H'S'$ o l'arco HR' .

Per avere l'asintoto del primo arco, $H'S$, bisogna prendere in primo luogo il rapporto di y ad x , e cercare il valore di questo rapporto corrispondente ad $x = +\infty$. Ora abbiamo

$$\frac{y}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{1}{2A} \sqrt{r^2 + \frac{2p}{x} + \frac{q}{x^2}};$$

e facendo $x = +\infty$, viene

$$c = \text{Limite di } \frac{y}{x} = a + \frac{r}{2\lambda}.$$

Dopo aver trovato c , per aver d bisogna cercare il limite di $y - cx$. Abbiamo

$$\begin{aligned} y - cx &= ax + b + \frac{1}{2\lambda} \sqrt{r^2 x^2 + 2px + q} - \left(a + \frac{r}{2\lambda}\right)x \\ &= b + \frac{1}{2\lambda} \left(\sqrt{r^2 x^2 + 2px + q} - rx \right); \end{aligned}$$

ma non si vede ciò che diviene questa quantità quando x aumenta positivamente fino all'infinito: poichè la parte positiva e la parte negativa della parentesi divengono infinite nel medesimo tempo. Per eludere questa difficoltà, moltiplicheremo e divideremo la quantità dentro la parentesi per $\sqrt{r^2 x^2 + 2px + q} + rx$ ed avremo

$$\begin{aligned} y - cx &= b + \frac{(\sqrt{r^2 x^2 + 2px + q} - rx)(\sqrt{r^2 x^2 + 2px + q} + rx)}{2\lambda(\sqrt{r^2 x^2 + 2px + q} + rx)} \\ &= b + \frac{2px + q}{2\lambda(\sqrt{r^2 x^2 + 2px + q} + rx)} = b + \frac{2p + \frac{q}{x}}{2\lambda \left(\sqrt{r^2 + \frac{2p}{x} + \frac{q}{x^2}} + r \right)}. \end{aligned}$$

Sotto questa forma, si vede facilmente che facendo $x = +\infty$, viene

$$d = \text{Limite di } y - cx = b + \frac{p}{2\lambda r}.$$

Si mettano i valori trovati per c e d nell'equazione $y = cx + d$, ed avremo, per l'asintoto dell'arco $H'S$,

$$y = \left(a + \frac{r}{2\lambda}\right)x + b + \frac{p}{2\lambda r} \dots \dots (1).$$

Se si vuole l'asintoto dell'arco HR' , osserveremo che quest'arco è dato dal secondo valore di y , facendovi crescere x fino a $-\infty$. In questo caso si ha

$$\frac{y}{x} = a + \frac{b}{x} - \frac{1}{2\lambda x} \sqrt{r^2 x^2 + 2px + q}.$$

Si cangi x in $-z$, e quindi si faccia $z = +\infty$. Avremo

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= a - \frac{b}{z} + \frac{1}{2\lambda z} \sqrt{r^2 z^2 - 2pz + q} \\ &= a - \frac{b}{z} + \frac{1}{2\lambda} \sqrt{r^2 - \frac{2p}{z} + \frac{q}{z^2}}; \end{aligned}$$

dunque, per $z = +\infty$, c ha il medesimo valore che nell'altro caso, cioè:

$$c = \text{Limite di } \frac{y}{x} = a + \frac{r}{2A}.$$

Si trova similmente

$$\begin{aligned} y - cx &= ax + b - \frac{1}{2A} \left(\sqrt{r^2 x^2 + 2px + q} - \left(a + \frac{r}{2A} \right) x \right) \\ &= b - \frac{1}{2A} \left(\sqrt{r^2 x^2 + 2px + q} + rx \right) \\ &= b - \frac{1}{2A} \left(\sqrt{r^2 x^2 - 2px + q} - rx \right); \end{aligned}$$

e quindi, eseguendo la medesima trasformazione che sopra, e facendo di nuovo $z = +\infty$, si ha per d il medesimo valore che per il primo arco, cioè:

$$d = \text{Limite di } y - cx = b + \frac{p}{2Ar}.$$

Segue da ciò che i due archi $H'S$ ed HR' hanno i loro asintoti sopra una medesima linea retta, la quale è data dall'equazione (1).

Ragionando precisamente nella stessa maniera, si trova che i rimanenti due archi HR ed $H'S'$, hanno ancora i loro asintoti sopra una medesima retta, che ha per equazione

$$y = \left(a - \frac{r}{2A} \right) x + b - \frac{p}{2Ar} \dots \dots (2).$$

Le equazioni (1) e (2) possono scriversi sotto la seguente forma

$$y = ax + b + \frac{1}{2A} \left(rx + \frac{p}{r} \right),$$

$$y = ax + b - \frac{1}{2A} \left(rx + \frac{p}{r} \right),$$

ovvero riunendole in una sola, in questa maniera

$$y = ax + b \pm \frac{1}{2A} \left(rx + \frac{p}{r} \right) \dots \dots (3);$$

e questa forma fa conoscere meglio come gli asintoti possano dedrnsi immediatamente dai valori generali che esprimono l'ordinata dell'iperbola. Infatti se in questi valori, non si conservano sotto il radicale che i termini variabili $r^2 x^2 + 2px$,

se si completa il quadrato $r^2 x^2 + 2px + \frac{p^2}{r^2}$, e se si estrae la radice da questo qua-

drato, si avrà precisamente l'equazione (3).

5. I due asintoti si tagliano sopra il diametro dell'iperbola: poichè le ordinate di queste tre rette divergono eguali quando si pone

$$rx + \frac{p}{r} = 0,$$

6. Quando, nell'equazione generale del secondo grado, il coefficiente di y^2 non è nullo, i valori di y non contengono x per divisore: essi non possono dunque divenire infiniti che per un valore infinito di x ; per conseguenza non vi esiste allora alcun asintoto parallelo alle ordinate (n° 3).

Se $A=0$, allora l'equazione generale si riduce a

$$Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0,$$

dalla quale si ottiene un valore di y della seguente forma

$$y = sx + t + \frac{v}{Bx + D}.$$

Il metodo generale farà ben trovare un asintoto non parallelo alle y , rappresentato dall'equazione $y = sx + t$; ma vi è un altro asintoto che è parallelo alle y , e che si ottiene cercando, come abbiamo fissato al n° 3, qualche valore finito di

x che renda infinito y . Ora il valore finito $x = -\frac{D}{B}$ gode di questa proprietà;

per conseguenza esiste un asintoto parallelo alle y , il quale ha precisamente questo valore per ascissa.

Si sarebbe potuto ancora ottenere quest'ultimo asintoto col metodo generale, cambiando in tutti i calcoli x in y ed y in x .

7. Supponiamo adesso che l'equazione.

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

sia quella di un'iperbola riportata a due diametri coniugati qualunque (*l'edi Iperbola*); se ne deduce

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Se si fa astrazione dal termine $-a^2$, che si trova sotto il radicale, avremo due rette rappresentate dalle equazioni

$$y = +\frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x;$$

e queste rette saranno gli asintoti dell'iperbola. Ciò è evidente dietro la regola data alla fine del n° 4; ma si può dimostrarlo direttamente.

Per maggior chiarezza, non consideriamo sopra la curva e la retta che le parti situate nell'angolo yAx (*Tav. XXXV, fig. 6*) la differenza delle ordinate, corrispondenti ad una medesima ascissa, sarà

$$MN = \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}).$$

Siccome la parte positiva $+x$ e la parte negativa $-\sqrt{x^2 - a^2}$ crescono e divengono infinite nel medesimo tempo, non si riconosce subito se questa differenza va diminuendo. Ma una trasformazione conosciuta, e di già impiegata n° 4, dà

$$MN = \frac{b}{a} \times \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}};$$

ed allora si vede chiaramente che facendo crescere x fino all'infinito, MN diminuisce fino a zero.

Si può ragionare egualmente per le porzioni dell'iperbola comprese negli altri angoli, e si conclude che le due rette di cui si tratta sono infatti gli asintoti dell'iperbola.

8. Se si costruisce sopra i diametri coniugati un parallelogrammo $HH'K'K'$, le equazioni delle diagonali HH' e KK' , chiamando a' , e b' i semi diametri coniugati, sono

$$y = \pm \frac{b'}{a'} x;$$

dunque gli asintoti dell'iperbola coincidono con le diagonali del parallelogrammo formato sopra due diametri coniugati qualunque.

9. I lati HK , $H'K'$, condotti per le estremità del primo diametro BC , sono tangenti all'iperbola, e sono divisi in parti eguali ai punti B e C in guisa che si ha $BH = BK = b'$; dunque terminando la tangente ai punti ove essa incontra gli asintoti, si può dire che essa è divisa in due parti eguali dal punto di contatto e che essa è eguale e parallela al diametro coniugato di quello che termina a questo punto.

Segue da ciò che si può facilmente condurre la tangente in un punto B dell'iperbola, quando si conoscono gli asintoti. Infatti, se si conduce BQ parallela ad uno di essi, ad AH per esempio, che si prenda $QK = AQ$, e che si conduca la retta KBH , essa sarà la tangente cercata: poichè a motivo delle parallele BQ ed AH , si ha $BH = BK$.

Si può ancora, quando si dà un diametro che incontri la curva, trovare facilmente il suo coniugato: poichè, avendo condotto la tangente HK per una delle estremità di questo diametro, basterà di condurre la retta DE parallela ad HK , e di prendere $AD = AE = BH$.

10. La proprietà della tangente non è che un caso particolare di questo teorema generale: *Le porzioni di una secante qualunque, comprese fra l'iperbola e i suoi asintoti sono eguali fra loro.*

Si tratta dunque di dimostrare che $M'N' = MN$ (Tav. XXXV, fig. 5). Per il mezzo P di MM' e per il centro A , conduciamo il diametro Ax , e supponiamo che esso incontri l'iperbola al punto B : il suo coniugato Ay sarà parallelo ad MM' . Ora, se per il punto B si conduca fra gli asintoti la retta HK parallela ad Ay , si deve avere $BH = BK$; dunque Ax divide in parti eguali tutte le rette parallele a HK , comprese fra gli asintoti; dunque $NP = N'P$; dunque $NP - MP = N'P - M'P$; dunque $MN = M'N'$.

La dimostrazione sarebbe egualmente facile, se il diametro Ax non incontrasse l'iperbola.

Si ha adesso un nuovo mezzo semplicissimo di descrivere un'iperbola, quando si conosce un punto M e la posizione degli asintoti. Si conduce da questo punto una retta qualunque MMN' , che termini agli asintoti; e portando NM da N' in M' , il punto M' appartiene alla curva. Ripetendo questa costruzione si trovano tanti punti quanti se ne vogliono.

Per il tracciato, è comodo di non condurre tutte le linee da un solo punto M , e di far servire a quest'uso alcuni di quelli che si determinano. Si evita così la confusione che resulterebbe di un gran numero di linee che passano per un medesimo punto.

Si può impiegare questa costruzione quando si conosce la grandezza e l'angolo dei due diametri coniugati; poichè allora si conoscono due punti dell'iperbola, ed è facile di determinare gli asintoti.

11. Indicando con a e b i semi diametri coniugati AB ed AD, l'equazione dell'iperbola riportata a questi due diametri è

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2,$$

e quella dell'asintota AH è

$$y = \frac{b}{a}x.$$

Chiamando y ed Y le ordinate della curva e della retta, che corrispondono alla medesima ascissa AP, si ha

$$Y^2 - y^2 = \frac{b^2x^2}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = b^2;$$

ma $Y - y = MN$, e $Y + y = PM + PN = PM + PN' = MN'$; dunque per le parti MN ed MN' della secante NN', si ha

$$MN \times MN' = Y^2 - y^2 = b^2.$$

Se la secante fosse parallela al diametro $2a$, si farebbe vedere similmente che

$$MN \times MN' = a^2.$$

Dunque, quando una secante all'iperbola è parallela ad un diametro, il rettangolo delle parti di questa secante, comprese fra un punto della curva e gli asintoti è eguale al quadrato della metà del diametro.

Da ciò risulta un mezzo di trovare due diametri coniugati, quando si conosce la direzione di uno di loro Ay, gli asintoti e un punto della curva. Per il punto conosciuto M, si conduce fra gli asintoti NMN' parallela ad Ay; e il semi-diametro AD sarà media proporzionale fra MN ed MN'. Conoscendo AD, si conduce Ax per il centro A e per il mezzo P di NN'; si conduce ancora parallelamente ad Ax la linea DH che taglia l'asintoto in H; finalmente si conduce parallelamente ad AD, la retta HB, che si termina ad Ax in B: AB sarà il semi-diametro coniugato di AD.

La medesima proprietà serve ancora a trovare gli assi quando si hanno due diametri coniugati: poichè allora si conosce un punto dell'iperbola, si possono tracciare gli asintoti e avere la direzione degli assi dividendo in parti eguali gli angoli degli asintoti. Il rimanente si compie facilmente.

12. Le rette BQ, BR (Tav. XXXV, fig. 5), essendo condotte parallele agli asintoti, il triangolo ABR è eguale ad ABQ: ma i triangoli ABQ e BQK sono equivalenti, poichè AQ = QK; dunque il parallelogramma AQBR è equivalente al triangolo ABK. Ora questo triangolo è l'ottava parte del parallelogramma HKH'K', di cui l'area è costante, qualunque sia la posizione del punto B; dunque l'area del parallelogramma formato dagli asintoti dell'iperbola e dalle parallele condotte a queste linee, da un punto qualunque della curva, è costante, ed eguale all'ottava parte del rettangolo degli assi, o del parallelogramma costruita sopra due diametri coniugati.

Per ogni rimanente che riguardi gli asintoti dell'iperbola (Vedi IPERBOLA, IPERBOLA RIPORTATA AI SUOI ASINTOTI, E QUADRATURA DELL'IPERBOLA).

Passiamo adesso agli asintoti delle curve algebriche.

13. Sia come al N.º 2

$$y = cx + d$$

l'equazione di un'asintoto non parallelo alle ordinate. Dietro la definizione degli asintoti, l'equazione della curva deve dare un valore di y tale come

$$y = cx + d + V:$$

nella quale V è una quantità che diviene nulla quando si fa $x = \pm\infty$. Ora da questa eguaglianza si ricava prima $c = \frac{y}{x} - \frac{d+V}{x}$, $d = y - cx - V$; e quindi l'ipotesi di $x = \pm\infty$ dà

$$c = \lim. \frac{y}{x}, \quad d = \lim. (y - cx):$$

sono dunque questi limiti che bisogna determinare, ed è quello che faremo per le curve algebriche in generale.

Consideriamo dei polinomj qualunque in x ed y , e siano

$$U = Ay^p x^r + Cx^r y^q + \text{ec.}$$

$$U_1 = A'x^{p'}y^{q'} + B'x^{p''}y^{q''} \text{ ec.}$$

$$U_2 = A''x^{p'''}y^{q'''} + B''x^{p''''}y^{q''''} \text{ ec.,}$$

ec.

Supponiamo che tutti i termini di U siano del grado m , che quelli di U_1 siano del grado $m-1$, e così di seguito: le curve algebriche dell'ordine m potranno essere rappresentate dall'equazione

$$U + U_1 + U_2 + \text{ec} = 0 \dots (1).$$

Ciò stabilito, per avere c , è necessario fare $y = cx$ nell'equazione (1), e cercare il valore di c corrispondente ad $x = \pm\infty$. Ora, poichè i termini di U sono del grado m , è evidente che per la sostituzione di cx , essi conterranno tutti x^m ; egualmente quelli di U_1 conterranno x^{m-1} ; e così di seguito. Per abbreviare, facciamo

$$T = Ac^p + Ec^q + \text{ec.}, \quad T_1 = A'c^{p'} + B'c^{q'} + \text{ec.},$$

$$T_2 = A''c^{p''} + B''c^{q''} + \text{ec., ec.};$$

l'equazione (1) diverrà $Tx^m + T_1x^{m-1} + T_2x^{m-2} + \text{ec.} = 0$; ovvero, dividendo per x^m ,

$$T + \frac{T_1}{x} + \frac{T_2}{x^2} + \text{ec} = 0.$$

Adesso supponiamo $x = \pm\infty$, si ottiene

$$T = 0, \quad \text{o} \quad Ac^p + Ec^q + \text{ec} = 0 \dots (2);$$

e tale è l'equazione, le di cui radici reali saranno i valori del coefficiente c .

Conoscendo c passiamo alla determinazione di d . Nell'equazione (1) si faccia $y - cx = d$, o piuttosto $y = cx + d$; si rappresentino con T' , T'' , ..., T'_1 , T''_1 , ..., T'_2 , T''_2 , ..., ec., i polinomj derivati relativi a c di T , T_1 , T_2 , ec.; e l'equazione risultante ordinata rapporto ad x , sarà

$$Tx^m + (T'd + T_1)x^{m-1} + \left(\frac{T''}{1.2} d^2 + \frac{T'_1}{1} d + T_2 \right) x^{m-2} + \text{ec} = 0$$

La parte Tx^m è nulla dietro l'equazione (2). Sopprimendola, dividendo per x^{m-1} , quindi supponendo $x = \pm\infty$, rimane

$$T'd + T_1 = 0 \dots (3),$$

equazione che farà conoscere il valore di d corrispondente a ciascun valore di c .

Così gli asintoti non paralleli alle y sono determinati dalle equazioni (2) e (3). La prima, che determina c , dipende unicamente dai coefficienti del polinomio U ; e la seconda quella che determina d , si forma per mezzo dei soli polinomi U ed U_1 , senza niente prendere da quelli di un ordine inferiore.

Vi è però un'osservazione importante da fare. Può succedere che un valore di c faccia sparire dall'equazione $Tx^m+cx=0$ non solamente i termini in x^m , ma ancora quelli in x^{m-1} . In questo caso si divide per x^{m-2} , e si ha, per determinare d , l'equazione

$$\frac{T''}{1.2} d^2 + \frac{T'_1}{1} d + T_2 = 0,$$

la quale in generale, è del secondo grado.

Se succede che i termini in x^{m-2} spariscono ancora, si ricorrerà a quelli che contengono x^{m-3} ; e così di seguito.

Per non trascurare alcun'asintoto, bisogna non dimenticarsi di cercare quelli che sono paralleli alle y . Essi sono determinati dai valori di x che rendono y infinito: ora, supponendo che l'equazione proposta sia ordinata rapporto ad y , e che allora essa sia

$$Vy^n + V_1y^{n-1} + \text{ec.} = 0,$$

la divideremo per y^n , e si riconoscerà sul momento che i valori di x , per i quali abbiamo $y = \pm \infty$, sono dati dall'equazione $V = 0$.

14. **ESEMPIO I.** Sia l'equazione del secondo grado

$$Ay^2 + Bxy + Cy^2 + Dy + Ex + F = 0 \dots \dots (A),$$

bisogna cercare ciò che divengano in questo caso le equazioni (2) e (3). Per maggior facilità, osserveremo che T e T_1 , non sono altra cosa che i polinomi U ed U_1 , nei quali abbiamo soppresso x e cangiato y in c .

Ciò stabilito, avremo $U = Ay^2 + Bxy + Cy^2$, $U_1 = Dy + Ex$;

$$T = Ac^2 + Bc + C, \quad T_1 = Dc + E, \quad T' = 2Ac + B.$$

Quindi le equazioni (2) e (3) divengono

$$Ac^2 + Bc + C = 0, \quad (2Ac + B)d + Dc + E = 0$$

e se ne deduce

$$c = -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad d = -\frac{D}{2A} \pm \frac{BD - 2AE}{2A\sqrt{B^2 - 4AC}},$$

valori che sono equivalenti a quelli del n° 4. Mettendoli nell'equazione $y = cx + d$, si avranno gli asintoti.

ESEMPIO II. Sia l'equazione

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0.$$

In questo caso, si ha $U = y^3 + x^3$, $U_1 = -3axy$, $T = c^3 + 1$, $T_1 = -3ac$, $T' = 3c^2$; e le equazioni (2) e (3) sono

$$c^3 + 1 = 0, \quad 3c^2d - 3ac = 0$$

donde

$$c = -1, \quad d = -a,$$

dunque la curva ha un'asintoto di cui l'equazione è $y = -x - a$. Questo è rappresentato dalla retta GH (Tav. XXXV, fig. 6).

15. Le linee rette come abbiamo detto in principio non sono le sole che si possano prendere per *asintoti*. Per esempio, si possono considerare le curve che si chiamano *paraboliche*, di cui l'equazione è della forma $y = ax^2 + dx + e$, e proporsi di determinare $c, d, \dots$ in maniera che la curva parabolica si avvicini indefinitamente ad un'altra curva che sia data. Affine di meglio fissare le idee, ragionerò sopra la curva parabolica di cui l'equazione è

$$y = cx^2 + dx + e.$$

Perchè questa equazione rappresenti un'asintoto, bisogna che si possa ricavare dall'equazione della curva data un valore di y , di cui la differenza con la precedente sia nulla quando x è infinito; dunque questo valore deve essere della forma

$$y = cx^2 + dx + e + V,$$

V essendo una quantità che diviene zero, quando $x = \pm \infty$. Ora da ciò si ricava

$$c = \frac{y}{x^2} - \left(\frac{d}{x} + \frac{e}{x^2} + \frac{V}{x^2} \right),$$

$$d = \frac{y - cx^2}{x} - \left(\frac{e}{x} + \frac{V}{x} \right),$$

$$e = y - cx^2 - dx - (V);$$

e, quando si fa $x = \pm \infty$, le quantità comprese fra le parentesi divengono zero; dunque si ha

$$c = \lim \frac{y}{x^2}, \quad d = \lim \frac{y - cx^2}{x}, \quad e = \lim (y - cx^2 - dx).$$

In conseguenza, nell'equazione della curva data si farà $y = cx^2$, e si cercherà il valore di c corrispondente ad $x = \pm \infty$; quindi si farà $y - cx^2 = dx$, o $y = cx^2 + dx$, e si cercherà il valore di d corrispondente a $x = \pm \infty$; poi finalmente si farà $y - cx^2 - dx = e$, o $y = cx^2 + dx + e$, e si cercherà il valore di e che corrisponde a $x = \pm \infty$.

16. Il metodo stabilito fino a questo punto è sufficiente per determinare gli asintoti, ma vi sono diversi autori che li determinano con un metodo diverso, cioè considerandoli come i limiti delle tangenti; questo è quello che faremo attualmente e quindi l'applicheremo ad alcuni esempi.

Sia AYN (Tav. XXXV, fig. 7) un ramo di curva riportato a due assi rettilinei AX ed AY , e sia BM l'asintoto di questo ramo. Se si esaminano le diverse situazioni che può prendere una tangente Cy della curva, rapporto all'asintoto, si vede che più il punto di contatto y si allontana dall'origine A , più il punto C si avvicina al punto B ; come ancora il punto O al punto D . Così, anche d'altra parte è evidente che AC non può divenire più grande che AB , nè AO più grande che AD , AB ed AD sono dunque i limiti o le grandezze estreme dei valori continuamente più grandi che possono acquistare AC ed AO , a misura che la tangente Cy si riporta ad un punto di contatto sempre più lontano dall'origine A , o ciò che è la medesima cosa, si può confondere l'asintoto BM con una tangente di cui il punto di contatto sarebbe ad una distanza infinitamente grande dall'origine, l'equazione dell'asintoto è dunque la medesima dell'equazione della tangente; solamente bisogna farle esprimere la circostanza della distanza infinita dal punto di contatto all'origine; ciò che si eseguisce eguagliando all'in-

finito l'ascissa di questo punto. Ora, x', y' essendo le coordinate di un punto qualunque di una curva, l'equazione della retta, tangente a questo punto, è (Vedi TANGENTE)

$$y - y' = \frac{dy'}{dx'} (x - x')$$

Facendo $x = 0$ in questa equazione, y diviene eguale ad AO (Vedi APPLI. DELL'ALG. ALLA GEOM., n.º. 45), e si ha

$$AO = y' - x' \frac{dy'}{dx'} \dots \dots (a).$$

Eguualmente, facendo $y = 0$, x diviene eguale ad AC, e si ottiene

$$AC = x' - y' \frac{dx'}{dy'} \dots \dots (b).$$

Le due espressioni (a) e (b), facendovi $x' = \infty$ danno i valori di AD e di AB, e secondo che questi valori sono finiti o infiniti, reali o immaginari esiste o non esiste asintoto per la curva di cui l'equazione avrà prima d'ogni altra cosa fatto conoscere la relazione generale delle coordinate x' ed y' . Rivediamo chiara questa teoria con alcuni esempi.

PROBLEMA I. Determinare se la curva di cui l'equazione è $y^2 = Ax$ ha degli asintoti.

Nell'espressioni (a) e (b), il punto x', y' dovendo appartenere alla curva, si esprime questa circostanza facendo $x = x', y = y'$, e l'equazione proposta diviene

$$y'^2 = Ax'.$$

Differenziando quest'ultima per avere i rapporti $\frac{dy'}{dx'}$, e $\frac{dx'}{dy'}$ si trova

$$2y'dy' = A dx'.$$

Donde si ricava

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{A}{2y'}, \quad \text{e} \quad \frac{dx'}{dy'} = \frac{2y'}{A}.$$

Questi rapporti sostituiti in (a) e (b) danno

$$AO = y' - x' \cdot \frac{A}{2y'} = \frac{2y'^2 - Ax'}{2y'} = \frac{2Ax' - Ax'}{2\sqrt{Ax'}} = \frac{1}{2}\sqrt{Ax'}$$

$$AC = x' - y' \cdot \frac{2y'}{A} = \frac{Ax' - 2y'^2}{A} = \frac{Ax' - 2Ax'}{A} = -x'.$$

Ma AO diviene eguale ad AD, ed AC ad AB, quando x' è infinito. Facendo dunque $x' = \infty$, abbiamo

$$AD = \frac{1}{2}\sqrt{A\infty}, \quad AB = -\infty$$

valori i quali, non potendo essere costruiti, c'insegnano che la curva $y^2 = Ax$ non ha verun asintoto. Questa curva è la parabola apolloniana

PROBLEMA II. Determinare gli asintoti della curva $y^2 = Ax + Bx^2$.

L'equazione proposta ci dà

$$y^2 = Ax' + Bx'^2,$$

la quale diviene, differenziandola,

$$2y'dy' = A dx' + 2Bx'dx'.$$

Donde si ricava

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{A+2Bx'}{2y'}, \quad \text{e} \quad \frac{dx'}{dy'} = \frac{2y'}{A+2Bx'}.$$

Sostituendo in (a) e (b) si ottiene

$$\begin{aligned} AO &= y' - \frac{Ax' + 2Bx'^2}{2y'} = \frac{2y'^2 - Ax' - 2Bx'^2}{2y'} = \\ &= \frac{Ax'}{2\sqrt{Ax' + Bx'^2}} = \frac{1}{2} \frac{A}{\sqrt{\frac{A}{x'} + B}}, \end{aligned}$$

$$AC = x' - \frac{2y'^2}{A+2Bx'} = \frac{Ax' + 2Bx'^2 - 2y'^2}{A+2Bx'} = -\frac{Ax'}{A+2Bx'}.$$

Facendo, in queste espressioni $x' = \infty$, abbiamo definitivamente

$$AD = \frac{A}{2\sqrt{B}}, \quad \text{e} \quad AB = -\frac{A}{2B}.$$

Ora questi valori potendo essere costruiti, la curva proposta è suscettibile d'asintoti, purchè però B sia positivo, poichè se esso fosse negativo, $\frac{A}{2\sqrt{-B}}$, sarebbe immaginario.

L'equazione proposta è quella dell'*iperbola* quando B è positivo, e quella dell'*ellisse*, quando esso è negativo. Facendo $B=0$, essa diviene ancora quella della *parabola*. In questo caso, i valori di AD e di AB divengono tutt'i due infiniti, come nell'esempio precedente. Vedi alla parola *IPERBOLA*, per la costruzione dei valori di AB e di AD.

Se nell'espressioni (a) e (b), facendo $x' = \infty$, una delle quantità AO o AC divenisse infinita, l'altra restando finita, ciò significa che la curva avrebbe un'asintoto parallelo all'asse sopra la quale si trova la quantità infinita.

PROBLEMA III. Trovare gli asintoti della LOGARITMICA, di cui l'equazione è $y = a^x$.

Questa equazione ci dà

$$y' = a^{x'};$$

e differenziandola,

$$dy' = a^{x'} \cdot \log a \cdot dx'.$$

Donde

$$\frac{dy'}{dx'} = a^{x'} \cdot \log a, \quad \text{e} \quad \frac{dx'}{dy'} = \frac{1}{a^{x'} \log a}.$$

Sostituendo in (a) e (b), abbiamo

$$AO = y' - x' a^{x'} \cdot \log a = a^{x'} - x' a^{x'} \log a,$$

$$AC = x' - y' \cdot \frac{1}{a^{x'} \log a} = \frac{x' a^{x'} \cdot \log a - a^{x'}}{a^{x'} \log a} = x' - \frac{1}{\log a}.$$

Facendo $x' = \infty$, si ottiene

$$AD = \frac{a}{\infty} - \infty = 0, \text{ e } AB = \infty.$$

Questi valori provano che vi è un'asintoto parallelo all'asse delle ascisse, e situato ad una distanza $AD = 0$ da quest'asse. L'asintoto si confonde dunque con l'asse delle ascisse, o, ciò che è la medesima cosa, nella *logaritmica*, l'asse delle x è asintoto alla curva.

Non basta che una retta s'avvicini all'infinito ad una curva, perchè essa le sia asintoto; poichè allora, nella figura precedente; una parallela qualunque bm a BM sarebbe asintoto alla curva AyN ; ma la distanza di bm alla curva non può mai divenire più piccola che la sua distanza a BM , che è una distanza finita ed assegnabile. Coal, bm non soddisfa alla definizione che abbiamo data degli asintoti.

Vedi, per la teoria completa degli asintoti, l'opera di *Cramer*, intitolata: *Introduction à l'analyse des lignes courbes*. Vedi ancora le *Traité des fluxions* di *Maclaurin*, le *Istituzioni analitiche* di *Maria Agnesi*, e in questo Dizionario, gli articoli *CURVA*, *QUADRATURA* e *RAMI*.

ASPETTO (Astron.) Situazione delle stelle o dei pianeti gli uni rispetto agli altri. Si considerano cinque aspetti principali, i quali coi loro segni rispettivi sono:

♌	<i>Congiunzione</i> , quando l'angolo di due pianeti qualunque è	0°
*	<i>Sestile</i> , quando quest'angolo è di	60°
□	<i>Quartile</i> Id.	90°
△	<i>Triun</i> Id.	120°
♐	<i>Opposizione</i> Id.	180°

Gli angoli degli aspetti si contano per mezzo dei gradi di longitudine; talmentechè l'aspetto si reputa lo stesso, sia che i pianeti si trovino sull'eclittica, sia che non vi si trovino.

Questi termini, come pure moltissimi altri che adesso è inutile il riportare, sono stati introdotti nella scienza dagli astrologi, che consideravano gli aspetti degli astri come il fondamento delle loro predizioni. Sebbene i sogni astrologici siano passati di moda, nientedimeno i segni precedenti si trovano anche in oggi adoprati in alcune opere astronomiche.

Quando i pianeti hanno esattamente tra loro le distanze di sopra notate, gli aspetti si chiamano *aspetti partili*; ma quando le distanze non hanno precisamente queste misure, gli aspetti si chiamano *aspetti platici*.

ASPIRANTE (Idraul.) Vedi *TROMBA ASPIRANTE*.

ASSE (Astron.) Linea retta, che s'immagina passare a traverso alla terra, al sole, ai pianeti, ai satelliti ec., e intorno alla quale eseguisciono essi le loro rispettive rotazioni diurne.

La terra e i pianeti hanno il loro moto di traslazione nelle loro orbite, e si muovono in modo che l'asse d'ognuno si avvanza parallelamente a sè stesso, cioè è sempre diretto verso le stesse parti del cielo.

L'asse della terra è inclinato sull'eclittica, e fa con essa un angolo di circa $66^{\circ} \frac{1}{2}$, posizione la più favorevole per facilitare la fertilità della terra e renderla abitabile.

Il Dott. Keill, nel suo *Esame della Teoria della terra* di *Burnet*, ha in-

dicato i molti vantaggi che risultano dall'inclinazione dell'asse, e particolarmente quello di far maturare i frutti della terra; ed ha dimostrato la verità di ciò che Keplero aveva asserito in questo proposito nella sua opera intitolata *Epitome astronomiae copernicanae*. Fra le altre particolarità curiose, Keill fa vedere che tutti quelli che vivono al di là del 45° di latitudine, e che hanno per conseguenza un maggior bisogno del calore del sole, ne godono in tutto l'anno per un tempo maggiore che se l'equatore e l'eclittica coincidessero: mentre quelli che vivono tra l'equatore e il 45° di latitudine, e che sono al contrario troppo esposti ai raggi solari, hanno non ostante, a motivo dell'inclinazione dell'asse, un calore minore di quello che avrebbero se la terra avesse una posizione retta. Queste considerazioni ci conducono ad un'ammirazione senza limiti per la sapienza infinita che ha preseduto alla creazione dell'universo.

Asse dell'orizzonte, dell'equatore ec. è una linea retta condotta pel centro dei circoli rispettivi e perpendicolare al loro piano.

Asse in geometria. Si chiama così una linea retta intorno della quale una figura piana fa la sua rivoluzione per produrre un solido. Così, un semicircolo che si muove intorno del suo diametro che è in riposo, genererà una sfera il di cui asse è questo medesimo diametro; e se un triangolo rettangolo gira intorno della sua perpendicolare in riposo, descriverà un cono il di cui asse è questa perpendicolare.

Asse viene ancora più generalmente impiegato per indicare una linea che si concepisce condotta dal vertice di una figura al mezzo della sua base. Così, l'asse di un circolo di una sfera, sarà una linea qualunque che passando per il centro, vada con le sue due estremità a terminare alla circonferenza.

Asse di un cono è una linea condotta dal vertice al centro della base.

Asse di un cilindro è una linea condotta dal centro di una delle sue basi al centro dell'altra base.

Asse di una sezione conica, Vedi sezione conica.

Asse traverso nell'ellisse e nell'iperbola: è il diametro che passa per i due fuochi e i due principali vertici della figura. Nell'iperbola è il più corto diametro; ma nell'ellisse è il più lungo.

Asse coniugato o second'asse nell'ellisse e nell'iperbola, esso è il diametro che passa per il centro, ed è perpendicolare all'asse traverso, questo è il più corto dei diametri coniugati.

Asse di una linea curva viene ancora più generalmente chiamato il diametro che ha le sue perpendicolari ad angolo retto, quando questa posizione è possibile.

Asse in meccanica è una certa linea intorno della quale un corpo può girare. Vi sono degli assi di diverse specie. Così, si chiamano:

Asse di una bilancia, la linea sopra la quale essa si muove.

Asse di rotazione, la linea intorno alla quale un corpo gira quando è in moto. L'impulso dato ad una sfera omogenea, in una direzione che non passi pel centro, la farà girare costantemente intorno al diametro che è perpendicolare al piano che passi pel centro e per la linea di direzione della forza impressa. Se sopraggiungono nuove forze le quali agiscano su tutte le parti della sfera, e la risultante delle quali passi pel centro, esse non cangeranno punto il parallelismo del suo asse di rotazione. È per questo che l'asse della terra rimane sempre quasi parallelo a se stesso nella sua rivoluzione intorno al sole, senza che sia necessario il supporre, con Copernico, un moto annuo dei poli della terra intorno a quelli dell'eclittica.

Se il corpo ha una determinata figura, il suo asse di rotazione può cangiare ad ogni istante. La determinazione di questi cangiamenti, qualunque possano

essere le forze che agiscono sui corpi, è uno dei problemi i più interessanti della meccanica de' corpi solidi, a motivo della sua connessione colla precessione degli equinozi e colla librazione della luna. La soluzione di questo problema ha condotto ad un risultato curioso ed utilissimo, cioè: che in tutti i corpi esistono tre assi perpendicolari l'uno all'altro, intorno ai quali il corpo può girare uniformemente, quando non è sollecitato da forze esterne. Per tal ragione questi assi sono stati chiamati con molta proprietà *assi principali di rotazione*.

Asse d'oscillazione è una linea parallela all'orizzonte, la quale passando pel centro, intorno al quale un pendolo fa le sue vibrazioni, è perpendicolare al piano in cui esso oscilla.

Asse del verricello, una delle cinque potenze della meccanica, il quale consiste in una rota fissata ad un albero. La potenza è applicata alla circonferenza della ruota, e il peso è elevato da una corda che si avvolta sopra l'asse nel tempo che la macchina gira. Possiamo concepire la potenza applicata all'estremità di un braccio di leva eguale al raggio della ruota, e il peso come applicato all'estremità di una leva eguale al raggio dell'asse; solamente questi bracci non s'incontrano ad un centro unico di movimenti, come nella leva; ma in luogo di questo centro, abbiamo un asse di movimento, cioè: l'asse della macchina intera. (*Vedi VERRICELLO*). Nei trattati antichi di meccanica questa macchina si chiama *Axis in peritrochio*.

Asse in ottica. L'*asse ottico* o l'*asse visuale* è un raggio che passa pel centro dell'occhio, o che cade perpendicolarmente sull'occhio.

Asse di una lente è l'asse del solido nel quale la lente è un segmento, ovvero la linea che unisce i due vertici o punti centrali delle due opposte superficie della lente.

Asse d'una calamita, o asse magnetico. Linea che passa pel mezzo di una calamita nel senso della sua lunghezza. In qualunque modo sia divisa una calamita, purchè la divisione si faccia in un piano nel quale si trovi questa linea, la calamita sarà tagliata o separata in due altre, e le estremità di questa linea si chiamano i poli della calamita.

ASSICURAZIONE, contratto sinallagmatico, in virtù del quale una o più persone, riunite in nome collettivo o in società, si obbligano verso un'altra persona, o verso un'altra società qualunque, mediante una retribuzione ordinariamente annua, e che si chiama l'*ANNA*, a garantire le proprietà o gli oggetti indicati nel contratto, da qualunque rischio, danno, o distruzione. Questo contratto si applica, sotto diverse denominazioni e condizioni reciproche, ai mobili e agli immobili, ai pericoli della navigazione, e in generale a tutti gli oggetti suscettibili di soffrir danno: è stato ancora esteso all'epizootia e alla mortalità umana. Quegli dei contraenti che garantisce si chiama *ASSICURATORE*, l'altro contraente è indicato col nome di *ASSICURATO*. Le condizioni dell'assicurazione sono di due specie, in Francia. Le prime sono puramente civili; le seconde sono d'ordine pubblico, e queste interdivono qualunque stipulazione contraria alle leggi. L'atto nel quale le condizioni sono enunciate si chiama *POLIZZA*. Esistono pure due modi di assicurazione: l'*ASSICURAZIONE A PRIMA*, vale a dire quella in cui il prezzo della garanzia è fissato anticipatamente, garanzia che l'assicuratore si obbliga di soddisfare, sia che il danno oltrepassi o no le sue previsioni; e l'*ASSICURAZIONE A RENDITA*, nella quale l'ammontare della garanzia si stabilisce per contribuzione, secondo il quantitativo del danno, tra tutte le persone che si sono scambievolmente obbligate.

Il sistema delle assicurazioni, del quale brevemente esporremo la storia, l'economia e la teoria, è una felice deduzione del principio di associazione, principio secondo d'immensi risultati. L'industria e il commercio gli debbono soprattutto

la loro prosperità: esso ha portato la fertilità in campagne da lungo tempo inaridite ed incolte, ingrandito le città, favorito tutte le relazioni sociali, fondando immensi centri d'azione, dai quali sono scaturite mille fonti di prosperità e di civilizzazione. Bisognerebbe rennuziare affatto alla ragione, per non comprendere che l'azione continua di molti uomini che seguono una direzione uniforme, è molto più potente di quella di uno stesso numero di uomini che agiscano isolatamente collo stesso scopo.

Ciò non ostante non dobbiamo tacere che ai nostri giorni queato stesso principio di associazione è stato l'oggetto dei sistemi i più azzardati, e delle teorie le più dannose. Si è confuso lo spirito di associazione collo spirito di setta, i quali non hanno tra loro nessun punto di contatto o di somiglianza. Si è dimenticato forse da ambedue le parti che la società umana stessa, divisa in diverse nazionalità, non è che una grande associazione, della quale le associazioni intermedie debbono certamente cercare di accelerare il cammino e migliorare la prosperità, ma di cui debbono soprattutto rispettare i principj generali e le forme politiche. Nessun progresso può in verità stabilirsi senza la scienza; ma la scienza non è, uè deve esser congetturale. Essa non deve agire infatti che sull'ordine reale delle cose; essa deve prendere la società quale è, nè sognare un modello di perfezione, al quale non è dato all'umanità di giungere, che dopo un numero grande di modificazioni successive.

Si comprenderà, lo speriamo, qual distanza separi questi principj semplici e razionali dai dogmi arbitrari e fantastici proposti da alcune sette pretese riformatrici, le cui audaci pretensioni, rivestite di tutte le attrattive della immaginazione e dell'eloquenza hanno già introdotto nella società un turbamento e un mal essere, che la ragione coadiuvata dalla scienza deve cercare di neutralizzare, e sanare.

A torto si attribuisce l'invenzione del sistema delle assicurazioni agli ebrei, supponendo che, perseguitati durante il medio evo, e spesso spogliati arbitrariamente delle loro proprietà, trovassero così il mezzo di premunirsi contro l'ingiusto e crudele pregiudizio, di cui erano continuamente le vittime. È questo un errore, poichè, pel testo espresso delle legislazioni di quei tempi deplorabili, la proprietà degl'immobili era quasi dappertutto interdetta agli ebrei, e la proprietà dei mobili non era loro concessa che sotto determinate condizioni. È probabilmente il metodo di trasportare grandi capitali senza i rischi dei viaggi per mezzo delle *lettere di cambio*, che è dovuto a queste circostanze, metodo che male a proposito è stato confuso con le assicurazioni. Altri hanno pensato che il sistema delle assicurazioni non fosse affatto ignoto all'antichità; ma non se ne trova traccia in nessuna legislazione, ed abbiamo tutto il fondamento di credere che questa opinione non sia meno azzardata della prima.

In Inghilterra, sotto il regno della regina Anna, verso il principio del decorso secolo, si stabilì a Londra la più antica compagnia di assicurazione che si conosca. (Questa compagnia esiste ancora sotto il nome di *Società amica*, che essa assume fino dalla sua prima fondazione. Il suo oggetto è quello delle assicurazioni sulla vita.

Parecchie compagnie si stabilirono successivamente ed applicarono questo sistema ai diversi rischi della proprietà. A poco a poco la teoria delle assicurazioni si rettificò a misura dei progressi della scienza; e le compagnie modificavano le loro operazioni, che dapprima erano state basate sopra principj poco esatti. In oggi il sistema previdente delle assicurazioni si è reso popolare in Inghilterra, e vi si applica con vantaggio eguale per gli assicuratori e per gli assicurati ad una moltitudine di oggetti, che, per la natura della loro destinazione, sembravano i meno suscettibili di essere assoggettati a previsioni di questo genere. La prosperità

pubblica, in Inghilterra, risente i benefici effetti di quella sicurezza che circonda le private proprietà poste sotto la salvaguardia di queste istituzioni, il cui principio, garantito dalla legge, è nondimeno abbandonato, nella sua applicazione, alla speculazione individuale.

La Germania ha adottato il sistema delle assicurazioni, ma in generale con una modificazione essenziale: questo sistema vi è divenuto una legge dello Stato. Il governo ha rimpiazzato le associazioni e le compagnie: egli stesso si è fatto l'assicuratore, e riscuote la tassa di assicurazione come un'imposizione speciale, obbligatoria per tutti i proprietari. Questi due modi di assicurazione convengono egualmente all'inclinazione delle due nazioni alle quali si applicano. Sembra che il metodo seguito in Inghilterra sia più conforme allo spirito delle istituzioni politiche della Francia, sebbene una gran parte delle sue province gema ancora, noi lo diciamo con dolore, sotto le catene di falsi pregiudizj, che renderebbero loro necessaria la protezione paterna che i governi di Germania esercitano sui loro sudditi. È certo che il criterio pubblico ha fatto in Francia così poco progresso, che il sistema delle assicurazioni contro i rischi della proprietà in generale, e quello che ha per oggetto le assicurazioni che si regolano sulle probabilità dell'esistenza umana, vi sono ancora male intesi e quasi respinti, come speculazioni interessate, senza vantaggio nessuno per quelli che vi prendono parte in qualità di assicurati. Sotto questo rapporto, dovendo noi soprattutto la verità al nostro paese, diremo che questo stato di cose deve attribuirsi non meno ai sistemi incompleti e all'andamento, spesso imbarazzato da minuziose contestazioni, delle compagnie, che all'ignoranza sventuratamente ancora troppo profonda delle popolazioni. Non intendiamo già, parlando così, di volere adesso accusare in un modo assoluto, né la probità delle compagnie di assicurazione, né l'intelligenza nazionale; ma fatti numerosi provano pur troppo l'influenza che queste due cause esercitano sull'avversione che il pubblico dimostra per un modo di conservazione della proprietà, l'efficacia del quale è dimostrata dalla ragione e dall'esperienza.

Infatti è certo per una parte che l'applicazione troppo vincolata del sistema delle assicurazioni non contribuisce poco a impedirne la propagazione. La maggior parte delle compagnie sono istituite per casi d'incendio; e tutte hanno stabilito, nella classe di accidenti di cui si obbligano di riparare il danno, un numero considerabile di eccezioni che limitano il loro intervento a casi eccezionali fortunatamente assai rari. Così gli accidenti atmosferici e geologici sono in generale formalmente esclusi dall'assicurazione; e le compagnie formate per assicurare le proprietà rurali contro la grandine e contro il fuoco del cielo, che dovrebbero essere un beneficio immenso per le campagne, rimangono ancora da stabilirsi; infatti, quelle in piccolo numero, che esistono sotto questa denominazione, esigono convenzioni e patti talmente sopraaccaricati di previsioni eccezionali, che la loro garanzia si riduce presso a poco ad una derisione. I capitalisti francesi che entrano in queste associazioni non sembrano abbastanza penetrati della eminente utilità del mandato che accettano in queste circostanze; la lusinga del guadagno è evidentemente il motore principale della loro adesione agli statuti delle compagnie di assicurazione. Questa avidità, o per lo meno questa premurosa sollecitudine che essi mostrano per i loro interessi, è nonostante una delle cause che maggiormente nuociono alle loro speculazioni. Non agiscono in questo modo in Inghilterra gli uomini abituati alle grandi operazioni commerciali, poiché non sono sprovvisti né delle cognizioni scientifiche, né della moralità che, nell'epoca di civiltà nella quale siamo giunti, debbono purificare le sorgenti della prosperità individuale.

Per l'altra parte finalmente non è senza ragione che noi accusiamo l'ignoranza pubblica, quando non ha molto, nella Camera stessa dei Deputati, nella quale

deve supporre che esista una intelligenza più illuminata degl' interessi generali, il sistema delle assicurazioni, esposto in tutte le sue particolarità con molta chiarezza e talento da uno de' suoi membri, non ha trovato che uditori distratti, e non ha avuto per risultato che una risoluzione ostile. Nel capitolo del budget consacrato ai Soccorsi SPECIALI, il sig Colomès propose una riduzione di 200,000 franchi, appoggiandosi sulle considerazioni le più positive in economia politica (Si veda il *Moniteur*, Seduta della Camera dei Deputati del Venerdì 2 Marzo 1832). Ci gode l'animo di poter qui ripetere, giacchè se ne presenta favorevole l'occasione, alcune delle parole di questo onorevole deputato. Così egli si esprime: — « Io vengo a richiamare la vostra attenzione sui danni cagionati « all'agricoltura dalla grandine e dagli altri accidenti atmosferici, a dimostrarvi « nel tempo stesso che la somma destinata nel budget alla riparazione di questi « mali è perduta pel tesoro, senza alleviare nessuno infortunio, e finalmente a « sottoporre alle vostre meditazioni un mezzo, secondo l'opinione mia potentis- « simo, per attenuare gli effetti disastrosi di questo terribile flagello. Vi « ha una classe, sventuratamente troppo numerosa, che pensa raramente a conser- « vare il superfluo dei tempi felici pei bisogni dell'avversità; e questa mancanza « di previdenza diviene più grande a misura che si scende nella scala sociale. « Forse è ingiusto l'accusare questa classe disgraziata, al poco al di sopra de' suoi « bisogni. Il male proviene senza dubbio in gran parte dalla meschinità delle « sue risorse. Chi di voi non è rimasto profondamente afflitto in consi- « derare lo stato deplorabile delle nostre campagne, quando la grandine o altri « accidenti atmosferici sono venuti a distruggere le speranze dell'agricoltore, il « lavoro delle sue braccia, il prodotto de' suoi capitali? I suoi bestiami « periscono di miseria e di malattia, i suoi campi languiscono incolti, le sue forze « fisiche infiacchiscono, e le conseguenze del disastro sono più dolorose del disa- « stro stesso. Nè crediate già che questo quadro lacrimevole non s'incontri che « in una classe poco numerosa: essa costituisce, al contrario, la maggior parte dei « proprietari di terreni; e per prova della mia asserzione vi citerò cifre inecce- « zionabili. In dieci milioni di famiglie agricole, otto milioni, vale a dire i quat- « tro quinti, pagano meno di 20 franchi di contribuzione. »

Dopo queste considerazioni generali, che avrebbero dovuto colpire nn' assem- blea interamente composta di grandi proprietari rurali, il sig. Colomès entra nell'esposizione speciale del suo soggetto. Dalle sue ricerche risulta che il gover- no spende ogni anno quasi due milioni di franchi in soccorsi, ma chè le perdite che questo fondo è destinato a riparare oltrepassano spesso cento milioni, e ra- ramente sono al di sotto di cinquanta. È evidente che la repartizione della somma destinata a questo oggetto non può produrre nessun bene: il contingente as- segnato ad un comune, i cui campi siano stati devastati dalla grandine, non su- pera che in circostanze rarissime la somma di dugento franchi!

Cercando qual rimedio potrebbe opporsi ad un male così intenso, e il cui ri- torno periodico attacca nel suo principio la produzione, il sig. Colomès rende giustizia al sistema delle assicurazioni, che offre, secondo lui, il mezzo migliore per supplire alla imprudenza degli uomini; ma egli non crede che le compagnie d'assicurazione contro la grandine, stabilite sul principio della *reciprocità*, possano presentare risultati tanto felici quanto nelle altre circostanze nelle quali si applica questo principio; in questo rapporto egli si appoggia sopra un ragiona- mento assai convincente. « Esiste per queste compagnie, dice egli, nella natura « stessa delle loro assicurazioni, un principio di morte al quale non possono per « lungo tempo sottrarsi; e questo principio letale consiste nell'ineguaglianza « delle probabilità che corrono i diversi assicurati. Non avviene della grandine « come degl' incendi. In questi ultimi le disgrazie possono essere il risultato

« della negligenza degli uomini, che dappertutto è presto a poco la stessa; mentre
 « per la grandine le probabilità variano ad ogni passo. Un comune appena si av-
 « vicine di essere stato colpito da questo flagello, mentre il comune vicino lo è
 « quasi tutti gli anni. E ciò deriva perchè le correnti atmosferiche, che spingono
 « le nubi e contribuiscono alla loro formazione, sono il risultato della configura-
 « zione del suolo, e seguono più particolarmente certe direzioni. È
 « dunque un pascersi d'illusioni lo sperare un felice avvenire per le società di as-
 « sicurazione contro la grandine, stabilite sul principio della *reciprocità*. Una
 « società a *prima*, nella quale fosse garantito dall'assicuratore l'intero pagamen-
 « to del danno, diverrebbe anco più impraticabile, a meno che non vi fosse per
 « ciascun luogo, per ciascun campo, una *prima* differente; poichè, se si stabilisse
 « una *prima* media, la stessa per tutti i luoghi, nascerebbe nuovamente il mede-
 « simo inconveniente, e l'assicuratore sarebbe in breve rovinato ».

Noi speriamo di poter provare in breve che tali considerazioni sull'assicura-
 zione *reciproca* e a *prima* non sono esatte che nell'ipotesi scelta dall'onorevole
 deputato; ipotesi secondo la quale l'assicurazione sarebbe limitata ad una località
 data, come un dipartimento, e ristretta ai soli danni prodotti dalla grandine. Ma
 non è questo il solo rischio che minacci la proprietà rurale. Il sig. Colomès do-
 manda a sè stesso se esistono solamente questi due mezzi di produrre il bene
 che dovrebbe sperarsi da una compagnia d'assicurazione contro la grandine. Dap-
 prima ei si eleva contro il pregiudizio che fa spesso considerare un'assicurazione
 come un contratto lucroso, nel quale l'assicurato riceve più di quello che dà;
 e propone quindi un sistema di annualità per contribuzione, o per *prime* rimbor-
 sabili in dieci anni, le quali servirebbero a indennizzare il fondo colpito dalla gran-
 dine. Temendo di stabilire una centralizzazione, ch'ei crede pericolosa e nociva, non
 vuole far dipendere da un punto unico gl'interessi materiali della Francia intera,
 e si limita a domandare delle *annualità dipartimentali*, vale a dire un'organizza-
 zione di assicurazione per ogni dipartimento. In questa parte il sig. Colomès,
 colle intenzioni le più lodevoli, ci sembra essersi ingannato, e non avere conside-
 rato il suo soggetto in un punto di vista abbastanza vasto. Del resto, il suo si-
 stema è ingegnoso e di una facile applicazione, e si aggira d'altronde sopra una
 questione gravissima, perciò è molto da rincrescere che non sia stato attentamente
 esaminato dalla Camera, che gli ricusò l'appoggio dei suoi lumi passando all'ordine
 del giorno.

Noi dobbiamo dunque qui osservare che a misra che un sistema di assienra-
 zione abbraccia un maggior numero di rischi, applicandosi ad una gran superficie,
 maggiore diviene la probabilità di ripararli mediante il numero più considera-
 bile di assicurati che si raccolgono. Esaminiamo l'economia di questo sistema sol-
 tanto nella sua applicazione ai rischi della proprietà rurale, lasciando da parte
 quelli delle abitazioni. È evidente, per esempio, che restringendo le operazioni
 di una gran compagnia alle assicurazioni contro la grandine, essa non troverà per
 assicurati che gli abitanti delle località nelle quali questo flagello si riproduce
 più spesso, e che questa compagnia, stabilita sul principio della *prima* o su quello
 della *reciprocità*, può vedere in una sola annata consumarsi tutte le sue risorse.
 In questo caso certamente il sig. Colomès ha ragione. Ma senza fermarsi a riflet-
 tere che la tendenza particolare delle correnti elettriche per certe direzioni non
 è dimostrata, poichè la formazione e la caduta della grandine si effettua sponta-
 neamente, e sempre con anomalie le più bizzarre, le proprietà rurali sono sog-
 gette ad altri rischi, che, in una superficie grande come quella della Francia,
 compenserebbero gli uni con gli altri ciò che può esservi di locale e di accidentale
 nei loro sinistri. Così, il gelo, la pioggia, la siccità, l'irruzione degl'insetti, le
 frane dei terreni, sono accidenti che possono colpire più o meno, e a differenti

intervalli, le proprietà rurali in tutte le parti della Francia. Soltanto in una vasta associazione, in un'assicurazione generale a *prima* o *reciproca*, potrebbe trovarsi la riparazione dei danni cagionati da tali disastri. L'egoismo di località spingerebbe necessariamente in questa combinazione, poichè il cantone che non è esposto alla grandine è soggetto ad altri rischi. Dalle ricerche statistiche, alle quali ha dovuto darsi il sig. Colomès, risulta che le perdite occasionate da questi diversi accidenti si elevano annualmente in Francia ad un valore di 50 in 100 milioni. Prendendo il medio tra queste due somme per base delle operazioni di una potente compagnia d'assicurazione, e supponendo dieci milioni di proprietari in caso di prendervi parte come assicurati, si vedrà che per una parte sarebbe facile lo stabilire una scala di *prime* sopra basi abbastanza sicure, specialmente adesso che le operazioni catastali sono prossime al loro termine; e che, per un'altra parte, vi sarebbe negli incassi della compagnia una garanzia sufficiente per indennizzare gli assicurati, per provvedere alle spese di amministrazione, e per la realizzazione di guadagni considerabili a favore degli azionisti del fondo sociale. Senza dubbio una tale intrapresa esigerebbe disposizioni legislative tutte speciali, e per conseguenza il concorso attivo di tutti i poteri dello Stato. Perciò noi non presentiamo questa ipotesi come una teoria realizzabile immediatamente, ma soltanto come un quadro del bene che il sistema delle assicurazioni applicato in grande sarebbe suscettibile di produrre.

Abbiamo detto in principio che le compagnie d'assicurazione erano stabilite in due modi principali, cioè l'*assicurazione a prima*, e l'*assicurazione reciproca*. Le compagnie d'assicurazione a *prima* sono le più numerose; esse infatti sembrano presentare maggiori garanzie, tanto nel rapporto della loro organizzazione finanziaria, quanto in quello della sorveglianza legale di cui sono l'oggetto. Si chiama compagnia d'assicurazione a *prima* una società di capitalisti, che, presentando un fondo sociale di un valore determinato, si obbliga, mediante il pagamento annuo di una contribuzione fissa, stabilita sopra una tariffa che fa parte de' suoi statuti, a garantire le abitazioni, le proprietà rurali, i bastimenti ec., contro un rischio qualunque secondo la specialità dell'assicurazione, come l'incendio, la grandine, i disastri marittimi ec. Questa contribuzione o *prima* è stabilita ordinariamente sopra una scala di proporzione degli oggetti da assicurarsi. Così, per esempio, la *prima* da pagarsi per l'assicurazione degli edifici di pietra è meno elevata di quella che si richiede per l'assicurazione delle costruzioni di legno. L'assicurato stipula coll'assicuratore un contratto o *polizza*, in cui sono enunziate le condizioni dell'assicurazione, e preveduti tutti i casi che potrebbero annullarla. L'assicurazione si contrae per un certo numero di anni, e avviene spesso che le compagnie, che entrano in concorrenza con quelle stabilite precedentemente, proclamano come un nuovo sistema di assicurazione i cambiamenti insignificanti che esse introducono in queste condizioni. Queste compagnie sono istituite per la maggior parte contro i casi d'incendio, e le *prime* sono stabilite secondo la valutazione in denaro degli oggetti mobili o immobili sottoposti all'assicurazione. Questa *prima*, per esempio, è fissata a 50 centesimi per ogni 1000 franchi del valore convenzionale dell'oggetto assicurato; ma questo valore non potrebbe esser fittizio, e per conseguenza per mezzo di una *prima* di 10 franchi, che rappresentasse così un valore di 20000 franchi, non potrebbe assicurarsi una proprietà, il cui valore reale fosse solamente di 10000 franchi. È accaduto qualche volta che la negligenza usata dalle compagnie nella stima degli oggetti assicurati, le ha rese vittime delle speculazioni le più colpevoli.

La legislazione francese sembra favorire le operazioni delle compagnie d'assicurazione rendendo il conduttore responsabile dell'incendio. Il codice civile si esprime così: « Art. 1733. Il conduttore è responsabile dell'incendio, quando non

« provi che l'incendio sia avvenuto per caso fortuito, o per forza irresistibile, o per vizio di costruzione, o che il fuoco si sia comunicato da una casa vicina. » Art. 1734. Essendovi più inquilini, tutti sono responsabili solidalmente dell'incendio, a meno che non provino che l'incendio sia incominciato nell'abitazione d'uno di essi, nel qual caso questi soltanto ne deve rispondere; o che alcuno di essi provi che l'incendio non ha potuto cominciare nella sua abitazione, nel qual caso questi non è responsabile. In conseguenza, le compagnie garantiscono abitualmente i conduttori dalla responsabilità risultante da questa legge. Ma lo stabilimento in Francia di un gran numero di corpi di pompieri, istituiti in quasi tutti i comuni, e che si portano rapidamente sui luoghi incendiati, ha reso i disastri occasionati dall'incendio poco frequenti; e la sicurezza che ispirano tali corpi, soprattutto nelle città, ha molto influito sul poco successo delle compagnie d'assicurazione. Dovrebbe questa esser per esse una ragione potentissima per dare una maggiore estensione alle loro operazioni.

Le compagnie reciproche non hanno un fondo sociale; l'assicurato vi è assicuratore, come l'assicuratore vi è assicurato: esse si formano mediante la riunione di un certo numero di persone che si obbligano a garantirsi vicendevolmente contro i rischi dell'incendio, secondo determinate condizioni. Questo sistema non è senza inconvenienti, poichè la riparazione dei danni non vi si può eseguire che con lentezza, e quando, dopo averli verificati mediante una perizia, siano stati richiamati individualmente tutti i soci a somministrare i fondi occorrenti: l'ammontare di ciascuna contribuzione si regola su quella dei danni. Può accadere che, in questo modo d'assicurazione, una persona sia garantita per molti anni senza esser sottoposta ad alcuna contribuzione, e che ad un tratto quata contribuzione si elevi ad una somma rilevante; il che dipende interamente dal numero dei casi d'incendio e da quello dei membri della società. L'assicurazione a *prima* è dunque preferibile; poichè, d'altronde, non può elevarsi mai contestazione alcuna sul suo ammontare. Le compagnie di assicurazione a *prima*, e le compagnie d'assicurazione *reciproca*, non possono esser poste in attività che in virtù di un'ordinanza reale che ne abbia riconosciuta l'esistenza legale, e ne abbia approvati gli statuti.

Le assicurazioni marittime si fanno sempre a *prima*; sembra anzi che in Francia la loro esistenza sia molto antica, quantunque fossero conosciute sotto altre denominazioni, e il contratto tra l'assicurato e l'assicuratore non avesse le stesse conseguenze. I rischi marittimi sono quelli che presentano le maggiori eventualità; perciò la legge ha avuto cura di regolare con una somma previdenza questa parte essenziale del sistema d'assicurazione. Sembra anzi che la legge francese riposi in questo rapporto sopra principj di equità e di buona fede abbastanza generali, poichè è stata adottata da tutte le nazioni dell'Europa.

Esiste a Parigi un gran numero di compagnie d'assicurazione che si applicano a rischi eventuali e speciali, come quella che assicura i proprietari delle vetture contro la responsabilità che corrono pei danni che possono cagionare, ec. Queste associazioni, che tutte hanno un fine utile, riposano sui principj generali che di sopra abbiamo esposti.

Non è così dell'assicurazione sulla vita, introdotta recentemente in Francia; essa può così definirsi: un contratto mediante il quale si può lasciare ad altri dopo la morte, o preparare a sé stessi delle risorse per un'età avanzata. Questa assicurazione si stipola mediante una *prima* che si paga annualmente o per una sola volta: essa può aver luogo per un certo numero di anni, e in un gran numero di circostanze contemplate nel contratto d'assicurazione. Le *prime* si determinano per ciascuna età, e secondo le professioni che presentano maggiore o minore probabilità di morte.

È questa l'economia generale del sistema d'assicurazione, del quale ci resta da esporre la teoria matematica.

Tutti i calcoli relativi alle assicurazioni riposano sulla probabilità della perdita dell'oggetto assicurato; è dunque essenziale il conoscere esattamente questa probabilità per potere stabilire il contratto di assicurazione sopra basi eque. Infatti, la situazione relativa dell'assicuratore e dell'assicurato può esser paragonata a quella di due giuocatori, le probabilità dei quali per la vincita siano diseguali, e che vogliano compensare questa disegualianza con quella delle loro scommesse. Ora una tal compensazione ha luogo tutte le volte che il rapporto delle scommesse è eguale a quello delle probabilità rispettive; infatti, per fissar meglio le idee, supponiamo che la vincita della partita dipenda da un tiro di dado, del quale uno dei giuocatori ha in favor suo cinque facce, mentre l'altro non ne ha che una; il numero totale dei casi essendo sei, e questi casi avendo tanto gli uni quanto gli altri la stessa probabilità, il primo giuocatore può dunque scommettere cinque contro uno che vincerà la partita; e per conseguenza la sua posta deve essere cinque volte maggiore di quella del secondo. Se dunque le due poste rinite formano una somma di 120 franchi, quella del primo giuocatore deve essere i *cinque sestii*, e quella del secondo il *sesto* di questa somma; vale a dire 100 franchi e 20 franchi. Lo stesso ha luogo per un assicuratore che si obbliga di pagare una somma di 120 franchi nel caso della distruzione di un oggetto qua-

lunque, quando la probabilità di questa distruzione è eguale a $\frac{1}{6}$; i casi per

lui favorevoli sono allora in numero di cinque, e può scommettere 5 contro 1 che il caso funesto non avverrà. La *prima* dell'assicurato, per la stessa ragione, deve essere la quinta parte di ciò che arrischia l'assicuratore, o la sesta parte della somma totale che deve appartenere all'uno o all'altro all'esito dell'avvenimento. Così, nel caso presente, questa *prima* deve essere il sesto di 120 franchi, o 20 franchi, i quali, essendo pagati anticipatamente, riducono a 100 franchi la perdita reale dell'assicuratore nel caso per lui sfavorevole.

Se si potesse ammettere che facendo nel tempo stesso sei operazioni simili l'assicuratore non dovesse incontrarne che una sola funesta, è chiaro che allora egli non avrebbe nè guadagno nè perdita, poichè riceverebbe 6 *prime* di 20 franchi, o 120 franchi, e pagherebbe 120 franchi per l'oggetto perduto. In questo caso, per ottenere un guadagno gli basterebbe di esigere una *prima* un poco maggiore.

Ma la probabilità $\frac{1}{6}$ non significa che in 6 operazioni una sola è necessariamente funesta, e s'ingannerebbe grandemente colui che l'interpretasse in questa maniera; poichè, per continuare il nostro paragone, è vero che la probabilità di fare il punto 2, per esempio, gettando un dado è $\frac{1}{6}$, ma si può nonostante gettare

il dado 10 volte, 20 volte, 30 volte ec., senza fare questo punto; come al contrario questo punto si può presentare più volte di seguito. Tuttociò che può concludersi da questa probabilità $\frac{1}{6}$ si è, che in un gran numero di tiri dello

stesso dado, il punto 2 si presenterà nel rapporto di 1 a 5, e la probabilità di ottenere questo rapporto aumenterà col numero dei tiri (*Vedi PROBABILITÀ*). Così l'assicuratore non può sperare una esatta compensazione dei casi di guadagno e di perdita che ampliando il circolo delle sue operazioni, e le *prime* debbono esser calcolate in modo da indennizzarlo non solamente de'suoi rischi generali, ma ancora da pagarli il frutto dei suoi capitali e le sue spese d'amministrazione.

Da un altro canto, la probabilità della perdita di un oggetto non può valutarla colla stessa certezza di quella dei casi di un giuoco, le condizioni del quale sono determinate. Nel giuoco, la probabilità è dedotta *a priori* dal numero dei casi possibili, e l'esperienza non fa altro che confermare i calcoli. In quanto agli oggetti delle assicurazioni, la probabilità non può dedursi che *a posteriori*, e l'esperienza deve precedere i calcoli.

Non è che per mezzo di ricerche statistiche che possono ottenersi gli elementi del calcolo delle assicurazioni; e, dobbiamo pur dirlo, questi elementi sono ancora troppo incompleti perchè possa stabilirsi attualmente una teoria rigorosa. Le probabilità della vita umana, sebbene conosciute molto meglio di tutte le altre, non sono nemmeno determinate in un modo certo; così la teoria attuale delle assicurazioni deve considerarsi soltanto come un' approssimazione presso a poco sufficiente, che ulteriori studj ed osservazioni dovranno in seguito perfezionare.

Le assicurazioni contro i *rischi marittimi*, gl'*incendj*, la *grandine* ec., e in generale contro la distruzione di un oggetto materiale qualunque, si calcolano nello stesso modo. Si valuta l'oggetto da assicurarsi: l'importare di questa stima è la somma che l'assicuratore si obbliga di pagare nel caso di perdita; e questa stessa somma, moltiplicata per un fattore costante, che è la probabilità supposta della perdita, forma la *prima* dovuta dall'assicurato. Così, l'esperienza avendo dimostrato che perisce meno di uno per cento dei bastimenti balenieri inglesi, il fattore costante adottato dalle compagnie d'assicurazione per questi bastimenti

è $\frac{1}{100}$; il proprietario di un tal vascello deve dunque pagare una *prima* eguale

alla centesima parte del valore della sua proprietà per farla assicurare.

Le assicurazioni sulla vita si distinguono in due grandi divisioni: 1^o. le assicurazioni le cui somme debbono pagarsi dopo la morte degli assicurati; 2^o. le assicurazioni pagabili durante la vita degli assicurati. Queste divisioni presentano una moltitudine di combinazioni particolari, di cui si possono esaminare i dettagli negli statuti delle compagnie d'assicurazione. Quanto ai calcoli che esigono queste combinazioni, essi sono tutti fondati sulle probabilità della vita umana; ma siccome la loro teoria è intimamente collegata con quella delle rendite *vitalizie*, così noi rimandiamo il lettore all'articolo che tratta di queste rendite. *Vedi* **ANNUALITÀ**.

La Francia possiede poche opere sulle assicurazioni; e rinviene che l'eccellente trattato di Sir Francis Baily intitolato: *The Doctrine of annuities and assurances*, Londra, 1810 in-8 non sia stato tradotto. Il lettore frattanto, oltre le opere citate all'articolo **ANNUALITÀ**, potrà ancora consultare le seguenti: Price, *Observations on reversionary payments, ec.*, Londra, 1812, in-8; Milne, *On the valuation of annuities and assurances, ec.*, Londra, 1815, 2 vol. in-8; Finlaison, *On the evidence and elementary facts on which tables of life are founded*, Londra, 1829, in-4; Gompertz, *Estimation of the value of life contingencies*, nelle *Transazioni filosofiche* per l'anno 1825; Fourier, *Rapport sur les établissements appelés tontines*, Parigi, 1821, in-4; ed una memoria dello stesso Fourier sulla teoria analitica delle assicurazioni, inserita nel Tom. X, pag. 177 degli *Annales de chimie et de physique*.

ASSIFUGA (Mecc.). Da *axis*, *asse*, e da *fugere*, *fuggire*. È questo un epiteto che si dà alla forza colla quale un corpo, che gira intorno ad un asse, tende ad allontanarsi da quest'asse. Questa forza è propriamente una forza *centrifuga*, il cui centro è nell'asse. *Vedi* **CENTRIFUGA**.

ASSIOMA. Da $\alpha\tau\omicron\mu\alpha$, *degan*. Proposizione evidente per sé stessa, e che non ha bisogno di dimostrazione. Per esempio:

Il tutto è maggiore della sua parte.

Due quantità eguali ad una terza sono eguali tra loro.

Quando due figure, essendo poste l'una sull'altra, si cuoprono esattamente, esse sono eguali, ec. Vedi ALGEBRA n.º 5.

Le matematiche pure sono fondate sopra assiomi, e partecipano perciò della certezza di queste proposizioni.

ASSOLUTO (*Algebra*). Termine o numero assoluto. Questa è la quantità o il numero interamente determinato che forma uno dei termini di un'equazione, ed al quale si eguaglia la somma di tutti gli altri. Così, nell'equazione $x^3 + px^2 + qx = r$, r è il numero assoluto, VITTA lo chiamava *homogeneum comparationis*; ma i matematici moderni lo pongono semplicemente nella stessa classe degli altri coefficienti delle potenze dell'incognita x , considerandolo come quello di x^0 . Il termine assoluto di un'equazione qualunque è formato sempre col prodotto di tutte le sue radici. (Vedi EQUAZIONE e RADICE).

ASSURDO. Riduzione all'assurdo: forma di ragionamento col quale si prova la verità di una proposizione, partendosi dal supporre che la proposizione sia falsa, e ricavando delle conseguenze assurde da questa ipotesi; ciò che necessariamente obbliga a concludere che la proposizione deve esser vera. Questo modo di dimostrazione non è soddisfacente che quando si applica a proposizioni inverse o reciproche di altre proposizioni direttamente dimostrate. Così, per esempio dopo avere stabilito, con un ragionamento diretto, che, in un triangolo isoscele, la perpendicolare abbassata dal vertice sopra la base, divide questa base in due parti eguali, se si volesse dimostrare la proposizione reciproca, che la retta che passa per il vertice e il mezzo della base di un triangolo isoscele è perpendicolare a questa base, si dovrebbe impiegare la riduzione all'assurdo, perchè difatti questa seconda proposizione è talmente legata alla prima, che non possiamo supporla falsa senza rovesciare questa prima, la di cui verità si è dimostrata evidente. Ma quando si tratta di dimostrare una proposizione diretta, la riduzione all'assurdo non può più soddisfare l'intelletto; poichè essa niente insegna sopra l'origine della proprietà che fa l'oggetto di questa proposizione. Diversi autori moderni hanno fatto un abuso deplorabile di questo metodo di dimostrazione, per evitare, in geometria, la considerazione dell'infinito, senza la quale è però impossibile di avere l'idea di una linea curva.

ASTAROT (*Astron.*). Uno dei nomi del pianeta Venere.

ASTEREOMETRO, o **ASTROFANOMETRO** (*Astron.*). Strumento inventato da Jeaurat, e destinato a trovare meccanicamente e senza nessun calcolo il levare e il tramontare degli astri, dei quali si conosce la declinazione e l'ora del passaggio per meridiano. La descrizione di questo strumento è stata data dallo stesso Jeaurat nelle *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Parigi* per l'anno 1779. Esso fu eseguito dal marchese di Courtanvaux.

ASTERIO (*Astron.*). È questo il nome che è stato dato ad uno dei *Levieri* o *Cani da caccia*, costellazione boreale immaginata da Evelio.

ASTERISMO (*Astron.*). Dal latino *asterismus*, derivato dalla greca voce *ἀστήρ*, stella. Parola che si usava anticamente nel linguaggio astronomico per costellazione; ma in oggi serve a indicare qualunque piccolo gruppo di stelle, che si vuol distinguere dal resto della costellazione nella quale si trova, o che non fa parte di alcuna particolare costellazione.

ASTEROIDI (*Astron.*). Nome dato da Herschell ai quattro nuovi pianeti, *Giunone*, *Pallade*, *Vesta* e *Cerere*, scoperti dagli astronomi Piazzi, Olbers e Harding. Ciò ha fatto dire ad alcuni, senza dubbio a torto, che il celebre Inglese non voleva accordare che a sè solo l'onore di avere scoperto un pianeta.

ASTEROPE (*Astron.*). È questo il nome di una delle sette stelle principali che compongono il gruppo delle Plejadi.

Diz. di Mat. Vol. I.

Go

ASTRALE (*Astron.*). Si dà questo epiteto a ciò che ha rapporto agli astri, o a ciò che dipende dalle stelle e dagli astri, come *anno astrale* o *sidereo* ec. Questa parola però è poco in uso.

ASTRATTO. Matematiche *astratte* o *matematiche pure*. Leggi dei numeri e dell'estensione considerate in loro stesse, e astrazione fatta dagli oggetti sensibili ai quali si possono applicare.

ASTRATTO (*Arim.*). Numero *astratto*. Numero considerato come esprimente una collezione di unità indipendente da qualunque oggetto particolare. Per esempio, 5 è un numero astratto, quando esso non indica oggetti determinati; ma quando esso indica 5 franchi o 5 metri, il numero 5 è allora un numero concreto. (*Vedi* CONCRETO).

ASTREA (*Astron.*). Nome che gli antichi astronomi davano alla costellazione della *Vergine*. *Vedi* VERGINE.

ASTRO (*Astron.*). Dalla parola greca ἀστήρ, *astro*, *stella*. Parola generale che si applica alle stelle tanto fisse che erranti, cioè alle stelle propriamente dette, ai pianeti, e alle comete. *Vedi* STELLA, PIANETA, e COMETA.

ASTROCHION, o **ASTROKYON** (*Astron.*). Uno dei nomi della bella stella di prima grandezza, più comunemente conosciuta sotto il nome di *Sirio*.

ASTRODITTO (*Astron.*). Strumento astronomico inventato da Wetschel, per mezzo del quale più persone possono vedere lo stesso astro nel medesimo istante.

ASTROFANOMETRO (*Astron.*). *Vedi* ASTEREOMETRO.

ASTROGNOSIA (*Astron.*). Nome di una parte dell'astronomia, che ha per oggetto la cognizione delle stelle fisse, vale a dire i loro nomi, i loro ordini, le loro situazioni, ec.

ASTROKYON (*Astron.*). *Vedi* ASTROCHION.

* **ASTROLABIO** (*Astron.*). Dal greco ἀστήρ, *astro*, e λαμβάνω, *prendere*. Strumento di astronomia del quale si servivano gli antichi per le loro osservazioni: ve ne erano di molte specie, o per dir meglio fu dato lo stesso nome a molte specie di strumenti differenti; anzi, stando all'antico significato della parola *astrolabio*, che serve ad esprimere uno strumento qualunque destinato a prendere le situazioni o posizioni degli astri, qualunque dei nostri moderni strumenti astronomici destinati allo stesso oggetto potrebbe ricevere lo stesso nome. I più antichi astrolabi si componevano di varj circoli, e sembra che somigliassero molto alle nostre sfere armillari.

Il primo e il più celebre strumento di questo genere è quello che fece costruire Ipparco ad Alessandria, e che gli servì per le sue osservazioni astronomiche. Tolomeo nel capitolo primo del libro quinto della sua *Sintassi* descrive un astrolabio, e sebbene non faccia espressa menzione d'Ipparco, pure è molto probabile che lo strumento da lui descritto non sia che quello medesimo del suo illustre predecessore; poichè è noto che Tolomeo fu il più fedele seguace dei metodi e delle opinioni d'Ipparco. La descrizione di Tolomeo è la seguente. Si prendano due circoli perfettamente eguali e si fissino ad angolo retto tra loro: uno di essi rappresenterà l'eclittica e l'altro il coluro solstiziale. Nei poli dell'eclittica si collocino due piccoli cilindri, che sporgano tanto al di dentro quanto al di fuori del lembo del coluro solstiziale, ed in questi cilindri come perni si adattino due circoli, l'uno interno e l'altro esterno, i quali girino liberamente al di dentro e al di fuori dei primi due circoli: è evidente che questi due circoli mobili sono due circoli di longitudine. Dentro il circolo interno, e nel suo piano, si ponga un altro circolo sottile che vi stia forzato, e vi scorra a fregamento, ed abbia inoltre due piccoli fori diametralmente opposti, per mezzo dei quali possa osservarsi la latitudine di un fenomeno celeste qualunque, quando lo strumento è convenientemente disposto, vale a dire quando il circolo che rappresenta l'eclittica si tro-

va nel piano della vera eclittica. Per far ciò, si trovano fissati due perni cilindrici nel coluro solstiziale nei punti corrispondenti ai poli dell'equatore, e l'intero apparato è sospeso dentro un circolo che è inserito in questi perni, e che si pone nel meridiano del luogo dell'osservazione. L'eclittica essendo divisa sul suo lembo in 360 parti, si porta il circolo esterno di longitudine alla divisione corrispondente alla longitudine del sole che vien data dalle tavole solari, e quindi si gira tutto lo strumento intorno ai poli dell'equatore fintantochè il piano dell'eclittica e il piano del circolo esterno di longitudine passino pel sole. Lo strumento è allora disposto convenientemente, il circolo interno di longitudine e il suo lembo che scorre armato dei due fori si dirige verso un astro, e l'angolo che si legge su questo circolo è la latitudine dell'astro, mentre l'angolo che si legge sull'eclittica ne è la longitudine.

Quando si conosce la posizione di una stella, basta fare in modo che il circolo esterno di longitudine passi per la stella, dopo averlo fissato alla longitudine conosciuta di questa stella. Quindi si procede nell'osservazione come abbiamo detto di sopra.

Non pare che alcun sostanziale miglioramento sia stato fatto a questa costruzione dagli Arabi, i quali peraltro fecero molto uso di astrolabi a grandi dimensioni.

Lo strumento però che nei secoli posteriori si chiamò *astrolabio* non è propriamente che il *planisfero* di Tolomeo modificato in più e diverse guise, come può ampiamente vedersi nelle diverse opere che in appresso citeremo.

L'astrolabio planisfero è la proiezione dei circoli della sfera sopra un piano; e per mezzo di esso si trovano le ascensioni rette, le declinazioni, le latitudini, le longitudini, ec.

Nell'astrolabio planisfero di Tolomeo, l'occhio supponevasi al polo, l'equatore era il piano di proiezione, e tutti i meridiani erano linee rette.

Nell'astrolabio di Gemma Frisio, l'occhio si supponeva nel punto del vero oriente o del vero occidente e precisamente nel punto equinoziale, e il piano di proiezione era il meridiano: col l'equatore e l'eclittica erano figurate con linee rette, come pure il coluro degli equinozi: queste rette però erano divise disegualmente, perchè in questa proiezione, che dicesi *stereografica*, i gradi sono più piccoli verso il centro che verso gli orli.

Nell'astrolabio dello spagnolo Rojas, l'occhio è supposto ad una distanza infinita, il piano di proiezione è il meridiano, e in questa proiezione, che dicesi *ortografica*, i gradi sono più grandi nel centro che sugli orli. Un tale astrolabio si dice ancora *Analemma*. Vedi *ANALEMMA*.

Come abbiamo detto di sopra, il significato della parola *astrolabio* portava ad applicare questo nome a qualunque strumento atto a determinare la posizione degli astri, ed infatti gli astrolabi erano d' infinite e variate forme. Il lettore curioso di approfondire questa materia potrà consultare le seguenti opere: Gemma Frisio, *De astrolabio catholico et usu ejusdem*, Anversa, 1556, in-8; Clavio, *Astrolabium* (nel tomo terzo delle sue opere impresse a Magonza nel 1612 in-fol.); Adriano Mezio, *Primum mobile*, Amsterdam, 1633; Bion, *Traité de la construction et des principaux usages des instruments de mathématiques*, Parigi, 1759, in-4; lo stesso, *Usage des astrolabes tant universels que particuliers*, Parigi, 1702, in-4; Stöffler, *Elucidatio fabricae usque astrolabii*, Colonia, 1594, in-8; Cadamosto, *Compendium in usum astrolabii*, Milano, 1507, in-4; Manrico, *Opuscula*, ec. La differenza sostanziale fra gli astrolabi degli antichi e gli strumenti circolari dei moderni è la seguente: 1° Gli antichi cercavano di formare l'astrolabio di due circoli, in modo da poter misurare nel tempo stesso la latitudine e la longitudine, ovvero la declinazione e

l'ascensione retta; mentre i moderni il più delle volte misurano una sola di queste due cose. 2° Gli antichi strumenti erano fatti da rivolgersi per trovare l'astro, oppure avevano un circolo che girava intorno ai poli dell'equatore o dell'eclittica, secondochè volevasi misurare la declinazione o la latitudine; i moderni, al contrario, nella maggior parte fissano i loro strumenti nel meridiano, e aspettano il passaggio della stella. Ma il quadrante murale, lo strumento dei passaggi, il teodolito, i circoli ripetitori, ec. sono astrolabi nel rigoroso significato di questa parola.

L'*astrolabio marittimo* è uno strumento del quale si servivano i marinari nel corso delle navigazioni, per misurare l'altezza del polo o degli astri. Alcuni attribuiscono l'invenzione di questo astrolabio a due medici ebrei per nome Roderico e Giuseppe, stabiliti a Lisbona, i quali furono incoraggiati dal re Giovanni II. Ma siccome gli Ebrei erano in quei tempi in continua relazione coi Mori, i quali fino d'allora facevano uso dell'astrolabio, unico strumento di cui ancora si servano nelle loro navigazioni, pare probabile che i citati medici prendessero questo strumento dai Mori, i quali essi pure probabilmente avevano imparato dai Greci a fabbricarlo e ad adoperarlo; per la descrizione di questo strumento, che dopo l'invenzione del quadrante di Hadley è andato affatto in disuso, si vedano i trattati di sopra citati di Bion.

- **ASTROLOGIA.** Se questa parola si usasse in un senso analogo a quello di *geologia*, *fisiologia*, *patologia*, ec. servirebbe a indicare la *scienza delle stelle*; ma in oggi una tal voce, tanto se sia sola quanto se sia accompagnata dall'epiteto *giudiziaria*, serve a indicare la pretesa e vana arte di predire gli avvenimenti futuri per mezzo degli aspetti, delle posizioni e delle influenze dei corpi celesti. Sembra che le due parole *astronomia* e *astrologia* avessero presso i Greci un medesimo significato, almeno fino all'era cristiana. Cicerone nel primo libro *De Officiis* si serve della parola *astrologia* per indicare la scienza astronomica.

L'astrologia, nata in Caldea, passò nell'Egitto, donde fu portata in Grecia e quindi in Italia. Da principio non fu che un abuso dell'astronomia, e si limitava a pronosticare come si dovesse muovere il tempo al caldo o al freddo, a pioggia o a siccità o a vento, per ciascun giorno degli anni a venire, in ragione delle varie congiunzioni degli astri; ma in breve acciò talmente gli animi, che formò una supposta scienza, o facoltà affatto isolata.

Siccome l'astrologia giudiziaria non trova il suo fondamento che nella superstizione e nella ignoranza dei popoli, così essa si vede coltivata presso tutte le nazioni, almeno nelle prime epoche di civilizzazione. I Chinesi, gl'Indiani, gli Egiziani, i Caldei, i Greci, i Romani ne sono stati gli schiavi. Gli Arabi, che probabilmente l'avevano ricevuta dai Greci, dai Caldei e dagli Egiziani, la trasmisero ai Cristiani. Invano la Chiesa volle combatterla come un resto di paganesimo; l'astrologia trionfò de' suoi nemici, e con vergogna nostra dobbiamo dire che le due più celebri università d'Italia, quelle di Bologna e di Padova, ebbero nel XIII e XIV secolo cattedre e professori di questa folle scienza. I principi, e le repubbliche tenevano astrologi stipendiati. Federigo II riponeva in essi una cieca fede, nè senza averli consultati intraprendeva alcuna cosa d'importanza. Fra gli astrologi del tredicesimo secolo dobbiamo con rincrescimento annoverare due grandi talenti, Pietro d'Abano e Guido Bonatti, il primo uno de' più valenti medici del suo tempo e il secondo dottissimo astronomo. Sull'influenza dell'astrologia in Italia nel medio evo si veda il Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie*, Parigi, 1838, in-8, Vol. II pag. 51 e segg.

La vana arte degli astrologi si mantenne in credito fintantochè durò l'ignoranza nel popolo e nei grandi, nè vi voleva meno di quella maravigliosa luce che dall'Accademia Platonica, fondata nel XV secolo in Firenze da Lorenzo de'Mo-

dici, si sparse in Italia, per operare quella rivoluzione che la forza avrebbe innanzi tentata. Allora si cominciarono ad esaminare e a consultare i sogni dell'astrologia giudiziaria, e l'osservazione e l'esperienza presero il luogo della cieca abitudine e dell'impostura. A mano a mano scemò il credito dell'astrologia, e finalmente cadde in un meritato disprezzo quella vana scienza che ad altro non serviva che a propagare la superstizione e ritardare i progressi della filosofia.

Sebbene siano ormai andate in disuso le imposture astrologiche, non crediamo fuor di proposito il dar qui, come un soggetto di mera curiosità, un'idea dei principi fondamentali su cui erano esse basate.

Nei globi rappresentati dalle figure 1 e 2 della Tavola XXXVI, il circolo proiettato orizzontalmente rappresenta l'orizzonte, e il circolo segnato con doppia linea il meridiano: gli altri quattro circoli sono condotti ad egual distanza dal meridiano e dall'orizzonte, per i punti di mezzodi e di tramontana di quest'ultimo, e dividono così l'intera sfera celeste in dodici parti eguali. Questi circoli rimangono invariabilmente fissi, mentre la rivoluzione diurna della sfera si eseguisce intorno ai poli del mondo indipendentemente da questi circoli. Le dodici divisioni sono chiamate le dodici case del cielo, e sono numerate nell'ordine nel quale si alzerrebbero, se i circoli accompagnassero la rivoluzione diurna girando intorno ai punti dell'orizzonte nei quali s'intersecano. Ogni pianeta passa per le dodici case del cielo nello spazio di ventiquattrore, ma non si trova sempre nella stessa casa colle stesse stelle che per quelli che abitano sotto l'equatore; poichè è chiaro che, affinchè due corpi celesti siano sempre nella stessa casa, bisogna che la rotazione intorno ai poli del mondo coincida perfettamente con quella che avrebbero le case del cielo se si movessero intorno alla linea orizzontale che va da mezzodi a tramontana, il che non ha luogo che per l'equatore, dove unicamente l'asse del mondo coincide con questa linea. Il punto principale che si considera in ciascuna casa è la parte dello zodiaco che vi si trova compresa; e il luogo che un pianeta occupa in una casa è la sua distanza dal più elevato dei due circoli che formano il limite della casa, distanza che si misura sull'zodiaco.

Gli astrologi solevano rappresentare le dodici case del cielo nel hizzarro modo che si vede esposto nella figura 3 della Tavola XXXVI. I dodici triangoli rappresentavano le dodici case, nell'ordine indicato dai numeri romani. L'epoca è il 16 Aprile 1784 a ore sei e mezzo di mattina. Sulla linea che forma il confine di ciascuna casa è scritto il punto dell'eclittica che si trova precisamente su questo confine. Per esempio, sull'estremità della duodecima casa che sta per alzarsi, si trova il punto dell'eclittica che è a $4^{\circ} 14'$ dei Gemelli. Il limite tra la nona e la decima casa è il primo grado dell'Aquario. Il segno dello Scorpione è situato interamente nella sesta casa, i limiti della quale si trovano nella Libbra e nel Sagittario. I pianeti sono posti nelle case nelle loro proprie posizioni: così Mercurio (☿) apparisce essere nella duodecima casa a $22^{\circ} 46'$ dalla linea che separa la duodecima dall'undecima casa.

Ma su tutto quello che abbiamo detto è da notarsi che i più celebri astrologi erano di opinioni differentissime. Di mezzo all'oscurità e alla confusione che regna nei vecchi trattati possiamo rilevare che alcuni conducevano i circoli determinanti le case in modo da dividere in dodici parti eguali l'eclittica, invece del primo verticale come abbiamo fatto noi; altri conducevano i circoli pei poli del mondo invece di condurli pei punti sud e nord dell'orizzonte. Da tali diversità di opinioni i futuri destini degli uomini erano resi come nonnè vede incertissimi; o ciò che veramente desta il riso è il vedere con qual serietà e convinzione d'animo i seguaci di un sistema compiangessero la cecità degli altri astrologi, come se essi soli avessero fondate ragioni per sostenere la propria opinione. Per esempio, Peletarius o Pelletier, che scrisse nel 1563 sull'oroscopo, così si esprime:

« Alenni dividono in parti eguali l'orizzonte, altri un circolo verticale, altri l'equatore, altri l'eclittica, altri un parallelo; per lo che non dobbiamo maravigliarci che un'arte di per sé stessa tanto difficile sia involta in tanta oscurità: infatti, come è egli possibile di vedere una conformità di destini in uno specchio che è stato sfigurato in tante maniere? » Il suo sistema è quello della divisione eguale dello zodiaco, e l'argomento che egli adduce per sostenerlo, indipendentemente dall'autorità degli antichi scrittori, è l'inconvenienza di lasciare i poli dell'eclittica senza far nulla in una materia che sì strettamente concerne lo zodiaco: *minimeque convenit zodiaco suos polos esse inutiles in eo negotio quod zodiaco maxime proprium est*. Ei reputa una pretta sciocchezza il dividere in parti eguali l'equatore, e si trova pienamente soddisfatto dell'adotta ragione.

Chi poi volesse con maggiore estensione conoscere ed esaminare le stravaganze degli astrologi potrà consultare le opere di Arnaldo di Villanova, Pietro d'Abano, Avicenna, Ahen-Ezra, Raimondo Lullo, Paracelso, Cardano, Morin, ec., sui quali e su moltissimi altri si troveranno estese notizie in Collin de Planey, *Dictionnaire infernal*, Parigi, 1825-26, 4 vol. in-8; e in Garinet, *Histoire de la magie en France*, Parigi, 1818, in-8.

ASTRONOMIA (*Storia*). Da ἄστρο *astro*, e νόμος, *legge*. Scienza delle leggi degli astri o dei movimenti dei corpi celesti.

L'astronomia è uno dei rami i più importanti delle matematiche applicate. Essa è suscettibile di tre grandi divisioni: la prima è l'*astronomia sferica*, la quale si applica a spiegare i fenomeni celesti nell'ipotesi che la terra sia nel centro di una sfera della quale gli astri occupano la superficie; la seconda è l'*astronomia teorica*, scienza che espone i differenti rapporti dei corpi celesti tra loro, come la loro posizione relativa, la loro lontananza, la loro velocità, e che per conseguenza si applica a descrivere la vera forma dell'universo; la terza è l'*astronomia fisica*, che ha per oggetto di determinare le cause dei moti celesti mediante i principj della meccanica. Queste divisioni della scienza, stabilite da Keplero e dopo di lui da tutti adottate, ne comprendono tutta la teoria, l'applicazione generale della quale alle osservazioni, alla fabbricazione degli strumenti, e ai calcoli si chiama per opposizione *astronomia pratica*.

Diverse scienze, come la *geografia matematica*, la *navigazione*, la *gnomonica*, la *cronologia* e l'*ottica*, sono nate dall'astronomia, poichè sono dedotte dai principj sui quali essa riposa. Ma ognuna di queste suddivisioni della scienza esigendo un esame speciale sarà esposta altrove, nè qui ci occuperemo che dell'astronomia in generale, vale a dire della storia della sua origine, e de' suoi progressi presso le diverse nazioni della terra.

Nessuno può rivolgere lo sguardo al cielo e contemplare freddamente il grande spettacolo che gli si presenta. All'aspetto di quegli astri innumerevoli, di quei soli che popolano l'immensità e illuminano sistemi incogniti, un pensiero grave e religioso s'impossessa dell'uomo. Nella profonda meditazione, in cui lo pone quell'armoniosa e potente poesia del cielo, l'idea dell'essere eterno, che colla sua parola ha imposto leggi immutabili a quelle sfere, gli diviene più chiara e più palese. Non è più una semplice e vaga intuizione, non un bisogno di crescere un avvenire alla propria debolezza, ma una certezza consolante, che lo ingrandisce e riempie l'anima sua di una nobile e santa speranza. Poichè il pensiero dell'uomo, sublimandosi, s'afferma fin d'allora quei grandi misteri, come se fossero per lui una luminosa dimostrazione della potenza che gli è stata data di lanciarsi al di là della sfera limitata, nella quale subisce un esilio passeggero. Dovunque in quel libro immenso, in cui a lui solo fra tutti gli esseri erenti è dato di leggere, egli scopre la mano sapiente del Padre, che non ha potuto

dargli una vita intellettuale senza farla partecipe della sua propria immortalità. Tale senza dubbio fu la prima rivelazione dell'umano destino che sia stata fatta alla vostra ragione.

L'astronomia, che spiega l'ordine dell'universo e corregge le illusioni dei nostri sensi, dimostrando la verità laddove ingannevoli apparenze sembrano smentire maggiormente la scienza, è stata in ogni tempo per l'umanità un oggetto importante di ricerche e di studj, uno scopo prefisso alla sua intelligenza. Se vogliamo assicurarci dell'antichità de' suoi tentativi per cercarsi una convinzione sui moti degli astri; se vogliamo assicurarci di questa tendenza naturale che in lei si ritrova, di quel bisogno energico che essa prova di cercare qual legame misterioso, ma potente, esiste tra essa e i fenomeni celesti; si prenda un uomo qualunque bene orgoglioso, ma sprovvisto affatto delle nozioni le più elementari della scienza, e da un luogo dal quale possa scoprirsi un'estensione di cielo abbastanza grande, gli si spieghi in un linguaggio semplice e facile il sistema del mondo; vedremo quest'uomo, attento e pensoso, ascoltare in un raccoglimento profondo quelle parole nuove per lui, lo vedremo ambire successivamente le impressioni le più opposte, secondochè le dimostrazioni del suo maestro saranno ammesse o rigettate dalla sua ragione non ancora sviluppata. Qualche volta un sorriso di dubbio si presenterà sulle sue labbra; ma più spesso un sentimento improvviso di ammirazione e di stupore s'impadronirà di lui, e gli cagionerà quella emozione indefinibile che eccitava in noi gli accenti di una musica armoniosa, e la maestà severa dei grandi fenomeni della natura. Possiamo essere certi che nessuna delle parole che gli sono state dirette è andata perduta per lui, e che nella sua memoria resterà una traccia indelebile del colloquio avuto. E quando solitario e posto nelle stesse circostanze, in presenza del grande spettacolo del firmamento, i suoi sguardi si rivolgeranno involontariamente verso gli astri, dei quali gli saranno state svelate le leggi, si compiacerà di rindare nel suo spirito le lezioni sublimi che avrà ricevute. Alla sua volta, trovandosi in mezzo a individui della sua classe, sprovvisti di qualunque istruzione, come lo era egli stesso poc' anzi, quest'uomo ripeterà, con una soddisfazione quasi orgogliosa, tutto ciò che avrà potuto ritenere delle cognizioni comunicategli. Intorno a lui sorgeranno certamente dei contraddittori; e, tra' suoi compagni meravigliati, molti si faranno ad opporre alle sue spiegazioni la testimonianza dei loro sensi e dell'esperienza. Ben presto nuove ipotesi nasceranno da queste discussioni; e per porvi un termine bisognerebbe che la scienza stessa colle sue prove infallibili venisse a dissipare tutti i dubbj, e a schiarire tutte le supposizioni che questa specie di tradizione avrebbe fatto nascere tra gli uomini. Tali sono presso a poco le vicissitudini della verità sulla terra: la storia dell'uomo, che adesso non abbiamo fatto che supporre, la ritroveremo fedelmente, con tutti i suoi periodi di ricerche, di scoperte, di dubbj e di certezze, nella storia dell'astronomia.

Non si può stabilire, in un modo conforme ai principj rigorosi e positivi della scienza, l'epoca certa delle prime osservazioni astronomiche: noi crediamo di avere sufficientemente dimostrato che questi tentativi spontanei, e sempre isolati, appartengono alla prima infanzia della società. Per questa ragione, avanti di adottare un ordine cronologico rigoroso, esporremo primieramente le cognizioni primitive dei popoli nell'ordine della loro antichità presunta.

Da tutte le tradizioni storiche, e da numerosi fatti geologici risulta evidentemente che in un'epoca recente nei tempi il globo terrestre è andato soggetto ad una sommersione più o meno completa, ed ha subito modificazioni tali che la maggior parte dell'umana generazione presente a quella catastrofe ha dovuto perire. Senza entrare adesso nell'esame di una questione, che secondo la nostra opinione è puramente filosofica, e che non ha che una lontana relazione col sog-

getto che ci occupa, diremo che sulla terra non è rimasto nessun monumento che possa indicare il grado di civiltà al quale era giunta l'umanità all'epoca di quel disastro. Secondo l'ipotesi la più conforme alla ragione, ipotesi alla quale le più recenti scoperte della geologia danno un carattere deciso di certezza e di verità, le acque dell'oceano coprirebbero in oggi continenti primitivamente abitati, e la maggior parte di quelli che adesso abitiamo sarebbero stati il loro letto anteriore. È dunque impossibile di ammettere, come fatti degni di esser citati in appoggio delle ricerche scientifiche, le congetture azzardate dei più antichi scrittori sull'avvenimento terribile che sembra aver separato per sempre la storia misteriosa della razza antidiluviana da quella che le è succeduta. Bisogna dunque rigettare come una favola, ripetizione incerta di qualche vaga e antica tradizione, le asserzioni di Giuseppe e di Manetone, fondate, secondo l'uno, sulle colonne fabbricate di pietra e di mattoni, sulle quali i padri del genere umano avrebbero scolpito i principj della scienza astronomica e la predizione del cataclismo che doveva sconvolgere la terra; e secondo l'altro, sulle pretese colonne egiziane di *Soti* o di *Thot*. Manetone non ostante ha osato parlare di quest'ultimo monumento in modo da far credere che sia stato consultato da scrittori poco anteriori a lui, che viveva nel terzo secolo avanti l'era cristiana. È primariamente da supporre che Giuseppe non abbia immaginato le colonne di Adamo e di Seth che imitando le idee di Manetone, e che così queste due tradizioni abbiano un'origine comune. Ma, se al tempo di quest'ultimo storico esisteva ancora in Egitto nella memoria dei sacerdoti un monumento simile, come mai non sarebbe esso stato conservato dagli uomini come un oggetto sacro, o in qual maniera Manetone, il solo in tutto l'Egitto dotto e religioso, avrebbe potuto sentir parlare di questi titoli venerandi e negletti, che attestavano le triste vicende e la grande antichità del genere umano, e dei quali ci solo per la prima volta invoca la testimonianza?

Ci siamo arrestati un momento su queste ipotesi puerili, perchè ci è sembrato utile di dimostrarne l'assurdità. Un pregiudizio troppo fortemente radicato nell'uomo fa sì che esso abbia una maggior fiducia nei vecchi errori; ed una inclinazione irresistibile lo induce a giudicare della realtà di un fatto dall'antichità dello storico che lo riferisce. D'altronde conviene intraprendere lo studio della storia della scienza con un animo libero da qualunque preoccupazione priva di dimostrazioni esatte, e non cercare la sua vera origine che laddove la civiltà, formulando i suoi bisogni, comincia a far vedere i primi sviluppi dell'umana ragione.

1. Il dolce clima dell'oriente, il suo cielo puro, l'altezza di alenne delle sue montagne, nelle quali forse gli avanzi della razza antidiluviana cercarono un ultimo rifugio, e scesero quindi nelle vaste e fertili pianure irrigate dal Tigri e dall'Eufrate, dovettero di buon'ora richiamarvi gli abitanti e favorire la loro riproduzione. L'astronomia caldea è la prima infatti della quale la storia abbia conservato alcune osservazioni che annunziano il punto di partenza reale della scienza. Si sono fatte spesso due nazioni distinte dei Caldei e dei Babilonesi: quest'errore non ha poco contribuito a gettare la confusione nella cronologia, d'altronde sì vaga e sì oscura, delle razze primitive. È certo che il nome di Caldeo, per ragioni che ci sono ignote e che sono sepolte nel segreto degli antichi idiomi orientali, fu dato in Babilonia ai saggi, o forse a un collegio di sacerdoti, o ad una setta filosofica. Quantunque non possa giudicarsi delle civiltà passate dalla nostra, vi è un fatto inerente alla specie umana, e comune a tutte le società, che cioè le cognizioni scientifiche, sempre eccentriche e individuali, sono dappertutto il retaggio di un piccolo numero di uomini. I Caldei, presi come popolo, non potrebbero dunque esser considerati come fondatori dell'astronomia; perciò ci

serviremo di questa espressione nel senso il più ristretto per indicare questi antichi osservatori degli astri.

Come tutte le cognizioni umane, le cognizioni astronomiche hanno dovuto avere una lunga infanzia. La divisione del tempo è stata dapprima il loro solo oggetto: infatti essa è il primo bisogno sociale che si faccia sentire in una riunione di uomini. Così l'astronomia dei Caldei dovette in principio consistere nell'osservazione dello zodiaco; in quella del levare e del tramonto eliaco delle costellazioni, vale a dire nei loro moti rapporto a quello del sole; in quella del cammino di quest'astro e delle fasi della luna. Bisognò quindi dare dei nomi a tutti questi astri per riconoscerli e seguirli nei loro diversi moti. Erasi osservato che il sole, la luna, e i pianeti allora conosciuti, non si allontanavano mai da una zona celeste, nella larghezza della quale si effettuavano tutti i loro moti. Questa osservazione suggerì l'idea del circolo immaginario che è stato chiamato *zodiaco*, e della sua divisione in dodici costellazioni.

Fu soltanto dopo esser giunta al possesso di queste prime nozioni, che l'astronomia caldea poté darsi ad osservazioni più regolari; ma queste nozioni figlio d'una esperienza acquistata tenendo dietro unicamente alle apparenze, e spesso ancora a tradizioni popolari trasmesse d'età in età, e senza nessun principio positivo, non potevano costituire per anche una scienza. Nientedimeno quelle antiche osservazioni sono preziose, e meritano d'esser raccolte dalla storia, poichè quanto maggiore è la difficoltà che noi proviamo a comprendere adesso come sia stato possibile di spiegare e di annunciare gli eclissi appoggiandosi sulle più stravaganti ipotesi del sistema del mondo, e spesso ancora senza basarsi sopra nessuna ipotesi, tanto maggior rispetto e ammirazione dobbiamo noi avere per quei primi tentativi dell'emancipazione intellettuale dell'uomo. Non intendiamo però che debbano introdursi e trasportarsi a far parte della scienza stessa questi vaghi calcoli dei fenomeni celesti. Le prime parole dell'infanzia hanno un'amabile ingenuità ed un vezzo a cui nessuno certamente può restare insensibile; ma questo linguaggio, che nell'età matura appena ci ricordiamo di aver balbettato, non forma un ramo essenziale dell'idioma nazionale.

I Caldei si vantavano di possedere una raccolta di osservazioni astronomiche che risalivano a 493,000 anni. Queste ridicole esagerazioni, che qualche volta incontreremo nei computi dell'astronomia antica, non meritano la pena di confutarle. Ma forse non è inutile il dire che esse sono il risultato dell'incoerenza che regna probabilmente nella determinazione primitiva dell'anno, e dell'assoluta ignoranza nella quale ci troviamo in questo rapporto. Supponendo, come tutto concorre a farlo credere, che questo lungo periodo caldeo debba ridursi ad esprimere semplicemente dei giorni, si troverebbe non ostante che i loro lavori astronomici risalgono ad un'alta antichità. Le più antiche osservazioni caldee che possiamo ammetterci sono quelle di tre eclissi di luna che sarebbero avvenute negli anni 719 e 720 avanti G. C., cioè negli anni 27 e 28 dell'era di Nahonassar, dei quali forse si è servito Tolomeo, tenendo dietro ad Ipparco che è stato il primo astronomo che abbia raccolto con discernimento e con metodo le osservazioni anteriori all'astronomia dei Greci. È pure naturale il pensare che queste osservazioni caldee non erano le prime che fossero state fatte a Babilonia. Esse suppongono evidentemente studj fondati sopra una lunga esperienza; ma i calcoli che si erano dedotti da questi primi tentativi non avevano il carattere di precisione e di certezza, che solo può rendere utile la cognizione degli eclissi. Simplicio, citato da Porfirio, assicura che Aristotile si fece comunicare, per mezzo di Callistene, una raccolta di osservazioni caldee che risalivano a 1900 anni avanti Alessandro. Ciò è possibile, quantunque Aristotile stesso non faccia menzione in nessun luogo delle sue opere di questo fatto che interessava tanto

la scienza; ma queste osservazioni, che presentemente sono perdute, non potevano esserlo al tempo di Tolomeo, che ha dovuto rigettarle fermandosi soltanto a quelle degli anni 719 e 720, di cui abbiamo parlato di sopra, perchè probabilmente non presentavano il medesimo grado di certezza e di esattezza di queste ultime. Rimane nonostante stabilito che i Caldei avevano la cognizione di molti periodi astronomici, dell'esattezza dei quali non siamo in grado di pronunziare nessun giudizio, a motivo dell'impossibilità precedentemente notata di determinare il significato che s'annettevano alla parola della loro lingua che corrisponde a quella di anno. Del resto, queste cognizioni, che hanno dovuto essere il frutto di lunghe osservazioni, non permettono nonostante nessuna supposizione favorevole all'antichità della scienza, se si considera soprattutto che le matematiche erano quasi affatto sconosciute ai Caldei, le cognizioni dei quali in questo rapporto si limitavano a un sistema di numerazione pratica, e che le loro opinioni sul sistema del mondo non avevano nulla di positivo e di soddisfacente.

2. I primordj dell'astronomia egiziana sono rimasti nascosti nel mistero che circondava, presso quel popolo siogolare, le istituzioni religiose, mte depositarie della sua civiltà e del suo sapere.

Si è voluto dedurre una conseguenza favorevole alle cognizioni astronomiche degli Egiziani dalla direzione esatta delle facce delle loro piramidi verso i quattro punti cardinali. Certamente il caso non può avere prodotto costantemente questa notevole disposizione dei loro più antichi monumenti; ma pure non ci è stata conservata nessuna delle osservazioni egiziane. È al contrario storicamente provato che gli astronomi della scuola d'Alessandria ricorsero alle osservazioni caldee. Da un'altra parte, molto tempo prima di quest'epoca, Talete, Pitagora, Eudossio e Platone erano andati dalla Grecia a visitare i sacerdoti egiziani, e dai loro colloquj attinsero le cognizioni che quindi trasportarono nella loro patria. Da che dunque nasce che i monumenti e i sacerdoti dell'Egitto sono rimasti muti pei dotti d'Alessandria? È questa, se così possiamo esprimerci, una di quelle singolarità della storia che debbono restar per sempre nel mistero, e che bisogna limitarsi a fare osservare.

Manetone, sacerdote egiziano di cui abbiamo già avuto occasione di parlare, compose, verso l'anno 260 avanti G. C., una storia del suo paese per l'istruzione di Tolomeo Filadelfo, figlio e successore di Lago. Non è possibile di scoprire se questo scrittore, compilando i racconti i più assurdi e facendo risalire l'origine della civiltà egiziana ad un'antichità favolosa, ripetesse opinioni ricevute dalla casta privilegiata alla quale apparteneva, ovvero se volesse ingannare acieutemente un principe di una razza straniera, ispirandoli un gran rispetto per una nazione, i progenitori della quale erano stati per un periodo immenso governati dagli stessi Dei. Sebbene non si possa trarre nessuna induzione certa da tutto questo caos storico, non ostante rimane provato da monumenti e da testimonianze non sospette, che l'Egitto, da un'antichità comparativamente molto remota, possedeva cognizioni astronomiche già molto elevate; che i movimenti di Mercurio e di Venere intorno al sole vi erano stati osservati; che esso aveva un anno civile di trecentosessantacinque giorni, diviso in dodici mesi di trenta giorni e in cinque giorni epagomeni; che l'osservazione del levare eliaco di Sirio, il cui ritorno era ritardato ogni anno di un quarto di giorno, vi aveva fatto stabilire il periodo zodiacale di 1461 anni che riconduceva i mesi e le feste, con poca variazione, nelle medesime stagioni. Finalmente gli zodiaci egiziani che si sono conservati fino a noi attestano la cura colla quale questo popolo osservava la posizione dei solstizj nelle costellazioni o segni della zona zodiacale. Gli si attribuisce pure lo stabilimento del periodo di sette giorni che formavano la settimana, e che erano posti nell'ordine in cui l'antica astronomia poneva il sole, la luna

e i pianeti, cioè secondo la loro distanza dalla terra, cominciando dalla più grande: Saturno, *Sobato*; Giove, *Giovedì*; Marte, *Martedì*; il Sole, *Domenica*; Venere, *Venerdì*; Mercurio, *Mercoledì*; la Luna, *Lunedì*. I cristiani, che per un motivo religioso hanno chiamato il giorno del Sole, *Domenica*, o *giorno del Signore*, hanno invertito del tutto quest'ordine, cominciando la settimana dal giorno della Luna, cioè dal *Lunedì*.

3. Nella parte orientale e settentrionale dell'Asia esiste un immenso impero, la popolazione del quale, omogenea, regolata dalle stesse leggi, e soprattutto dagli stessi costumi, eguaglia quella dell'intera Europa. Questa nazione, la cui civiltà tradizionale si perde in un passato senza limiti, e non partecipa punto della nostra, nazione di uomini che non si confondono con gli altri uomini, che non conoscono che i loro progenitori, e pretendono possedere una serie non interrotta di sovrani, dei quali i più prossimi a noi in questa strana cronologia regnavano in un'epoca in cui, secondo le nostre cognizioni storiche e religiose, l'uomo non era ancora apparso sulla terra, la nazione Chinesa finalmente, si vanta di conservare ne' suoi annali le osservazioni astronomiche le più antiche. Alcuni dotti, senza peraltro adottare le pretese storiche dei Chinesi, sembrano accordar loro quest'ultimo vantaggio sopra gli altri popoli. Noi però non adottiamo questa opinione; poichè basta soltanto esaminare con un poco di attenzione ciò che ci è stato comunicato di questi annali, per esser convinti che essi non offrono che un ammasso incoerente di fatti impossibili. Il libro il più antico della China, il *Chouking*, attribuito a Confucio o Confucio, e che sarebbe stato scritto circa duemila dugento sessant'anni fa, supponendo che sia stato conservato sopra copie autentiche, non attribuisce a quest'impero un'origine che urta in un modo così aperto tutte le idee della storia. Confucio comincia la storia della China da un imperatore chiamato Yao, che si occupò dello *scolo delle acque che si erano elevate fino al cielo*. Un tal fatto merita attenzione; poichè, dietro questo documento, Yao sarebbe vissuto 4166 o 3946 anni prima di noi, vale a dire un poco più di duemila anni avanti l'era volgare, epoca nella quale tutte le tradizioni ricevute collocano la fine del gran cataclismo che sconvolse il mondo, ed in cui si ritrova l'infanzia delle società. Fu, si aggiunge, circa mille anni dopo Yao, che l'imperatore Tchou-Kong fece le prime osservazioni astronomiche che possono essere utili alla scienza. Ma noi non crediamo di doverci arrestare in questo fatto, nè su quelli della congiunzione dei cinque pianeti e dell'eclisse del sole, che si pretende essere stati osservati nella China negli anni 2514 e 2436 avanti l'era nostra. Gli astronomi dell'ultimo secolo hanno voluto inutilmente sottoporre le pretese osservazioni di questi antichi fenomeni alle leggi del calcolo: da tutti i tentativi che sono stati fatti e dalla polemica alla quale hanno dato luogo non sono risultati che computi presso a poco tanto vaghi quanto quelli dei Chinesi. Non ostante, qualunque sia l'origine di questo popolo immenso, è certo che la sua astronomia pratica risale ad un'epoca molto antica. Da un'epoca remotissima, esisteva nella China un tribunale delle matematiche, incaricato di dirigere e verificare le osservazioni degli astronomi, dietro le quali questo tribunale fissava il calendario e annunciava gli eclissi. Noi ammettiamo ancora che vi si sono osservate da lungo tempo le ombre meridiane dello gnomone nell'epoca dei solstizj, e il passaggio degli astri pel meridiano: ma, avendo ancora riguardo al danno reale che dovette fare al progresso della scienza l'incendio dei libri chinesi, ordinato dall'imperatore Chi-Hoanti, verso l'anno 213 avanti l'era nostra, non possiamo fare a meno di maravigliarci che il cammino della civilizzazione abbia seguito presso questa nazione una direzione tutta opposta a quella che ha seguito in tutti gli altri luoghi, vale a dire che esso abbia cominciato da immense scoperte e finito coll'ignoranza la più completa dei primi elementi della

scienza. In generale, è certo che l'Europa è stata ingannata dai racconti maravigliosi che le sono stati fatti dai viaggiatori del medio evo, non escluso Marco Polo, intorno a una razza di uomini, le cui istituzioni bizzarre, i pregiudizj e i costumi si prestavano così bene, per la loro singolarità, a tutte le esagerazioni dell'immaginazione. I primi missionarii europei che penetrarono nella China vi trovarono le scienze in uno stato poco florido, e per conseguenza poco d'accordo coll'antichità dalla quale i Chinesi si vantavano di possederle. La loro geometria non consisteva che in alcune regole elementarissime dell'agrimensura. Cooscevano la proprietà del triangolo rettangolo, ma non ne facevano nessuna applicazione. La trigonometria sferica, sì essenziale all'astronomia, non era da essi conosciuta prima del X secolo, ed è probabile che la ricevessero dagli astronomi arabi. La loro aritmetica si limita anche oggigiorno ad alcune regole di un uso comune, e si eseguisce per mezzo di uno strumento molto simile ad un abacco. Essi si trovavano parimenti ai semplici elementi della meccanica e della navigazione, nè avevano la minima idea dell'ottica. Queste obiezioni che riposano sopra dati certi ci sembrano concludenti: esse ci dispenseranno dal parlare dell'astronomia indiana, e di quella degli antichi Parsi, le quali si trovano presso a poco nelle stesse condizioni, e presentano nelle loro osservazioni lo stesso grado d'inesattezza e di esagerazione cronologica.

4. Prima di entrare a parlare della storia autentica dell'astronomia, della quale d'ora innanzi seguiremo in Grecia i veri progressi e le scoperte scientifiche, fino al momento in cui le vicissitudini dei tempi transporteranno questa scienza nel seno di altre nazioni, ci sembra conveniente di qui richiamare alcune circostanze che sono evidentemente relative alla sua origine o al suo uso nei secoli che si chiamano eroici. Non vi ha dubbio che tutte le antiche cosmogonie, eccettuate forse una sola, hanno per base, quale più quale meno, le osservazioni astronomiche. I primi nomi dei pianeti sono dovunque quelli degli Dei. Il Sole ha regnato in Egitto al pari di Mercurio; il Tempo, considerato come il padre degli Dei, è personificato in Saturno, pianeta che si credeva il più lontano di tutti dalla terra. La Luna, sotto il nome di Diana, ha frequenti rapporti con gli abitanti del nostro globo. Tutto fa presumere che la storia degli eroi di tutti i miti antichi, i nomi dei quali sono rimasti a molte costellazioni, non sia che un'allegoria astronomica. Col tempo, queste allegorie e queste favole presero nello spirito delle società nascenti il carattere grave di credenze religiose. Ciò è possibile infatti; e si può anco, per mezzo di una facile erudizione, ritrovare nella storia delle civiltà trascorse, un numero considerabile di questi strani rapporti tra i fenomeni celesti e le teogonie; ma bisogna guardarsi, come da un errore pericoloso, di dare un'estensione senza limiti a questa ipotesi storica. È questo errore, sostenuto colla più cieca ostinazione, che ha ispirato sventuratamente un libro moderno, in cui la scienza e la ragione sono continuamente sacrificate a giudizi arbitrarj, esposti all'unico oggetto di sostenere un colpevole sistema. Noi intendiamo parlare dell'*Origine de tous les cultes*, produzione in cui l'audacia della menzogna, colorita di tutto le seduzioni di uno stile semplice e poco scientifico, pone le false idee del suo autore alla portata di tutte le intelligenze. Il piano di Dupuis fu evidentemente quello di terminare l'opera enciclopedica, provando che la religione cristiana non aveva altre basi che quelle che le antiche cosmogonie avevano preso dall'osservazione del moto degli astri, e che in conseguenza anco il cristianesimo non è che una favola astronomica. La stravaganza delle supposizioni, nelle quali si trova trascinato l'autore per coordinare tutte le parti del suo assurdo sistema, avrebbe dovuto dispensarci dal parlarne in questa parte di un lavoro serio, nel quale la scienza non ha da compiere che una missione speciale. Ma se le giovani generazioni alle quali c'indirizziamo hanno

molto da imparare, hanno pur molto da dimenticare; e noi consideriamo come uno dei nostri più sacri doveri di additar loro almeno gli scogli nei quali potrebbe forse andare ad urtare la loro intelligenza. Del resto, poche parole basteranno per mettere la teogonia di Mosè al coperto degli attacchi di Dupuis. L'origine del sistema del mondo non è nascosta nella *Genesi* sotto il velo delle allegorie; ma è un'esposizione; sublime per la sua semplicità, di una gran rivelazione, o, se si vuole, di una teosofia, che nulla ha che offenda la ragione. Quivi, non vi ha nulla di accattato dalle tradizioni umane. In principio Iddio creò il cielo e la terra: gli astri, la luce, il tempo sono l'opera della sua parola. Se nella storia dell'uomo ci sembra che qualche cosa non sia pienamente spiegata, ciò è perchè l'autore sacro non ha voluto che tradurre in linguaggio umano un problema, la spiegazione del quale non apparteneva alla missione che egli doveva compiere sulla terra. Ma è impossibile di trovare nel *Sepher* di Mosè alcun rapporto, nemmeno lontano, cogli elementi cosmogonici delle religioni dell'antichità. Se si riflette quindi che questo libro, che è il più autentico di cui l'umanità possa valersi, non contiene nulla che sia in opposizione colle leggi conosciute della scienza, e che ogni giorno, al contrario, le nuove scoperte vengono a giustificare i giudizi che vi si trovano sui fenomeni della natura, si converrà facilmente che non se ne deve intraprendere la lettura che con un sentimento profondo di venerazione e di amore per la verità.

Quando l'uomo ebbe trovato nei fenomeni celesti la realizzazione delle idee che si era formate sulla divinità, della quale avea divisa la potenza creatrice in una moltitudine di esseri immortali, si persuase facilmente che gli astri dotati di una intelligenza superiore esercitassero un'influenza diretta sul suo destino. Siccome avea fatto i suoi Dei con tutte le sue passioni, dovè abituarsi a considerarli nel punto di vista della loro doppia natura divina ed umana; e finalmente il desiderio di penetrare nell'avvenire, desiderio che si manifesta nell'uomo in tutti i gradi di civilizzazione per i quali passa, dovè fargli attribuire una somma importanza a certi segni o aspetti degli astri, dai quali il suo spirito, traviato da un'ingannevole esperienza, dedusse conseguenze assolute. Tali sono probabilmente le idee che diedero origine all'*ASTROLOGIA GIUDIZIARIA*, vale a dire alla pretesa arte di predire l'avvenire per mezzo degli aspetti, delle posizioni e delle influenze dei corpi celesti. È presso il popolo che si suppone essere stato il primo ad avere nozioni astronomiche, che si trovano pure le prime tracce dell'astrologia; tanto è vero che nello sviluppo intellettuale dell'uomo, l'errore tiene dappresso alla verità. Questa parola servì per lungo tempo a giudicare la scienza stessa; il che dimostra che nell'antichità non si faceva differenza nessuna tra l'arte congetturale di alcuni impostori e la cognizione scientifica delle leggi degli astri. I Caldei e gli Egiziani sembrano avere avuto una inclinazione decisa per l'astrologia; ed è anche in oggi che si appoggiano sulla loro autorità i ciarlatani presso il volgo. È probabile che questa aberrazione dell'umano intelletto non sia stato il minore ostacolo che abbiano incontrato i progressi della scienza nello spazio di tanti secoli, nei quali non era coltivata che per soddisfare a una vana curiosità per mezzo di calcoli e di osservazioni chimeriche. Comunque sia, i Caldei e gli Egiziani avevano in tutta la terra una riputazione prodigiosa in questo rapporto; e se è vero, come lo racconta Vitruvio, che un sacerdote caldeo, chiamato Beroso, venne un tempo in Grecia, e vi ricevè onori quasi divini a motivo delle sue cognizioni astrologiche, bisogna convenire che gli uomini sono sempre disposti ad accogliere favorevolmente le menzogne che lusingano i loro pregiudizj e le loro segrete inclinazioni. Noi non saremmo niente più ragionevoli se adottassimo come scoperte reali e come fatti incontestabili tutte le pretese osservazioni dell'astronomia antica, le quali, se non si sepa-

rano dalle esagerazioni cronologiche che le accompagnano, possono benissimo non essere che sogni astrologici, mal giudicati all'epoca in cui l'astronomia divenne l'oggetto di studi più seri.

Fino ad un'epoca da noi non molto lontana, le follie dell'astrologia giudiziaria hanno spesso usurpato un gran posto nella storia della scienza. Noi le ritroviamo nel medio evo presso quegli Arabi stessi, ai quali dobbiamo lavori sì importanti e sì realmente scientifici. L'Europa nel XV secolo era infatuata di questa pretesa scienza, che la grande e sublime scoperta del vero sistema del mondo ha sola potuto far discendere dal tripode sul quale prononziava i suoi oracoli. Ai nostri giorni si trovano ancora alcune tracce dell'astrologia giudiziaria in almanacchi sventuratamente popolari, e che corrono per le mani di un numero troppo grande di creduli lettori.

5. Sebbene l'illustre Newton abbia preso per una delle basi della sua cronologia il favoloso viaggio degli Argonauti, noi siamo poco disposti a cercare quali rapporti possono esistere tra questa spedizione e le cognizioni astronomiche della Grecia antica. È certo che prima di Talete e di Pitagora l'astronomia dei Greci si limitava all'osservazione del levare e del tramonto eliaci o acronici di alcune stelle più brillanti; osservazione popolare che avea la sua sorgente nei bisogni dell'agricoltura. Non si trova nulla in Omero e soprattutto in Esiodo, i più antichi poeti che possano consultarsi in mancanza di storici, che si elevi al di sopra di queste volgari nozioni.

La divisione del cielo in costellazioni, e presso a poco coi nomi che i Greci diedero loro, sussiste ancora nella nostra astronomia. Ma sarebbe forse troppo ardito il voler determinare l'epoca nella quale fu fatto in Grecia questo ingegnoso lavoro. Se, come pensano alcuni dotti astronomi, questo lavoro fosse anteriore all'assedio di Troja, se ne troverebbe qualche traccia ne' poeti che abbiamo nominati. Nientedimeno l'immaginazione brillante di questo popolo, e quel genio per la finzione che gli è tutto proprio, si palesano dappertutto in questo monumento ingegnoso dell'astronomia antica. Tutto dunque porta a credere che i Greci sono in gran parte gli autori della divisione del cielo, o almeno ebbero l'arte di associarvi di buon'ora tutte le loro tradizioni nazionali. Il gruppo numeroso delle Plejadi, la cui etimologia greca è *πλειον* parecchi, era per essi la riunione delle figlie dell'antico Atlante; Calisto e il suo figlio erano le Orse; il brillante gruppo di stelle che si scoprono al mezzodì della Grecia era la nave Argo; Castore e Polluce, Ercole, l'Ayvaltojo che custodisce il vello d'oro, l'Ariete che l'aveva somministrato, tutti questi esseri o questi oggetti immaginari erano stati posti da essi nel cielo, dove la religione era venuta a consacrare la loro trasmutazione poetica.

Senza entrare in nessuna discussione sull'origine delle costellazioni e della divisione dello zodiaco, che sembra appartenere a popoli più antichi dei Greci, diremo che questa nazione, la cui storia si collega più intimamente colla nostra, ha dovuto prendere particolarmente dagli Egiziani, donde la tradizione faceva derivare la sua civilizzazione, una gran parte dei primi lavori della sua astronomia. Questa scienza infatti non comincia a meritare un tal nome in Grecia che all'epoca in cui il celebre Talete di Mileto fondò la scuola ionica. Questo filosofo nacque verso l'anno 640 avanti l'era volgare: egli non era più nella sua gioventù quando si portò nell'Egitto ad acquistarsi cognizioni che non aveva trovate nella sua patria, dove ritornò recando una vasta istruzione che aveva attinta, si dice, ne' suoi colloqui coi sacerdoti egiziani. Talete il primo nella Grecia insegnò la sfericità della terra e l'obliquità dell'eclittica, spiegò le vere cagioni degli eclissi, e ne predisse uno per mezzo di un metodo che ci è rimasto ignoto. Quest'eclissi accadde, secondo la testimonianza di Plinio, e i calcoli d'un astronomo moderno, l'anno 585 avanti G. C., cioè il quarto anno della XLVIII olimpiade.

Dopo Talete, la scuola jonica vide fiorire successivamente Anassimandro, Anassimene, e Anassagora, che professarono le dottrine dei loro maestri, e introdussero in Grecia l'uso delle gnomone e le carte geografiche: l'ultimo fu, si racconta, proscritto dagli Ateniesi come empio. Questi tre filosofi, nome col quale s'indicavano allora generalmente gli uomini le cui cognizioni si elevavano al di sopra di quelle del volgo, stabilirono così in Grecia i primi principj di un'astronomia scientifica. Ma nello stesso tempo un discepolo di Talete fondava in Italia una scuola, la reputazione e la gloria della quale dovevano oscurare e cancellare quella della scuola jonica. L'illustre e celebre Pitagora, nato a Samo, verso l'anno 550 avanti l'era nostra, si fece distinguere di buon'ora, per l'alta sua intelligenza, tra quelli che come lui si portavano ad ascoltare la parola di Talete. Il filosofo jonico conobbe il genio del suo giovine discepolo e lo consigliò di andare a cercare la scienza alle sorgenti stesse alle quali egli medesimo l'aveva attinta. Pitagora partì per l'Egitto dove fu iniziato nei celebri misteri di quel paese; ma l'amor suo per la scienza gli fece oltrepassare quel termine dei viaggi del suo maestro: si recò sulle rive del Gange, ed acquistò, si dice, nei colloquj dei bramini le opinioni, spesso tanto avanzate, che in seguito professò la scuola filosofica alla quale ei dette il suo nome. In quanto all'astronomia, Pitagora diede uno sviluppo importante ai principj insegnati nella scuola jonica, aggiungendovi la spiegazione dei due moti della terra sopra sè stessa e intorno al sole. Completò queste nozioni, sì giuste, del vero sistema del mondo, coll'ipotesi del moto regolare delle comete e di tutti i pianeti intorno la sole. S'insegnò più tardi nella sua scuola, e può credersi che tali opinioni fossero pure le sue, che i pianeti erano abitati, e che le stelle erano tanti soli posti nel centro di altrettanti sistemi planetarii. I pitagorici spiegavano egualmente la distribuzione o l'ordine della sfera celeste, l'obliquità dell'eclittica, la rotondità della terra, l'esistenza degli antipodi, la sfericità del sole, la causa della luce della luna, quella de' suoi eclissi, come pure quella degli eclissi del sole. La maggior parte di queste idee furono comuni colla scuola di Talete, ed erano state emesse da questo stesso filosofo; ma il sistema pitagorico le riunì tutte, e le espose, come abbiamo detto, con maggiore estensione e unità.

Suol domandarsi in qual maniera il possesso delle verità fondamentali di questo sistema abbia potuto perdersi dall'umanità, che si è glorificata, dopo una lunga serie di secoli, di averle riacquistate. Quasi tutti gli astronomi, mentre non cessano di attestare il loro entusiasmo per queste grandi scoperte, e la loro grande ammirazione pel genio sublime di Pitagora, hanno trascurato di spiegare questo fenomeno storico. Ma nel punto di vista filosofico, nel quale esaminiamo adesso il cammino della scienza, questa circostanza è troppo essenziale per non essere, per la parte nostra, l'oggetto di alcune rapide riflessioni. E primieramente è egli ben certo che Pitagora attingesse dai bramini o dai sacerdoti dell'Egitto lezioni così elevate e per la grandezza e per l'esattezza delle vedute che esse contengono? Almeno è permesso il dubitare. L'astronomia degli Indiani e degli Egiziani non era in quell'epoca più avanzata di quella dei Greci, che nella parte puramente pratica; ma in nessuna parte delle loro osservazioni, dei loro monumenti, e di quei pochi documenti autentici che noi possediamo sulla loro storia antica, non si trova nulla che indichi che la scienza vi si fosse elevata all'altezza dell'ipotesi pitagorica. D'altronde, come mai Talete, che aveva avuto coi sacerdoti egiziani gli stessi rapporti di Pitagora, non ne aveva ricevuto le stesse rivelazioni? Si dovrebbe egli forse credere all'esistenza di quei diversi gradi d'iniziazione, dai quali si suppone che la cognizione intera dei misteri dovesse esser preceduta? Ma se i sacerdoti erano in possesso delle idee che Pitagora professò sul sistema del mondo, perchè i maestri hanno egli conservato il silenzio sopra un soggetto

che è stato permesso al discepolo di svelare? e perchè finalmente questa facoltà fra tutti gli uomini che giunsero ai gradi i più elevati della iniziazione è stata partecipata al solo Pitagora? Si comprende facilmente che tutte queste questioni rendono complicato il problema invece di risolverlo; ma le abbiamo esposte per dimostrare l'incertezza che regna nella storia di quei tempi remoti, e la temerità che vi sarebbe nell'adottare, senza nessuna critica, alcuni fatti presentati dagli scrittori dei secoli intermedi con una sicurezza che non prova nulla in favore della loro autenticità. Non si possono dunque che azzardare delle ipotesi più o meno probabili sopra queste precoci manifestazioni dello spirito umano, che sorgono di quando in quando come faci inaspettate nella notte misteriosa dell' antichità. Così è possibile che Pitagora abbia profitto di alcune vaghe vedute dei braminì e dei sacerdoti d'Egitto, per fondare la sua opinione sul sistema del mondo. Ma questo sistema dovè nascere nella spontaneità del suo genio, poichè, prima e dopo di lui, l'universo intero, fedele a' suoi vecchi errori, non riconobbe o non volle riconoscere le verità che egli era venuto a rivelargli. Del resto, non bisogna nemmeno accusare l'umanità di una disposizione troppo pronunziata a sdegnare le scoperte scientifiche. Essa non entra nella via del progresso che in virtù delle leggi che lo determinano, vale a dire che non vi ha progresso per l'umanità che quando le scoperte, esposte scientificamente, divengono incontestabili. Pitagora rivestì la sua dottrina delle forme mistiche della iniziazione; ei non la presentò che in un linguaggio misterioso ed oscuro, e mista a dottrine filosofiche di un ordine affatto differente. Forse quell'uomo sommo temè di esporre nel tempo stesso e i suoi dogmi alle derisioni del volgo del quale offendevano i pregiudizj, e i suoi discepoli a persecuzioni delle quali le disgrazie di Anassagora erano state il preludio nella Grecia. Del resto, la sua scuola conservò per lungo tempo, fino ad un certo punto, la direzione intellettuale che da lui avea ricevuta; ed allora sembra meno sorprendente che essa non abbia potuto porsi alla testa dei progressi della scienza. Filolao di Crotone fu il primo discepolo di Pitagora, che professò pubblicamente l'opinione di questo filosofo sul moto della terra: essa era rimasta fino al suo tempo involupata nei misteri che coprivano le opinioni di quella scuola.

Circa un secolo dopo Pitagora, due astronomi greci, Metone ed Euctimone, esposero nei giuochi olimpici una tavola astronomica, nella quale era spiegato l'ordine di un nuovo periodo che doveva servire a rettificare il calendario della Grecia, conciliando i moti della luna e del sole. Questo periodo, che i Greci adottarono con entusiasmo, è stato celebre sotto il nome di *enneadecateride*, o ciclo di 19 anni. Esso era composto di diciannove anni lunari, dei quali dodici si componevano di dodici lunazioni, e gli altri sette di tredici. Calippo fece in seguito qualche cambiamento a questo periodo, che anticipava di alcune ore sulle rivoluzioni precise del sole e su quelle della luna. Egli quadruplicò il ciclo di Metone, e ne fornì uno nuovo di 76 anni, al termine del quale doveva togliersi un giorno. Questo nuovo periodo, che è stato chiamato *calippico* dal nome del suo autore, era stato formato computando l'anno di 365 giorni e 6 ore, e presentava ancora un'anticipazione di alcuni minuti. Questo difetto fu osservato dal celebre Ipparco; ma l'uso del ciclo di Calippo prevalse su quello che presentò quest'astronomo. Non è inutile il rammentar qui che la riforma del calendario, nel 1582, fu necessitata dall'accumulazione delle anticipazioni di questo ciclo dall'epoca del concilio di Nicea fino a quell'anno del sedicesimo secolo.

Si attribuisce pure a Metone e ad Euctimone un'osservazione astronomica importantissima per la storia della scienza nella Grecia, e che noi non possiamo passare sotto silenzio: intendiamo di parlare dell'osservazione del solstizio dell'anno 43a avanti G. C. Nel secolo seguente, cioè presso a poco al tempo d'Ales-

andro, la repubblica di Marsiglia vide nascere Pitea, che si è illustrato come geografo e come astronomo. Noi avremo occasione di considerare i suoi lavori in questo doppio rapporto: basterà il dire, in questo rapido compendio della storia dell'astronomia, che in quell'epoca Pitea osservò a Marsiglia la lunghezza meridiana dello gnomone nel solstizio d'estate. Questa osservazione, notabilissima a motivo della sua antichità, è soprattutto preziosa per gli astronomi, in quanto che conferma le diminuzioni successive dell'obliquità dell'eclittica.

A Pitea di Marsiglia finisce veramente il primo periodo della storia dell'astronomia presso i Greci, poichè esso comprende tutti i progressi che ebbero luogo nella scienza da Talete fino ad Alessandro. Crediamo perciò di dover passare sotto silenzio i lavori di alcuni astronomi del secolo che precedè la fondazione della scuola d'Alessandria, come Archita, Leucippo, Democrito, le osservazioni dei quali non apportarono nessun cambiamento essenziale alle ipotesi adottate prima di loro. Lo stesso deve dirsi di Platone e della scuola celebre da lui fondata. Si sa che quest'uomo prodigioso, al quale il mondo deve una filosofia che dette una sì alta direzione alle scienze morali, aveva non ostante adottato il sistema del mondo generalmente ammesso al suo tempo, che supponeva la terra immobile nel centro dell'universo. Nulladimeno Plutarco assicura che, giunto al termine della sua vita, il divino Platone rinunziò a quest'errore ed abbracciò il sistema pitagorico (PLUTARCH. *Quest. plat.* 7). I principali discepoli di Platone che si occuparono dell'astronomia, come Elicone di Cizico, e il celebre Eudossio, professarono opinioni così erronee su questa materia, che la loro esposizione è divenuta affatto estranea alla storia della scienza. Aristotile e la scuola peripatetica non si occuparono di astronomia, o non la considerarono che nel senso delle false ipotesi di cui era l'oggetto, e fondandosi sopra una pessima fisica. Ciò non ostante fu l'opinione d'Aristotile, basata sopra principj futilissimi, che diede l'ultimo colpo al sistema pitagorico. Questa opinione fu adottata dai più celebri astronomi di Alessandria, e per quattordici secoli l'intelligenza umana non fece che aggirarsi nello stretto circolo che l'empirismo avea descritto intorno a lei. Ci resta adesso a seguire il cammino della scienza in questo lungo periodo, e a considerare per mezzo di quali immensi lavori gli uomini riconquistarono la verità che avevano disprezzata duemila anni avanti.

6. Abbiamo veduto che l'astronomia dei diversi popoli civilizzati, dei quali abbiamo interrogato la storia, era interamente *pratica*. I fenomeni delle stagioni, degli eclissi, l'apparizione delle comete, non erano osservati che nell'interesse dei bisogni sociali, e forse ancora in quello dei pregiudizj che nascevano dai timori occasionati dal compimento di queste grandi leggi generali. Tutta la scienza consisteva nella cognizione dei diversi periodi calcolati sopra lunghe osservazioni: essa non raccoglieva sul sistema dell'universo che congetture, per la maggior parte mal concepite, e fondate sui rapporti dei sensi colle apparenze dei moti planetarii. A datare dalla fondazione della scuola d'Alessandria, l'astronomia va ad occupare un posto più distinto nell'ordine delle cognizioni umane. Le osservazioni si eseguiranno d'ora in poi per mezzo di strumenti ingegnosi e atti a misurare gli angoli: esse saranno calcolate secondo i metodi trigonometrici. Si descriveranno dei circoli nel cielo, e la posizione delle stelle sarà determinata con un'esattezza alla quale non si erano punto avvicinate le osservazioni anteriori. I moti del sole e della luna saranno calcolati e fissati con maggior precisione; e finalmente dall'insieme dei lavori intrapresi nel seno di questa scuola illustre uscirà il primo sistema astronomico completo, malgrado gli errori che esso sanzionerà, il quale adottato da tutte le nazioni darà almeno alla scienza quel carattere di unità, per mezzo del quale comincerà il suo cammino progressivo verso il vero sistema del mondo.

Di tutti i rami delle scienze matematiche, di cui i lavori della scuola d' Alessandria accelerarono i progressi, nessuno fu coltivato con maggiore ardore e successo dell' astronomia. Noi abbiamo già presentato in un articolo di questo Dizionario, in un punto di vista generale, l'insieme della storia della scienza, parlando di quella celebre istituzione, perciò crediamo di doverti rinviare il lettore (*Vedi ALESSANDRIA (Scuola n').*) Non ostante, per invertire il meno possibile l'ordine delle ricerche speciali alle quali ci siamo dati in questo articolo, riepilogheremo in alcune nuove considerazioni questa parte così importante della storia dell' astronomia.

Se ciò che abbiamo detto di sopra relativamente alle pretese cognizioni attribuite ai sacerdoti egiziani, e all' antichità non meno dubbiosa delle loro osservazioni (n°. 2), avesse bisogno di esser più particolarmente dimostrato, i lavori degli astronomi alessandrini sarebbero una testimonianza ineccezionabile della esattezza delle nostre obiezioni. Né Aristillo, né Timocaride, né il giudizioso Ipparco, né il dotto e ingegnoso Tolomeo, non poterono servirsi delle osservazioni tanto vantate dell' antico e misterioso Egitto. I primi di questi sommi astronomi, aiutati di tutto il favore dei successori di Iago, dovettero avere a loro disposizione tutti i documenti utili alla scienza che praticavano; ed è probabile che in un paese, i monumenti del quale erano coperti di caratteri che nell' opinione generale conservavano i fasti nazionali, essi ebbero tutti i mezzi possibili d' illuminarsi. Pure la più antica osservazione, riferita da Tolomeo, è presa dagli annali di Babilonia e non risale che all' anno 719 avanti l' era cristiana (n°. 1).

È dunque a torto che, chinata su questi antichi avanzi di una civiltà quasi affatto sconosciuta i quali hanno sopraelevato sui flutti dei secoli, la scienza pensosa cerca di leggere queste pagine mute per lei, e di sollevare il velo che copre il passato.

Lungo tempo prima d' Ipparco, Aristarco di Samo tentò invano di far prevalere nella scuola d' Alessandria l' opinione pitagorica sul sistema del mondo. Non è dunque una prova evidente dell' eccentricità di questo sistema la profonda indifferenza colla quale fu accolto nella terra stessa, dove si è preteso che avesse avuto origine? E molti secoli dopo, quando lo studioso Tolomeo raccolse tutti i lavori astronomici dei tempi antichi, la produzione di questo sistema non cambiò in nulla le sue opinioni; che anzi ei fece uso di un talento immenso per spiegare il sistema opposto, che era quello dell' Egitto, con una complicità prodigiosa di combinazioni e d' ipotesi, che non fanno altro che attestare la fecondità brillante del suo ingegno.

Questo nobile tentativo d' Aristarco di Samo, le osservazioni importanti d' Ipparco, e i lavori sintetici di Tolomeo ci sembrano caratterizzare le tre età dell' astronomia nella scuola d' Alessandria. Al tempo d' Aristarco, il sistema generale del mondo è ancora in discussione; ma il lavoro di quest' astronomo è inutile, e Ipparco non apporta che pochi cambiamenti all' opinione ricevuta, facendo muovere il sole uniformemente in un ordine circolare, e allontanandone la terra dalla ventiquattresima parte del raggio, invece di collocarla nel suo centro. Tolomeo s' impossessa da padrone di questi diversi lavori, gli coordina, gli rettificò secondo le nuove osservazioni eseguite per mezzo di migliori strumenti, e compone un sistema che poco differisce da quello d' Ipparco e degli Egiziani; ma lo arricchisce di spiegazioni che stupiscono l' immaginazione, e che suppongono in lui una scienza così profonda che nessuno dopo di lui oserà porre la mano sulla sua opera.

La scoperta che ha immortalato Ipparco è quella della precessione degli equinozi; e fu per spiegare questo fenomeno reale dell' ineguaglianza dei due intervalli da un equinozio ad un altro, ch' egli propose la sua ipotesi sul moto del

sole. Tolomeo confermò questa scoperta con nuove osservazioni, ma non ne diede spiegazioni più soddisfacenti. La più importante di quelle che si attribuiscono a questo grande astronomo è quella dell'evezione della luna (*Pedi Eveziosa*). Del resto, ecco l'idea generale che possiamo farci del suo sistema, che è importantissimo il conoscere, per ben comprendere la natura dei progressi dell'astronomia moderna, e l'importanza dei lavori degli Arabi durante il medio evo. Noi prendiamo da Laplace l'esposizione che questo dotto e illustre geometra ne ha fatta in questi termini: « Fu un'opinione generalmente ammessa nell'antichità che il moto uniforme e circolare, come il più perfetto, dovesse esser quello degli astri. Quest'erronea opinione si mantenne fino a Keplero, che essa arrestò lungo tempo nelle sue ricerche. Tolomeo l'adottò, e ponendo la terra nel centro dei movimenti celesti cercò di rappresentare e spiegare le loro ineguaglianze in questa ipotesi. S'immagini che sopra una prima circonferenza, il cui centro è occupato dalla terra, si muova il centro di una circonferenza sulla quale si muove il centro di una terza circonferenza, e così successivamente fino all'ultima che l'astro descrive uniformemente. Se il raggio d'una di queste circonferenze supera la somma degli altri raggi, il moto apparente dell'astro intorno alla terra sarà composto di un moto medio uniforme, e di più ineguaglianze dipendenti dai rapporti che hanno tra loro i raggi delle diverse circonferenze e dai moti dei loro centri e dell'astro. Si possono dunque, moltiplicando e determinando convenientemente queste quantità, rappresentare tutte le ineguaglianze del moto apparente. Tale è la maniera la più generale di considerare l'ipotesi degli epicicli e degli eccentrici; poichè un eccentrico può esser riguardato come un circolo il cui centro si muove intorno alla terra con una celerità più o meno grande, la quale diviene nulla se questo centro è immobile.

Tolomeo suppone che il sole, la luna e i pianeti si muovano intorno alla terra in quest'ordine di distanze: la Luna, Mercurio, Venere, il Sole, Marte, Giove e Saturno. Ognuno dei pianeti superiori al Sole si muoveva in un epiciclo il cui centro descriveva intorno alla terra un eccentrico in un tempo eguale a quello della rivoluzione del pianeta. Il periodo del moto dell'astro sull'epiciclo era quello di una rivoluzione solare, e si trovava sempre in opposizione al sole quando giungeva al punto dell'epiciclo il più prossimo alla terra. Nulla, in questo sistema, determinava la grandezza assoluta del circolo e degli epicicli. Tolomeo non aveva bisogno di conoscere che il rapporto del raggio di ciascuno epiciclo a quello del circolo descritto dal suo centro. Egli faceva parimente muovere ogni pianeta inferiore in un epiciclo, il cui centro descriveva un eccentrico intorno alla terra; ma il moto di questo centro era eguale al moto solare, e il pianeta percorreva il suo epiciclo in un tempo che, nell'astronomia moderna, è quello della sua rivoluzione intorno al sole; il pianeta era sempre in congiunzione con esso, quando giungeva al punto più basso del suo epiciclo. Nemmeno in questo caso, nulla determinava la grandezza dei circoli e degli epicicli. Gli astronomi anteriori a Tolomeo erano divisi di opinione sull'ordine di Mercurio e di Venere nel sistema planetario. I più antichi, all'opinione dei quali si attenne, gli ponevano al di sotto del Sole; gli altri collocavano questi astri al di sopra: finalmente alcuni Egiziani gli facevano muovere intorno al sole »

Tutti sono le ipotesi principali del sistema di Tolomeo. Questo sistema, la cui adozione generale rese impossibile qualunque ulteriore progresso della scienza, segna un punto di sosta nel cammino dello spirito umano; e siccome esso riuniva tutte le cognizioni anteriori alla sua produzione, così per un lungo periodo fu il centro intorno al quale vennero a disporvi tutte le ricerche posteriori.

7. Mentre l'Europa e quella parte dell'Asia, che la politica romana vi aveva aggregata colle sue conquiste e colle sue leggi, subivano una trasformazione completa nei loro costumi, nella loro religione, e nel loro diritto pubblico; mentre grandi rivoluzioni cambiavano l'aspetto del mondo civilizzato, ed altri regni si elevavano sulle ruine dei regni; mentre nazioni novelle lasciando una zona sconosciuta venivano ad assidersi sulle città devastate delle vecchie nazioni, e le scienze e le lettere scomparivano come inghiottite sotto le rovine degli antichi monumenti; una nazione giovane, quantunque fedele ad antiche tradizioni, coraggiosa, ingegnosa, e soprattutto notabile per l'energia del suo entusiasmo religioso, palesava al mondo la sua potenza intellettuale, dopo averlo minacciato colla potenza vittoriosa delle sue armi. Le scienze e le lettere trovarono un asilo presso questa nobile e generosa nazione, allorché la loro face si estingueva nel sangue di quei popoli presso i quali aveva altre volte sparso vivissima luce. La nuova religione, che essa adottò coll'ardore naturale del suo carattere, modificò per qualche tempo i suoi costumi patriarcali, ispirandole un fervore di proselitismo che le fece sottoporre la ragione al taglio della sua spada. Ma quando i suoi primi califfi ebbero compiuto il pensiero di Maometto con immense conquiste, essa ritrovò negli agi della pace tutte le tradizioni della sua bella civiltà. Appassionata per la poesia e per l'eloquenza, ottenne nuove palme pei poeti e per gli oratori; coltivò le scienze matematiche, e soprattutto l'astronomia, della quale il suo cielo senza nubi doveva favorire le osservazioni; e l'Europa, curvata sotto il giogo delle schiatte del Nord, non la seguì che lentamente e dopo molto tempo, nel cammino della rigenerazione e del progresso.

Tale fu la nazione araba, i cui gloriosi annali contengono tanti fatti interessanti per la storia delle scienze, e che ciechi pregiudizj ci hanno fatto per lungo tempo considerare come una nazione barbara e nemica d'ogni cultura.

Non parleremo dell'astronomia degli antichi Arabi: le loro cognizioni pratiche in questa scienza non si elevavano al di sopra di quelle che possedevano i Greci prima di Talete, e fu soltanto sotto i califfi della dinastia degli Abbassidi che cominciarono a farne l'oggetto di serie ricerche. Il celebre El-Mansour, soprannominato Abou-Djafar (Almanzor-il-Vittorioso), contribuì principalmente alla rivoluzione intellettuale che si operò tra gli Arabi. Questo califfo, che salì sul trono verso la metà dell'ottavo secolo (anno di G. C. 754, dell'egira 136), incoraggiò le scienze colle sue liberalità, col favore del quale onorava quelli che le coltivavano, e soprattutto col suo proprio esempio, poichè egli stesso si diede con molto ardore allo studio dell'astronomia. I suoi successori seguirono il suo esempio; il celebre Haroun-âl-Raschyd e il suo figlio Mohamed-el-Amr favorirono potentemente il moto di civilizzazione che erasi manifestato tra gli Arabi. Il regno brillante di questi principi ha lasciato nell'Oriente memorie che non periranno: i racconti ingegnosi, che hanno diletto la nostra infanzia, non sono che un parto di quell'epoca di progresso, che più tardi l'ardente immaginazione di quei popoli che vivono di poesia riprodusse nelle loro tradizioni coll'esagerazione e coll'amore del maraviglioso che sono loro naturali. Ma tra tutti i principi arabi che si distinsero pel loro amore per le scienze, il califfo El-Mamoun-Abd-Allah, secondo figlio di Haroun, che salì sul trono l'anno 198 dell'egira (813-14 di G. C.), merita una particolare menzione. Egli protesse le scienze da sovrano e da filosofo; poichè, magnanimo come Alessandro, non dimenticò nelle sue spedizioni guerriere il nobile fine che si era proposto: impose a Michele III un tributo di libri, tesoro dell'antica civiltà della Grecia, e più tardi fece guerra a Teofilo che aveva ricusato di lasciar partire per Bagdad Leone, arcivescovo di Tessalonica, che questo imperatore cristiano lasciava vivere col salario delle lezioni che era obbligato a dare agli schiavi. A datare dal regno di El-Mamoun,

tutte le scienze, e particolarmente l'astronomia, acquistarono presso gli Arabi un incremento prodigioso, ed una moltitudine di uomini distinti pei loro lavori, e per la loro attitudine scientifica, attornio il suo trono. Fu tradotto l'*Almagesto*, come pure tutte le opere matematiche della Grecia e della scuola d'Alessandria. Gli astronomi di Bagdad fecero un gran numero di osservazioni importanti, e compilarono nuove tavole del sole e della luna, più esatte di quelle di Tolomeo, alle quali fu dato il nome di *Tavola verificata* (*Vedi Azou-Mansour*). Essi determinarono la durata dell'anno tropico con maggior precisione di quella trovata da Ipparco, e misurarono in una pianura della Mesopotamia un grado del meridiano, all'oggetto di ottenere una esatta valutazione della grandezza della terra.

Noi dovremmo citare un gran numero di astronomi celebri che si distinsero per utili e grandi lavori sotto il regno di El-Mamoun, e sotto quello de'suoi successori; poichè l'astronomia risentì per lungo tempo gli effetti della potente protezione che quel principe illuminato le aveva accordato. Ma questa rivista interessante ci farebbe oltrepassare di troppo i limiti che ci sono imposti; quindi ci contenteremo di consacrare degli articoli biografici a quelli, le cui scoperte hanno maggiormente contribuito ai progressi della scienza, rinviando il lettore, per più estese notizie, alla raccolta di Herbelot, e alle diverse *Biblioteche orientali*. *Vedi ALHAZEN, ALBATERIO, ec.*

Gli Arabi non si limitarono ad osservazioni, di cui la scienza moderna ha avuto spesso occasione di riconoscere l'esattezza; essi rivolsero pure tutte le loro cure al perfezionamento degli strumenti astronomici; e quando, colla loro invasione nella Spagna, furono in grado di comunicare all'Europa le cognizioni che avevano acquistato, questo mezzo potente di verificarne i calcoli e i risultati contribuì moltissimo a spargerne il gusto.

Così l'epoca alla quale abbiamo dato il nome di medio evo, e che fu per noi un'epoca di tenebre e di servitù, contiene il periodo il più brillante della storia degli Arabi. Allorché i nostri cavalieri, altrettanto ignoranti quanto valorosi, seguirono in Oriente quelle migliaia di pellegrini armati che vi conduceva lo zelo della religione, s'immaginavano di andare a combattere barbari, appena degni di cadere sotto i colpi della nobile loro spada. Essi però ebbero a contrastare con una nazione tanto valorosa quanto illuminata, e la civiltà araba trionfò di quell'attacco formidabile: ma i Cristiani riportarono dall'Oriente delle idee che germogliarono in Europa, e contribuirono in seguito alla sua rinnovazione intellettuale. Tale fu il risultato più positivo delle crociate. Esso è grande senza dubbio, ed attesta eloquentemente la direzione providenziale della storia sociale.

8. Verso la metà del secolo XI, i Persiani, lungo tempo soggetti agli Arabi, scossero il giogo dei loro califfi: ma continuarono a coltivare le scienze che i loro conquistatori avevano loro insegnate. Omar-Cheyan, uno dei loro più celebri astronomi, riformò il loro calendario, nel quale si trova una intercalazione che Domenico Cassini, alla fine del XVII secolo, propose come più esatta della intercalazione gregoriana. Questo dotto però sembra che ignorasse l'esistenza già molto antica di questi progressi astronomici presso i Persiani. Due secoli dopo, Holagu-Mecoukan, sovrano della Persia, diede agli studj astronomici grandi incoraggiamenti, e lo stesso Ulugh-Beigh, uno dei suoi successori, deve esser collocato tra i migliori osservatori. Egli misurò, nel 1477, l'obliquità dell'eclittica, e compilò delle tavole astronomiche che soltanto da quelle di Ticone Brahe poterono esser superate in esattezza e in perfezione.

La China partecipò nel medio evo a questi progressi generali dell'astronomia nell'Oriente. Nei dobbiamo ai missionarii cristiani, e particolarmente al dotto gesuita Gaubil, la cognizione di una serie di osservazioni, che si estendono dal-

l'anno 5100 avanti la nostra era, fino al 1280 dopo. Nel V secolo, un abile astronomo cinese, chiamato Tsoutchong, aveva determinato la durata dell'anno tropico con maggiore esattezza dei Greci e degli Arabi, fissandola a $3.52,24282$. Questa durata è presso a poco quella stessa di Copernico.

Nel 1271, Kobilai, quinto successore di Geugis-Kan, protesse l'astronomia nella China, con quanto zelo e generosità l'avea protetta in Persia il suo fratello Hologu-Illecoukan. È interessante il seguire queste diverse trasmigrazioni della scienza: dagli Arabi ai Persiani, dai Persiani ai Tartari, dai Tartari ai Chinesi. Kobilai chiamò a capo del tribunale delle matematiche Cocheou-King, che è il Tolomeo della China. Questo celebre osservatore ha lasciato ragguardevoli lavori che il padre Gaubil ha comunicati all'Europa. Ei fece costruire un gran numero di strumenti superiori a quelli di cui erasi fatto uso avanti di lui, e tra gli altri uno gnomone di una gran dimensione, per mezzo del quale poté fare importanti osservazioni sulle diminuzioni dell'obliquità dell'eclittica e dell'eccentricità del globo terrestre.

9. Intorno a quest'epoca, Alfonso, re di Castiglia, e Federico II, imperatore di Germania, cominciarono a incoraggiare gli studj astronomici; e la scienza, resa all'Europa dagli Arabi, gettò alcuni raggi di luce in mezzo alle folte tenebre che coprivano questo paese. Le tavole astronomiche compilate per le cure del primo di questi principi, la traduzione dell'*Almagesto* di Tolomeo, dovuta agli incoraggiamenti del secondo, furono i primi importanti indizj della rivoluzione intellettuale che l'Europa era per subire nei secoli seguenti. L'astronomia, le cognizioni della quale erano allora miste a molti errori e a molti sogni astrologici, fu in special modo l'oggetto di varj utili lavori, fra i quali si distinguono quelli di Sacro-Bosco, il cui vero nome è Giovanni di Halifax, di Campano di Novara, e di Gerardo di Cremona, che si crede essere stato il primo traduttore dell'*Almagesto* in latino.

Questo movimento di progresso continuò durante il XIV e XV secolo. Pietro d'Abano, Marco di Benevento e Giorgio Purbach si applicarono con ardore agli scritti degli antichi, gli commentarono, gli analizzarono e prepararono così la via delle scoperte, nella quale la scienza era per inoltrarsi dopo di loro. Fu allora che comparve il celebre Giovanni Muller, più conosciuto sotto il nome di Regiomontano, uno degli osservatori più ragguardevoli del sistema astronomico di Tolomeo. Si dice anzi che egli scoprisse varj degli errori di quell'astronomo, e che fosse sul punto di abbracciare l'antica opiione pitagorica. Ma non era ancora venuto il momento di quella grande o felice rivoluzione, e l'onore di cominciarla era riservato ad un altro. Regiomontano fece immensi lavori in tutte le parti dell'astronomia, e la sua osservazione della cometa del 1472, per la quale scrisse un trattato speciale, è ancora oggigiorno di un sommo interesse. Questo astronomo, che morì giovane, lasciò a numerosi discepoli la cura di perfezionare il suo metodo e di continuare le sue osservazioni. Fra essi si distingue Bernardo Walther, che, secondo l'uso di quel tempo, è stato chiamato Waltherus. Questi è il primo astronomo moderno che abbia osservato il fenomeno della refrazione.

Questi dotti e laboriosi astronomi, come pure altri moltissimi che occupano un posto distinto nella storia della scienza, non fecero alcuna scoperta importante; ma prepararono quelle del XVI secolo, era di rinnovazione nella quale siamo finalmente per entrare ed in cui vedremo per l'ultima volta il genio in contrasto coi pregiudizj e cogli errori, che per una lunga serie di secoli aveano conservato un'assoluta e dispotica autorità.

10. Il sistema di Tolomeo, come abbiain detto di sopra, era il sumo di tutta l'antica astronomia: per circa millequattrocento anni fu la base fondamentale della scienza, regnò senza contrasto e tutte le osservazioni furono fatte nel senso

dell'ipotesi che esso aveva convertita in legge. Così, la storia dell'astronomia, considerata nel modo il più generale, può dividersi in tre grandi periodi. Il primo è quello dei sistemi pratici, se così possiamo esprimerci, cioè quello in cui ogni nazione aveva adottato un'ipotesi conforme ai suoi pregiudizj, ai suoi bisogni sociali, alle sue eredenze religiose. Quest'epoca è forse quella dei maggiori lavori dell'umanità: a traverso a innumerevoli errori, si riscontrano presso tutte le nazioni idee ragionevoli, giudizj esatti sui fenomeni celesti, che servono di base ad utili osservazioni. In questo periodo, l'uomo giunge ad assicurarsi della sfericità della terra e di quella dei pianeti; osserva l'obliquità dell'eclittica, e scopre la precessione degli equinozj. Allora un saggio espone sol sistema dell'universo un'idea giusta che non può trionfare dei pregiudizj esistenti, fondati sopra apparenze, che questa idea troppo avanzata non spiega in un modo abbastanza preciso, abbastanza soddisfacente. Un secondo periodo storico comincia da Tolomeo, nè ha altro nome che quello di questo astronomo, il quale, ponendo un termine alle vaghe incertezze del passato, s'impadronisce dell'avvenire, e incatena la ragione umana nei circoli ingegnosi che la sua ipotesi ha descritti nel cielo. Allora i lavori astronomici non hanno più altro scopo che di trovare una misura più esatta della terra, una divisione del tempo che tenga conto degli intervalli più sfuggibili ai sensi, di determinare con maggior precisione l'apogeo del sole, l'inclinazione dell'eclittica e tutti i fenomeni celesti. Dopo quattordici secoli l'umanità concepisce finalmente dei dubbj sulla verità di questo sistema. Un terzo e brillante periodo comincia allora per la storia dell'astronomia: ed è quello di Copernico. Vioto una volta il pregiudizio della sua base fondamentale, lo spirito umano s'avvanza di scoperte in scoperte, e in meno di due secoli tutti i lavori delle generazioni passate sono smentiti, tutte le ipotesi rovesciate; la scienza, nel suo volo ardito, appoggiandosi sopra incontrastabili certezze, misura la distanza dalla terra al sole, pesa tutte le sfere nella sua mano potente, e determina le leggi in virtù delle quali si muovono esse nello spazio; penetra nel seno di tutti i misteri della creazione, e spiega tutti i fenomeni celesti con un'autorità che non ammette nè dubbio nè esitazione. L'uomo, in virtù della sua ragione, dichiara allora di essere in possesso della verità! Questo spettacolo è bello, questa rivoluzione è immensa, eppure la scienza non è ancora che all'aurora del suo regno.

Nel 19 febbrajo 1473 nacque Niccolò Copernico a Thoru piccola città della Prussia. Quest'uomo, il cui nome è omai immortale, manifestò di buon mattino la sua inclinazione per gli studj astronomici. Andò ad istruirsi in Italia, ascoltò a Bologna le lezioni di Domenico Maria, e ottenne a Roma una cattedra di professore. Già aveva fatto parecchie osservazioni, e la complicazione bizzarra delle ipotesi di Tolomeo gli aveva fatto pensare che il sistema del mondo dovesse riposare sopra un ordine differente. Provveduto di un canonicato nella città di Frauenburg, si diede nel suo ritiro a profonde meditazioni, e, colpito dalla maestosa semplicità dell'opinione pitagorica, ne formò il punto di partenza a' suoi lavori. Copernico applicò a questo sistema tutte le osservazioni che erano state fatte nell'ipotesi di Tolomeo, e vide con gioia che queste osservazioni combinavano maravigliosamente colla teoria del moto della terra. Ei spiega la rivoluzione diurna apparente del cielo per mezzo del moto di rotazione della terra, e la precessione degli equinozj per mezzo del moto di oscillazione che ha luogo nell'asse della terra. Così i circoli immaginati da Tolomeo non spiegarono più a Copernico i moti diretti e retrogradi dei pianeti; ei giudicò che questi fenomeni non erano che apparenze prodotte dalla combinazione del moto della terra intorno al sole con quello dei pianeti; questa scoperta lo pose in grado di determinare le dimensioni delle loro orbite. Soltanto dopo trentasei anni di studj, di meditazioni

e di osservazioni, Copernico, giunto ad un' estrema vecchiezza, pubblicò l' opera nella quale aveva consegnato e spiegato il vero sistema del mondo, sotto il titolo di *Rivoluzioni celesti* (*De revolutionibus orbium coelestium libri VI*, Nuremberg, 1543, in-fol. picc.); ma non osò presentarlo che sotto la forma di una ipotesi; poichè comprendeva tutta la forza del pregiudizio ch' ei si faceva a combattere, e di quali e quante difficoltà e pericoli è accompagnata la produzione di una verità nuova. L' illustre Copernico non poté esser testimone del successo della sua opera: una morte improvvisa lo colpì all' età di settant' anni il 24 Maggio 1543, pochi giorni dopo aver ricevuto il primo esemplare del suo libro.

Giovacchino Retico, che aveva lasciato la sua cattedra di professore a Wittenberg per venire ad ascoltare Copernico, le cui nuove idee sul sistema del mondo cominciavano a divulgarsi, fu il primo de' suoi discepoli che adottò pubblicamente questo sistema. Era egli che aveva trionfato della timida repugnanza dell' illustre vecchio per la pubblicità, e che l' aveva determinato a dare alla stampa la sua opera. Ma se tutti gli spiriti illuminati furono colpiti dall' evidenza delle idee di Copernico, esse ebbero a trionfare di un ostacolo assai difficile, cioè dei pregiudizj dell' abitudine e delle opinioni popolari. Non vi hanno persone più intolleranti degl' ignoranti; il loro orgoglio rimane offeso quando si vuol dimostrare erronea un' opinione da essi costantemente ritenuta per vera. Ma la scoperta ammirabile del telescopio, e i progressi delle scienze matematiche vennero ben presto a confermare in tutte le sue parti il sistema di Copernico; solo è da rincrescere che Galileo, già vecchio, abbia dovuto umiliare la sua ragione avanti a chi non era in grado di conoscere la forza dei suoi argomenti, negando la realtà di un moto di cui era intimamente convinto.

Mentre Copernico scedeva nella tomba, la Danimarca vedeva nascere Ticone Brabé, uno dei più grandi osservatori che abbia avuto l' astronomia. I lavori di quest' uomo celebre appartengono interamente alle teorie della scienza: essi saranno esposti altrove, poichè non crediamo utile il dar qui un' idea, che sarebbe necessariamente incompleta, dell' ipotesi alla quale ha dato il suo nome, e ch' ei pose tra il sistema di Tolomeo e quello di Copernico. Le scoperte di Galileo; le ammirabili leggi di Keplero, quantunque discepolo di Ticone Brabé; i lavori di Huygens, e i progressi sempre crescenti delle scienze matematiche, posero, fino dal termine del XVII secolo, le opinioni di Copernico al coperto di qualunque disputa.

Nientedimeno la scoperta delle leggi dei moti celesti non era l' ultimo segno cui, dopo tanti lavori e tanti generosi sforzi, dovesse giungere lo spirito umano; gli rimaneva ancora da elevarsi fino alla causa immediata, fino al principio generale dal quale derivano queste leggi. Un filosofo francese, i cui lavori sono stati tanto utili alle scienze, e il cui bel nome non è ancora quanto basti circondato nella sua patria di rispetto e di ammirazione, Descartes infine, pensò il primo a risolvere questo problema, riducendo alla meccanica la causa di tutti questi movimenti; ma ei si smarrì fin dal bel principio. « Era riserbato a Newton, dice Laplace, il farci conoscere il principio generale dei moti celesti. La natura, dolandolo di un genio profondo, ebbe cura pure di collocarlo nelle circostanze più favorevoli. Descartes aveva cambiato l' aspetto delle scienze matematiche coll' applicazione seconda dell' algebra alla teoria delle curve e delle funzioni variabili. Wallis, Wren, e Huygens avevano allora allora trovato le leggi della comunicazione del moto. Le scoperte di Galileo sulla caduta dei gravi, e quelle di Huygens sulle evolute e sulla forza centrifuga, conducevano alla teoria del moto nelle curve. Keplero aveva determinato quelle che descrivono i pianeti, ed era stato quasi sul punto di accorgersi della gravitazione universale. L' inallucinato Hooke aveva benissimo osservato che i movimenti pla-

« netarii sono il risultato di una forza primitiva di proiezione combinata colla
 « forza attrattiva del sole. La meccanica celeste non aspettava dunque, per uscire
 « alla luce, che un uomo di genio, che ravvicinando e generalizzando queste sen-
 « perte sapesse dedurne la legge della gravità. Questo è appunto ciò che esegui
 « Newton nella sua opera dei *Principj matematici della filosofia naturale*.

Ma fino da questo momento l'astronomia non ha più storia, o piuttosto la sua storia non è che lo sviluppo delle sue teorie e l'esposizione scientifica delle osservazioni che le compongono: in sostanza è la scienza stessa. Sarebbe contrario al nostro piano il dare una maggiore estensione a questo compendio dei lavori astronomici che hanno precluso l'epoca in cui il sistema generale dell'universo è stato stabilito sopra basi certe. Il nostro oggetto, in questa rapida esposizione, è stato quello di mostrare per quali vie lente e molteplici lo spirito umano ha dovuto passare per giungere alla scoperta della verità. A tal fine con maggiori particolarità abbiamo ricercato l'origine delle cognizioni astronomiche presso le nazioni più celebri dell'antichità. Avvertitamente abbiamo evitato di portare lo stesso esame nella storia dei popoli meno avanzati nella civiltà, come gli abitanti del sud dell'Africa, i Peruviani, e le tribù che abitano l'Oceania. I fenomeni intellettuali che abbiamo osservati nelle nazioni antiche si ritrovano dappertutto con leggere differenze, che dipendono dal clima e dai costumi; dappertutto l'uomo si è lasciato guidare dalle apparenze ingannevoli; dappertutto l'errore si presenta con gli stessi caratteri.

Di tutte le scienze, l'astronomia è forse quella la cui storia è più intimamente legata colla storia intellettuale e sociale dell'uomo. Questa stretta relazione avrà certamente colpito il lettore che si sarà elevato con noi a tutte le considerazioni filosofiche che essa deve ispirare. Dopo molto tempo, dopo aver subito il giogo di tutti gli errori, l'umanità trionfante, emancipata dalla scienza, si troverà finalmente degna di contemplare il compimento dell'alto suo destino e la realizzazione delle sublimi speranze che la sua ragione ha concepito. Con questa direzione d'idee deve intraprendersi lo studio delle scienze, e questo compendio delle vicissitudini storiche dell'astronomia non deve esser considerato che come un'introduzione necessaria al metodo filosofico, che in breve dovrà succedere al freddo empirismo degli antichi metodi elementari.

Le Opere principali da consultarsi sulla storia dell'astronomia sono le seguenti. L'edizione del poema di Manilio, pubblicata da Sherburne a Londra nel 1675 in-fol.; l'editore l'ha arricchita di un'appendice storica che contiene una lista e succinte notizie di un grandissimo numero di astronomi. Questo lavoro ha servito molto ai successivi scrittori; ma è stato superato dalla *Bibliographie astronomique* di Lalande (Parigi, 1803, in-4), che dà un catalogo di tutte le opere astronomiche conosciute, e di più contiene un estesissimo elenco alfabetico di astronomi: quest'opera contiene ancora la storia dell'astronomia dal 1781 al 1802. L'*Historia astronomiae* di Weidler, Wittemberg, 1741 in-4, è una pregevole collezione di fatti, che un lettore può consultare con piena sicurezza per la somma fedeltà ed esattezza delle indicazioni che vi si trovano. L'*Histoire générale et particulière de l'astronomie* di Esteve, Parigi, 1755, 3 vol. in-12, è opera ripiena d'inesattezze. L'*History of astronomy* di Costard, Londra, 1767 in-4 è di poco uso per la mancanza delle citazioni, ma può essere molto istruttiva pel lettore non molto profondo nelle matematiche. Le *Storie* di Bailly, cioè: 1° *Histoire de l'astronomie ancienne, depuis son origine jusqu'à l'établissement de l'école d'Alexandrie*, Parigi, 1775, in-4; 2° *Histoire de l'astronomie moderne, depuis la fondation de l'école d'Alexandrie jusqu'en 1781*, Parigi, 1778-82, 3 vol. in-4; 3° *Histoire de l'astronomie indienne et orientale*, Parigi, 1787, in-4; alle quali debbono aggiungersi le *Lettres sur l'origine des sciences*, Parigi, 1777, *Dis. di Mat. Vol. I.*

in-8, sono scritte tutte nelle prevenzioni del sistema favorito dell'autore, perciò sono da leggersi con molta cautela. Le *Storie* di Delambre, cioè: 1° *Histoire de l'astronomie ancienne*, Parigi, 1817, 2 vol. in-4; 2° *Histoire de l'astronomie du moyen âge*, Parigi, 1819, in-4; 3° *Histoire de l'astronomie moderne*, Parigi, 1821, 2 vol. in-4; 4° *Histoire de l'astronomie du dix-huitième siècle* (postuma), Parigi, 1827, in-4, contengono una compiuta discussione dei progressi dell'astronomia; ma sebbene formino quanto abbiamo di meglio su questo articolo, sono però difficili a consultarsi, poichè l'autore non ha disposto le scoperte con ordine cronologico, ma le ha riunite nella vita di ciascuno degli astronomi ai quali appartengono. L'opera di Voiron, *Histoire de l'astronomie depuis 1781 jusqu'à 1811 pour servir de suite à l'histoire de l'astronomie de Bailly*, Parigi, 1811, in-4, contiene interessanti ragguagli sulle scoperte astronomiche e sulla misura della terra, ma è molto scorretta nell'indicazione delle date. Gli storici delle matematiche, come Vossio, *De universae matheseos natura et constitutione*, Amsterdam, 1660, in-4; Heilbronner, *Historia matheseos universae*, Lipsia, 1742, in-4; Montucla, *Histoire des mathématiques*, Parigi, 1799 e segg., 4 vol. in-4; Kuestner, *Storia delle matematiche* (in tedesco), Gottinga, 1796-1800, 4 vol. in-8; Bossut, *Histoire générale des mathématiques*, Parigi, 1810, 2 vol. in-8; Saverien, *Histoire des progrès de l'esprit humain dans les sciences, savoir l'arithmétique* ec. Parigi, 1766, in-8; Delambre, *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis l'an 1789*, Parigi, 1810, in-4; Franchini, *Saggio sulla storia delle matematiche*, Luca, 1821, in-8; Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie depuis la renaissance des lettres jusqu'à la fin du dix-septième siècle*, Parigi, 1838, in-8. ec. trattano dell'astronomia come una parte del loro soggetto. La piccola opera di Laplace, *Précis de l'astronomie*, Parigi, 1821, in-8, che si trova ancora nella sua *Exposition du système du monde*, Parigi, 1835, in-4, 6ª ediz., è scritta dilettevolmente; e si trovano pure molte importanti notizie nei capitoli storici del quinto volume della *Mécanique céleste*, Parigi 1799-1827, 5 vol. in-4, ed occasionalmente ancora nei precedenti volumi. Il *Traité d'astronomie* di Lalande, Parigi, 1792, 3 vol. in-4, 3ª ediz., venne chiamato da un suo rivale (Lemonnier) la *grossa gozzetta*, a motivo delle molte notizie storiche e mitologiche che vi si rinvenivano. Sugli astronomi inglesi si trovano importanti notizie in Hutton, *Mathematical and philosophical dictionary*, Londra, 1796, 2 vol. in-4; in Martin, *Biographia philosophica*, Londra, 1764 in-8; e in Thomson, *History of the Royal Society*. Si troveranno inoltre molte interessanti notizie sull'astronomia in Powel, *History of natural philosophy*, che fa parte della collezione che si pubblica a Londra da Lardner col titolo di *Cabinet Cyclopaedia*, non meno che nelle due opere *History of astronomy*, e *Lives of eminent persons* (Galileo, Kepler, Newton, ec.), pubblicate a Londra dalla Società per la diffusione delle utili cognizioni. Infine indicheremo come buoni fonti da consultarsi gli *Elogi* che si trovano nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi, come pure le separate collezioni di *Elogi* pubblicate da d'Alembert, e da Condorcet.

ASTRONOMICO. Si dà quest'epiteto a tutto ciò che ha rapporto all'astronomia.

Calendario astronomico. Vedi **CALENDARIO**.

Ore astronomiche. Vedi **ORA**.

Tavole astronomiche. Vedi **TAVOLA**.

Frazioni astronomiche. Alcuni autori hanno dato questo nome alle frazioni sessagesimali, a motivo dell'uso che se ne fa nei calcoli astronomici, per la divisione dei gradi del circolo. Vedi **SESSAGESIMALE**.

ASTROSCOPIO (*Astron.*). Strumento astronomico, composto di due coni, sulla

superficie dei quali sono descritte le stelle e le costellazioni; il che somministra il mezzo di trovarle facilmente nel cielo. Questo strumento è d'invenzione di Schukhard, professore di matematiche a Tubinga, il quale pubblicò nel 1698 un trattato particolare su questo soggetto.

ASTROSTATO (*Astron.*). Vedi **ELIOSTATO**.

ASTROTESIA (*Astron.*). Nome di cui si servivano gli antichi astronomi, e che aveva un significato presso a poco sinonimo a quello di *costellazione*.

ASUGIA (*Astron.*). Con questo nome trovasi qualche volta indicata la costellazione australe di *Orione*.

ATAIR (*Astron.*). Nome della bella stella di prima o seconda grandezza nella costellazione dell'Aquila, che nei cataloghi è segnata colla lettera α .

ATAUR (*Astron.*). È questo uno dei nomi coi quali trovasi talvolta indicata la costellazione del Toro.

ATENEO, di Cizio, matematico greco della scuola di Platone, viveva verso l'anno 210 avanti G. C. È uno dei discepoli del Liceo, di cui Proclo ci ha trasmesso i nomi e le opere. Sembra che Ateneo si occupasse specialmente dell'applicazione delle matematiche alla meccanica. È autore di un trattato sulle macchine da guerra, che egli indirizzò al console Marcello, poco tempo dopo la presa di Siracusa. Non si sa se quest'opera di Ateneo gli fosse dettata dalla gelosia che aveva potuto ispirargli la gloria di cui allora allora erasi coperto il grande Archimede. Forse è più giusto di attribuirlo all'orgoglio, scusabile in un uomo di talento, di spiegare ad un duce militare, così distinto come Marcello, i mezzi coi quali un vecchio gli aveva per tanto tempo disputato la vittoria. In questa ipotesi, è stato osservato, forse con maggiore spirito che ragione, che Ateneo avrebbe reso un servizio assai più grande al console, palesandogli più presto il segreto della difesa di Archimede. Comunque sia, quest'opera di Ateneo è giunta fino a noi, e si trova inserita nella raccolta intitolata: *Mathematici veteres*, Parigi, Stamperia Reale, 1693, in-fol.

ATIN, ATIR, o ATYR (*Astron.*). È questo uno dei nomi della bella stella di prima grandezza più comunemente chiamata *Aldebaran*.

ATLANTE (*Astron.*). Nome che Dupuis suppone essere appartenuto alla costellazione di Boote, poichè egli spiega o cerca di spiegare per mezzo di questa costellazione tutti i racconti favolosi di Atlante.

ATLANTIDI (*Astron.*). Nome col quale si trovano qualche volta indicate le sette stelle delle Pleiadi.

ATMOSFERA. Da *ατμός*, *vapore*, e *σφαίρα*, *sfera*. Fluido gassoso o aeriforme, che circonda un corpo da tutte le parti, e che partecipa di tutti i suoi moti.

ATMOSFERA TERRESTRE. Massa d'aria le cui proprietà meccaniche sono già state esaminate all'articolo **Aria**. Noi dunque non considereremo adesso l'atmosfera che come formante un corpo, vale a dire come avente *forma*, *dimensioni*, e *peso*.

Esseodo tutte le parti della superficie della terra circondate dall'atmosfera, è certo che se l'una e l'altra fossero in quiete e non fossero obbligate ad una rotazione diurna intorno al loro asse comune, l'atmosfera sarebbe perfettamente sferica, per le leggi della gravitazione; poichè le parti della superficie di un fluido in stato di quiete debbono essere tutte egualmente lontane dal suo centro. Ma la terra avendo, al pari della massa d'aria che la circonda, un moto diurna, le loro differenti parti hanno una forza centrifuga tanto più considerabile, quanto più sono lontane dal centro; e, per conseguenza, la forza centripeta che ritiene tutte queste parti intorno al centro di gravità deve esserne influenzata proporzionalmente, vale a dire deve perdere tanto più della sua intensità, quanto è maggiore la forza opposta. Così la forma dell'atmosfera deve essere quella di

una *sferoide schiacciata* verso i poli, perchè le parti che corrispondono all'equatore hanno una forza centrifuga maggiore di quelle che corrispondono ai poli.

Un'altra causa concorre pure ad aumentare lo schiacciamento della sferoide atmosferica: e questa è la dilatazione cagionata dai raggi del sole che colpiscono più direttamente le regioni dell'equatore che quelle dei poli; donde risulta che la massa d'aria o la parte dell'atmosfera delle regioni polari, essendo meno riscaldata, deve dilatarsi meno ed elevarsi meno. Non ostante, siccome la stessa forza che contribuisce ad elevar l'aria, o a farle occupare uno spazio maggiore, diminuisce la pressione sulla superficie della terra, le alte colonne d'aria verso l'equatore non saranno più pesanti, a parità di circostanze, delle colonne d'aria meno elevate dalla parte dei poli; ma al contrario, se non vi fossero alcune modificazioni, dovrebbero anzi essere più leggere in conseguenza della diminuzione della gravità.

L'altezza dell'atmosfera è stata l'oggetto di un gran numero di ricerche, che non hanno fin qui prodotto che risultati approssimativi più o meno contestabili. Se l'aria non avesse forza elastica, ma fosse dappertutto della stessa densità, dalla superficie della terra fino agli ultimi limiti dell'atmosfera, basterebbe, per determinare con esattezza l'*altezza dell'atmosfera*, conoscere il rapporto della densità del mercurio a questa densità costante dell'aria; poichè allora questo rapporto sarebbe lo stesso di quello dell'altezza del mercurio nel barometro all'altezza totale della colonna d'aria che lo sostiene. Infatti, il peso specifico di una colonna di aria di 27 millimetri di altezza staudo al peso specifico di una colonna di mercurio della stessa base e della stessa altezza come 1 sta a 10470, è chiaro che 10470 volte una colonna d'aria di 27 millimetri, vale a dire una colonna d'aria di 282 metri, sarebbe eguale al peso di una colonna di mercurio di 27 millimetri. Ma la colonna intera d'aria atmosferica fu equilibrio nel barometro ad una colonna di mercurio di 760 millimetri, cioè di 28 volte 27 millimetri, dunque questa colonna dovrebbe essere alta 28 volte 282 metri. Così, ammettendo la densità costante, l'altezza dell'atmosfera sarebbe presso a poco di 7896 metri. Ma la cosa è molto diversa, poichè la densità dell'aria, lungi dall'esser costante, decresce in progressione geometrica a misura che le elevazioni crescono in progressione aritmetica (*Pedi Aëris*); e se la legge di Mariotte fosse esatta per qualunque grado immaginabile di rarefazione, la dilatazione dell'atmosfera sarebbe illimitata, e la sua altezza infinita. Nulladimeno questa conclusione non si accorda colle osservazioni astronomiche, nelle quali non si scorge alcuna traccia dell'influenza che un mezzo resistente eserciterebbe sui moti dei pianeti.

È certo inoltre che l'atmosfera terrestre non può estendersi al di là del centro comune d'attrazione della terra e della luna; poichè, al di là di questo centro, l'attrazione della luna, superando quella della terra, tirerebbe verso il suo proprio centro tutte le parti della nostra atmosfera, e si formerebbe così un vuoto tra le due atmosfere della terra e della luna, ovvero i limiti di queste atmosfere sarebbero nel centro comune di attrazione di questi due corpi. Un'altra causa ancora, cioè la forza centrifuga, si oppone all'estensione indefinita dell'atmosfera; infatti, l'aria partecipando del moto diurno della terra, è chiaro che il limite dell'atmosfera deve trovarsi nel punto in cui la forza centrifuga eguaglia la forza di gravità, poichè al di là il fluido sarebbe lanciato nello spazio dal moto di rotazione, nè resterebbe più unito alla terra.

Sebbene non possa determinarsi in una maniera assoluta l'altezza dell'atmosfera, viene essa ordinariamente valutata di 8000 metri, poichè dalla teoria delle misure barometriche risulta che a questa distanza dalla superficie della terra l'aria deve essere almeno tanto rara, quanto nel vuoto della macchina pneuma-

tica. Abbiamo veduto all'articolo ALTIMETRIA che la formula generale che serve a determinare la differenza di livello di due punti, per una temperatura media di $16^{\circ} \frac{3}{4}$ del termometro di Reaumur, è

$$x = 10000 \cdot [\log h' - \log h],$$

essendo h' l'elevazione in *linee di Parigi* del mercurio nel barometro nel punto più basso, e h la sua elevazione nel punto più alto.

Diamo a questa espressione la forma

$$x = 10000 \cdot \log \frac{h'}{h},$$

o, il che è lo stesso,

$$x = 10000 \cdot \log \frac{m}{n},$$

essendo $\frac{1}{m}$ la densità dello strato d'aria che dà l'altezza barometrica h , e $\frac{1}{n}$

la densità dello strato d'aria che dà l'altezza h' ; poichè queste densità hanno lo stesso rapporto delle altezze.

Da quest'ultima formula si deduce

$$\log m = \frac{x + 10000 \log n}{10000}.$$

Così, prendendo per *unità* la densità dell'aria a livello del mare, o facendo $\frac{1}{n} = 1$, avremo $\log n = \log 1 = 0$, e per conseguenza

$$\log m = \frac{x}{10000},$$

formula per mezzo della quale, facendo successivamente $x = 0$, $x = 100$, $x = 200$, $x = 300$ tese ec., si otterranno le densità corrispondenti a queste altezze. In questa maniera si trova

ALTEZZE IN TESE	DENSITÀ
0.	1.0000
100.	0.9772
200.	0.9549
300.	0.9332
400.	0.9120
500.	0.8912
600.	0.8710
700.	0.8511
800.	0.8318
900.	0.8128
1000.	0.7943
10000.	0.1000
40000.	0.0001

Così, secondo questa teoria, la densità dell'aria sarebbe *diecimila* volte minore all'altezza di 40000 tese, che alla superficie del mare; il che è un grado di rarefazione molto superiore a quello che può ottenersi nelle migliori macchine pneumatiche.

Malgrado questa estrema rarefazione, è fuori di dubbio che l'atmosfera si estende ad un'altezza maggiore; poichè, calcolando l'elevazione di alcune meteore, come le *auroræ boreali*, i *globi di fuoco* ec., come pure la durata del crepuscolo, non si può fare a meno di ammettere che ad un'altezza di più di venti leghe deve trovarsi non solamente dell'aria atmosferica, ma ancora molte altre sostanze. *Vedi CREPUSCOLO.*

L'atmosfera possiede un potere refrattivo, che è cagione di un gran numero di fenomeni, e che esercita un'influenza sensibilissima sulle apparenze celesti (*Vedi REFRAZIONE*). Essa è soggetta ancora a un grandissimo numero di alterazioni e di cangiamenti, per la valutazione dei quali sono stati inventati molti strumenti chiamati: BAROMETRO, TERMOMETRO, IGROMETRO, ANEMOMETRO, ec. Si vedano nel Dizionario tutte queste diverse parole.

ATMOSFERA dei Pianeti. I pianeti e i loro satelliti essendo oggigiorno riconosciuti universalmente per corpi di una natura simile a quella della terra che noi abitiamo, è naturale il supporre che questi astri siano circondati da atmosfere analoghe a quella della quale abbiamo superiormente esposte le proprietà. Le osservazioni astronomiche confermano infatti questa congettura, almeno pei pianeti principali; poichè la piccolezza apparente dei satelliti non ha permesso fino al presente che le nostre cognizioni sul loro stato fisico sieno molto avanzate. Ciò non ostante, la luna sembra formare un'eccezione singolare: è certo che essa non presenta nè nubi alla sua superficie, nè alcuna cosa che possa indicare la presenza di un'atmosfera, per quanto piccola sia la densità che le si voglia attribuire. L'aspetto di questo satellite della nostra terra, irto di montagne, alcune delle quali non hanno meno di 2800 metri di altezza, è interamente vulcanico; le macchie alle quali si è dato il nome di mari sono cavità profonde, nelle quali è impossibile di riconoscere l'esistenza di alcun fluido simile all'acqua; e tutto fa presumere che la luna sia sprovvista di vegetazione, d'acqua, e d'aria.

Nel suo *Sistema del mondo*, Laplace è entrato in molte particolarità sulle atmosfere dei pianeti.

« Tutti gli strati atmosferici, dice egli, debbono prendere, coll'andar del tempo, uno stesso moto angolare di rotazione, comune al corpo che essi circondano; poichè l'attrito di questi strati, gli uni sugli altri e sulla superficie del corpo, deve accelerare i moti più lenti e ritardare i più rapidi, finchè non si giunga tra loro ad una perfetta eguaglianza. In questi cangiamenti, e generalmente in tutti quelli che prova l'atmosfera, la somma dei prodotti delle molecole del corpo e della sua atmosfera, moltiplicate rispettivamente per l'area che descrivono intorno al loro centro comune di gravità i loro raggi vettori proiettati sul piano dell'equatore, rimane sempre la stessa in un medesimo spazio di tempo. Supponendo dunque che, per una causa qualunque, l'atmosfera venga a restringersi, o che una parte si condensi alla superficie del corpo, il moto di rotazione del corpo e dell'atmosfera ne sarà accelerato; poichè i raggi vettori dell'area descritte dalle molecole dell'atmosfera primitiva, divenendo più piccoli, la somma dei prodotti di tutte le molecole per le aree corrispondenti non può rimanere la stessa, a meno che non aumenti la velocità della rotazione.

« Alla superficie esterna dell'atmosfera, il fluido non è ritenuto che dal suo peso, e la figura di questa superficie è tale, che la risultante della forza centrifuga e della forza attrattiva del corpo le è perpendicolare. L'atmosfera è

« schiacciata verso i suoi poli e rilevata al suo equatore; ma questo schiacciamento è limitato; e, quando è al suo massimo, il rapporto dei raggi del polo « e dell'equatore è quello di due a tre.

« L'atmosfera non può estendersi all'equatore che fino al punto in cui la forza « centrifuga bilancia esattamente il suo peso; poichè è chiaro che al di là di « questo limite il fluido deve disperdersi. Relativamente al sole, un tal punto è « distante dal suo centro del raggio di un'orbita di un pianeta che facesse la « sua rivoluzione in un tempo eguale a quello della rotazione del sole. L'atmosfera solare non s'innalza dunque fino all'orbita di Mercurio, e per conseguenza non produce la luce zodiacale che sembra estendersi anco al di là dell'orbita terrestre. D'altronde quest'atmosfera, di cui l'asse dei poli deve essere almeno i due terzi di quello del suo equatore, è molto lontana dall'avere « la forma lenticolare che le osservazioni danno alla luce zodiacale. »

ATMOSFERICO. Ciò che appartiene all'atmosfera, o ciò che ha rapporto coll'atmosfera

Flussi atmosferici. Si chiamano così certi movimenti periodici nell'atmosfera, simili in qualche parte a quelli dell'oceano, e provenienti presso a poco dalle stesse cause. Si veda Laplace, *Exposition du système du monde*, Parigi, 1835, in-4, Lib. IV.

ATTRAZIONE. Termine generale usato in fisica per indicare la causa, la forza o il principio che fa sì che tutti i corpi tendano reciprocamente l'uno verso l'altro, e aderiscano fintantochè non siano separati da qualche altra forza. Le leggi, i fenomeni, ec. dell'attrazione che si svolge in quasi tutte le maravigliose operazioni della natura formano il soggetto principale della teoria newtoniana.

Sebbene Anassagora, Democrito, ed Epicuro ammettessero questa tendenza della materia, e Plutarco ne parlò in un modo assai chiaro nel suo trattato, *Della cagione perchè gli Oracoli non rendano più le risposte*, il principio dell'attrazione, nel senso newtoniano, è stato la prima volta presentato da Copernico. « Quanto alla gravità, dice egli, io non la considero che come una certa apparenza (*apparentia*) naturale, che il creatore ha impresso in tutte le parti della « materia, affinché tendessero ad unirsi in forma globulare per meglio conservarsi: ed è probabile che la stessa forza è pure inerente al sole, alla luna ed ai « pianeti, affinché questi corpi possano mantenersi costantemente nella forma rotonda che loro vediamo » (*De revolutionibus orbium coelestium*, lib. I, cap. 9). Ticone pure ammetteva una forza centrale nel sole per tenere i pianeti nelle loro orbite intorno a lui, sebbene fosse difficile il conciliare quest'attrazione col suo sistema: Keplero, nella introduzione della sua opera, *Astronomia nova*, Praga 1609 in-fol., chiama la gravità un'affezione corporea e scambievolmente tra corpi simili, in forza della quale tendono essi ad unirsi: egli afferma pure che nessun corpo può dirsi assolutamente leggero, ma che quelli che vengono chiamati tali non lo sono che relativamente, e che per conseguenza tutta la materia è soggetta alla forza e alle leggi della gravitazione.

Il primo che, in Inghilterra, abbia adottato l'idea dell'attrazione fu il dottor Gilbert nel suo libro, *De magnete*, Londra, 1600, in-4; e il secondo fu Francesco Bacone, nel suo *Novum organum*, lib. II, aph. 36, 45, 48; nella sua *Sylva sylvarum*, cent. I, cap. 33; non meno che nel suo trattato *De motu*, e particolarmente negli articoli sulla 9^a e sulla 13^a specie di moto. In Francia, l'amisero Fermat e Roberval; e in Italia, Galileo e Borelli. Ma fino a Newton questo principio era stato imperfettamente definito e male applicato.

Prima di Newton, nessuno aveva avuto idee così chiare e così esatte della dottrina dell'attrazione come il dottor Hooke, che, nel suo *Attempt to prove the motion of the earth*, Londra, 1674 in-4, fa osservare che l'ipotesi, secondo la

quale egli spiega il sistema del mondo, è fondata sopra tre principj. 1° Che tutti i corpi celesti non solamente hanno un'attrazione o gravitazione verso i loro propri centri, ma si attraggono ancora reciprocamente l'uno verso l'altro nella loro sfera di attività. 2° Che tutti i corpi che hanno un moto semplice e diretto continuano a muoversi in linea retta, se qualche forza, la cui azione sia continua, non gli costringe a descrivere un circolo, un'ellisse, o qualche altra curva più complicata. 3° Che l'attrazione è tanto più forte quanto più vicini l'uno all'altro sono i corpi che si attraggono. Ma Hooke non poté risolvere il problema generale relativo alla legge della gravitazione che obbligherebbe un corpo a descrivere un'ellisse intorno a un altro corpo in quiete, posto in uno de' suoi fuochi. Questa scoperta ammirabile, che esige il soccorso della geometria trascendente, e che fa il più grand'onore allo spirito umano, era riservata al genio di Newton.

L'attrazione può esser considerata relativamente ai corpi celesti, ai corpi terrestri, e relativamente alle minime particelle dei corpi, cioè agli atomi. Il primo di questi casi è ordinariamente indicato col nome di *attrazione o gravitazione universale*; il secondo con quello di *gravitazione*; il terzo con le parole *affinità, attrazione chimica, attrazione molecolare*. Molti dotti sono adesso di opinione che questa sia sempre la medesima forza considerata sotto diversi aspetti, ma soggetta sempre alla stessa legge.

Ad una distanza finita, tutti i corpi della natura si attraggono l'uno l'altro in ragione diretta delle masse e in ragione inversa del quadrato delle distanze, il che può dimostrarsi nel modo seguente:

Secondo una legge di Keplero, dedotta dall'osservazione, i raggi vettori dei pianeti e delle comete descrivono intorno al sole delle aree proporzionali ai tempi (*l'edi aree proporzionali ai tempi*); ma questa legge non può aver luogo che fintantochè la forza che fa deviare ognuno di questi corpi dalla linea retta è costantemente diretta verso un punto fisso, che è l'origine dei raggi vettori. Dunque la tendenza dei pianeti e delle comete verso il sole emana necessariamente dalla proporzionalità delle aree descritte dai raggi vettori ai tempi impiegati a descriverle. Questa tendenza è reciproca; infatti è una legge generale e invariabile della natura che l'azione e la reazione sono eguali e contrarie. Donde risulta che i pianeti e le comete reagiscono sul sole, e gli comunicano una tendenza verso di loro.

I satelliti di Urano tendono verso Urano, e Urano verso i suoi satelliti. I satelliti di Saturno tendono verso Saturno, e Saturno verso di essi. Lo stesso ha luogo relativamente a Giove e a' suoi satelliti. La terra e la luna tendono pure reciprocamente l'una verso l'altra. La proporzionalità delle aree descritte dai satelliti concorre coll'eguaglianza dell'azione e della reazione a rendere queste asserzioni affatto inattaccabili.

Tutti i satelliti hanno una tendenza verso il sole; poichè sono tutti animati da un moto regolare intorno ai loro pianeti rispettivi come se questi fossero immobili. Donde risulta che i satelliti sono trasportati da un moto che è pure comune al loro pianeta; vale a dire che la stessa forza, colla quale i pianeti tendono continuamente verso il sole, agisce pure sui satelliti, che sono trasportati verso il sole colla stessa velocità dei loro pianeti. E siccome i satelliti tendono verso il sole, così anco il sole tende verso di loro, a motivo dell'eguaglianza dell'azione e della reazione.

Le osservazioni ci hanno fatto conoscere che Saturno devia un poco dal suo cammino quando passa in vicinanza di Giove, il più grande dei pianeti; donde avviene che Giove e Saturno tendono reciprocamente l'uno verso l'altro. Saturno, come ha osservato Flamsteed, turba il moto dei satelliti di Giove, e gli

attrae un poco verso di lui; il che prova che questi satelliti tendono verso Saturno, e che Saturno tende verso di essi.

Per conseguenza è indubitato che tutti i corpi celesti tendono reciprocamente gli uni verso degli altri: ciò non ostante, una tal tendenza, o piuttosto la forza attrattiva che la produce, non appartiene solamente alla loro massa, presa come aggregato, ma tutte le molecole le più piccole vi partecipano e vi contribuiscono. Se il sole agisse sul centro della terra esclusivamente, senza attrarre alcuna delle sue particelle, le ondulazioni dell'oceano sarebbero incomparabilmente più grandi, e differenti molto da quelle che giornalmente abbiamo sotto gli occhi. La tendenza della terra verso il sole è dunque la risultante della somma delle attrazioni esercitate su tutte le molecole, che per conseguenza attraggono il sole in ragione delle loro masse rispettive. Inoltre, qualunque corpo è attratto verso il suo centro proporzionalmente alla sua massa: ciò infatti è evidente, poichè, come abbiamo detto, la forza attrattiva è impressa in ciascuna molecola del corpo. Deve qui parimente osservarsi che se il centro agisce sul corpo, anco questo agisce su quello, perchè l'attrazione segue costantemente la legge dell'eguaglianza dell'azione e della reazione.

L'attrazione è dunque universale, reciproca, e proporzionale alle masse. Rimane a dimostrare che questa forza agisce in una ragione inversa del quadrato della distanza.

Da una delle leggi di Keplero, confermata da tutte le osservazioni, si sa che i quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei corpi celesti sono proporzionali ai cubi delle distanze medie. Ciò posto, siano PBM, TVN (Tav. XXXVI, fig. 4) due orbite circolari e concentriche descritte da due pianeti, e siano t, t' i tempi che questi impiegano a percorrerne l'intero giro. Supponiamo gli archi PB, TV infinitamente piccoli e simili, cioè compresi ambedue tra i medesimi raggi STP, SVB; è chiaro che questi archi sarebbero percorsi dai pianeti in tempi eguali, se eguali pure fossero i tempi delle loro rivoluzioni periodiche: ma il pianeta superiore P, avendo una velocità minore di quella del pianeta inferiore T, descriverà l'arco PE, mentre l'inferiore descriverà l'arco TV. La forza dunque colla quale il sole attrae il primo pianeta è misurata ed espressa da PD, mentre quella che esso esercita sul secondo pianeta è rappresentata da TR; volendo perciò conoscere in qual rapporto stiano queste due forze basterà trovare il rapporto dei piccoli seni-vertici PD, TR. Prendendo pertanto l'espressione analitica del seno-verso, e riflettendo che trattandosi di archi piccolissimi possono trascurarsi le loro potenze superiori alla seconda, si troverà la proporzione

$$PD : PC :: PE^2 : PB^2$$

Ora, siccome il pianeta P, che percorre l'intero giro della sua orbita nel tempo t , descrive in un dato tempo l'arco PE, mentre descriverebbe invece nel medesimo spazio di tempo l'arco PB, se il tempo della sua rivoluzione periodica fosse t' , e siccome si sa che gli spazi percorsi da due pianeti sono in ragione inversa dei tempi periodici, così è facile vedere che si ha la proporzione

$$PE : PB :: t' : t,$$

donde, sostituendo, si trova

$$PD : PC :: t'^2 : t^2,$$

e quindi

$$PD = \frac{PC \times t'^2}{t^2}$$

Ma gli archi PB , TV sono simili, dunque si ha la proporzione

$$PC : TR :: PS : TS :: r : r',$$

indicando con r e r' le distanze dei due pianeti dal sole, ossia i raggi delle loro orbite circolari. Prendendo da questa proporzione il valore di PC , che si

trova essere $\frac{TR \times r}{r'}$, e sostituendolo nel precedente valore di PD , si trova

$$PD = \frac{TB \times r'^2 \times r}{r^2 \times r'}, \text{ e quindi } \frac{PD}{TR} = \frac{r'^2 \times r}{r^2 \times r'};$$

ma per la legge di Keplero si ha la proporzione

$$r^3 :: r'^3 :: r^3 : r'^3,$$

donde

$$r^2 = \frac{r'^2 \times r^3}{r'^3};$$

dunque sostituendo questo valore di r^2 si ottiene

$$\frac{PD}{TR} = \frac{r'^2 \times r \times r'^3}{r'^2 \times r^3 \times r'} = \frac{r'^2}{r^3},$$

ossia

$$PD : TR :: r'^2 : r^3 :: \frac{r'}{r^3} : \frac{r}{r'^3}.$$

In conseguenza, supponendo che i pianeti si muovano in orbite circolari (e nel fatto la differenza non è grande), essi sono sollecitati verso il sole con una forza che varia in ragione inversa del quadrato della distanza. Questa supposizione non è rigorosa; ma la relazione costante dei quadrati dei tempi periodici ai cubi delle distanze essendo indipendente dall'eccentricità, sussisterebbe senza dubbio anco nel caso in cui l'eccentricità svanisse, cioè se i pianeti si muovessero in orbite circolari. La verità di questa proposizione potrebbe facilmente essere stabilita, relativamente alle orbite ellittiche; ma noi omettiamo la dimostrazione per non prolungare quest'articolo al di là dei limiti che ci siamo prescritti.

Se i pianeti fanno la loro rivoluzione intorno al sole in virtù di una forza centrale che agisce in ragione inversa del quadrato della distanza, è naturale l'inferire da questo moto che anco la luna è ritenuta nella sua orbita da una forza centrale diretta verso la terra, forza che differisce dalla gravità dei corpi terrestri soltanto per la diminuzione cagionata dall'aumento del quadrato della distanza della luna. Ora si può far vedere che la rivoluzione della luna intorno alla terra è un fenomeno della stessa specie, e che si spiega nella stessa maniera (vale a dire combinando l'azione simultanea delle forze di proiezione e di gravitazione) del moto curvilineo di una pietra, di una palla di cannone, o di qualunque altro progetto sulla superficie della terra. Se avessimo delle macchine di una forza sufficiente per lanciare un corpo in una linea retta parallela all'orizzonte con una velocità di 7903 metri per secondo; questo corpo, non facendo conto della resistenza dell'aria, girerebbe intorno alla terra come una luna; poi che 7903 è una media proporzionale tra 12733552 metri, che è il diametro medio della terra, e 4^m,9044, che è lo spazio percorso nel primo secondo da un corpo che cade liberamente verso la terra. E il tempo periodico di un tal pro-

getto sarebbe di circa un'ora, 24 minuti e 27 secondi. Se questo corpo potesse esser trasportato alla distanza della luna e lanciato nella stessa direzione della luna, con una celerità che gli facesse percorrere 63233 metri per minuto, esso percorrerebbe intorno alla terra la stessa orbita descritta adesso dalla luna. Noi sappiamo, per esperienza, che la forza colla quale un corpo posto alla superficie della terra tende verso il suo centro gli farebbe percorrere, cadendo, $4^m,9044$ nel primo secondo. Supponiamo che questa forza sia in ragione inversa del quadrato della distanza; alla distanza della luna, che è eguale a 60 semi-diametri della terra, essa sarebbe 60×60 volte minore che alla superficie della terra, e per conseguenza a questa distanza essa sarebbe sufficiente a far discendere un corpo da un'altezza di $4^m,9044$ in un minuto. Questo, infatti è lo spazio del quale la luna, posta alla distanza di 60 semi-diametri terrestri, discende dalla tangente della sua orbita verso il centro della terra in un minuto di tempo; poiché questo spazio è una terza proporzionale al diametro dell'orbita della luna e all'arco descritto nello stesso tempo, e il diametro dell'orbita lunare, cioè 764505170 metri, sta a 63233 (arco descritto in un minuto), come 63233 sta a $4,9044$. Così, il moto si accorda perfettamente al quantità che in direzione colle conseguenze legittime dedotte dal moto dei progetti alla superficie della terra. Ora questi fenomeni sono talmente simili, e coincidono così completamente, che è indispensabile il riferirli ai medesimi principi, cioè: ad una forza di proiezione e ad una forza di gravitazione che varia in ragione inversa del quadrato delle distanze.

Fissando questa legge dell'attrazione, abbiamo considerato i centri dei corpi, sebbene la gravità sia propria a ciascuna molecola, poiché nelle sfere, o nelle sferoidi che poco ne differiscono, l'attrazione delle molecole più distanti dal punto attratto, e quella delle molecole più vicine a questo punto si compensano talmente, che l'attrazione totale è la stessa come se le molecole fossero riunite nel centro di gravità.

Questa legge delle sfere soffre diverse modificazioni, quando i corpi attratti sono alla superficie o nell'interno delle sfere. Un corpo situato in una sfera, e non dappertutto della stessa grossezza, è attratto egualmente da tutte le parti, talmente che rimarrà in quiete in mezzo alle attrazioni che esso prova. Lo stesso ha luogo in una ellissoide omogenea; che abbia le sue superficie, interne ed esterne, simili e concentriche. Supponiamo dunque che i pianeti siano sfere omogenee; la gravità nel loro interno diminuisce come la distanza dai loro centri, poiché l'involuppo esterno non contribuisce punto alla gravità, che è prodotta unicamente dall'attrazione di una sfera di un raggio eguale alla distanza tra il corpo attratto e il centro del pianeta. Ma questa attrazione è proporzionale alla massa della sfera divisa pel quadrato del suo raggio; dunque la gravità dei corpi è proporzionale a questo raggio.

Ciò non ostante sarà bene osservare: 1°. Che questo risultato è rigorosamente vero solamente nell'ipotesi dell'omogeneità dei pianeti; ma questi sono probabilmente composti di strati continuamente più densi, a misura della maggior vicinanza al centro, e allora la gravità al di sotto della superficie diminuisce in un rapporto minore che nel caso della loro omogeneità. 2°. Gli stessi risultati non possono essere esatti che facendo astrazione dall'attrazione molecolare che si trova sempre nei corpi posti alla superficie di una sfera. Quest'attrazione è grandissima nel contatto e nulla a una distanza sensibile; donde risulta che le molecole a contatto, e che sono situate all'estremità opposta del medesimo diametro non attraggono come se fossero unite al centro.

ATTRAZIONE DELLE MONTAGNE. Secondo la teoria newtoniana dell'attrazione, questa forza penetra e investe le minime particelle della materia, e l'azione combinata

di tutte le parti della terra forma l'attrazione della massa totale. Per la stessa ragione dunque che un corpo pesante tende verso il basso percorrendo una perpendicolare alla superficie della terra, deve pure essere attratto verso il centro di una montagna vicina con una forza più o meno grande, secondo la quantità di materia che essa contiene; e l'effetto di questa attrazione, o la forza acceleratrice prodotta da essa, deve dipendere dalla distanza della montagna dal corpo gravitante, perchè questa forza aumenta in ragione inversa del quadrato della distanza. Dietro questi principi, è chiaro che il filo a piombo di un quarto di circolo, o di qualunque altro strumento astronomico, deve deviare dalla sua verticale di una piccola quantità verso la montagna: così le altezze apparenti e le distanze delle stelle dallo zenit, prese con questo strumento, saranno necessariamente erronee; cioè, se la distanza di una stella dallo zenit, fosse osservata in due stazioni, sotto lo stesso meridiano, l'una al sud della montagna e l'altra al nord, e il filo a piombo dello strumento avesse deviato dalla verticale in virtù dell'attrazione della montagna, la stella dovrebbe comparire troppo al nord nell'osservazione fatta alla stazione meridionale, o troppo al sud nella settentrionale; per conseguenza la differenza delle latitudini delle due stazioni, risultante dalle osservazioni, sarebbe più grande del vero. Se dunque la vera differenza delle loro latitudini fosse determinata, misurando sul terreno la distanza delle due stazioni, l'eccesso della differenza trovata coll'osservazione su quella trovata colla misura, deve essere stato prodotto dall'attrazione della montagna; la metà di questo eccesso sarà l'effetto dell'attrazione esercitata sul filo a piombo in ciascuna delle due osservazioni, perchè la montagna attragga egualmente dalle due parti.

La prima idea di determinare la quantità di questa attrazione fu suggerita da Newton, nel suo *Trattato del sistema del mondo*; ma non vi si era posta alcuna attenzione, fin tanto che, nel 1738, Bouguer e La Condamine misurando tre gradi di meridiano vicino a Quito, nel Perù, credettero di scorgere una deviazione del loro filo a piombo, per effetto dell'attrazione del Chimborazo, montagna, in quelle vicinanze, che approssimativamente congetturarono essere circa la dugentesima parte dell'attrazione della terra intera. Osservando le altezze delle stelle fisse in due stazioni, l'una al sud e l'altra al nord della montagna, trovarono, per termine medio delle loro osservazioni, una deviazione di $7''\frac{1}{2}$ prodotta dall'attrazione della montagna; mentre, secondo la teoria, il filo a piombo avrebbe dovuto deviare dalla verticale di $1'43''$. Ciò non ostante, quantunque il risultato generale fosse favorevole alla dottrina di Newton, l'esperienza fu fatta in circostanze così sfavorevoli, che non se ne ottenne tutta la soddisfazione che sarebbe stata desiderabile; e Bouguer termina il racconto delle sue osservazioni esprimendo la speranza di vedere ripetuta questa esperienza in circostanze più favorevoli, o in Francia, o in Inghilterra.

Nientedimeno nessuna nuova esperienza fu istituita, fin tanto che il Dottor Maskelyne, celebre astronomo inglese, sottopose su questo soggetto una proposizione alla Società Reale di Londra, nel 1772; e nel 1774 fu egli medesimo designato a fare le operazioni opportune con tutti gli ajuti necessari. Provveduto degli strumenti i più esatti, scelse la montagna di Schellien, in Scozia, pel luogo delle sue operazioni. La direzione di questa montagna è quasi dall'est all'ovest; la sua altezza media al di sopra delle valli che la circondano è circa 2000 piedi inglesi; e il suo punto più elevato al di sopra del livello del mare 3550 piedi. Si scelsero due stazioni per le osservazioni, l'una al sud e l'altra al nord della montagna. Si usò una cura scrupolosa in tutto ciò che poteva contribuire all'esattezza dell'esperienza; e dall'osservazione di dieci stelle prossime allo zenit, si trovò che il filo a piombo dalla parte settentrionale faceva con quello

dalla parte meridionale un angolo maggiore di $11^{\circ}\frac{1}{2}$ di quello che avrebbe dovuto ottenersi dalla sola differenza della latitudine delle due stazioni, cioè che la deviazione dovuta all'attrazione della montagna era di circa 6 secondi. Si v. dano le *Trasazioni filosofiche* vol. LXV, part. 2, Numeri 48 e 49.

Questi dati sembravano offrire la possibilità di determinare la densità media della terra. Ma il calcolo esigeva necessariamente una somma esattezza, e nel tempo stesso un gran lavoro. Questa operazione non ostante fu intrapresa dal Dott. Hutton, che ne diede la notizia, col risultato delle sue ricerche, nelle *Trasazioni filosofiche* per l'anno 1777, come pure ne' suoi *Tracts on mathematical and philosophical subjects*, Londra, 1812, 3 vol. in-8. Pare dunque dai risultati di questo dotto che la densità media della terra stia a quella dell'acqua comune, come 5 a 1 circa.

Nel 1810 il barone di Zach si accinse a verificare nuovamente l'attrazione delle montagne, facendo uso di un differente metodo. Trovandosi in vicinanza di Marsiglia, nell'occasione di dovere eseguire una misura trigonometrica, scelse tre punti di stazione vicino al monte Mimet, che rimane al nord di quella città. Trovò la latitudine di queste stazioni misurando sulla terra la loro posizione rispetto ad altri punti troppo lontani, dalla montagna per esser sensibilmente affetti dalla sua attrazione, e quindi determinò la latitudine sulle osservazioni astronomiche fatte sul posto. Tutte e tre le stazioni, senza eccezione, presentarono una differenza di $2''$ tra la latitudine geodesica e la latitudine astronomica. Il barone di Zach ha pubblicato un minuto ragguaglio del suo metodo e delle sue osservazioni nell'opera *De l'attraction des montagnes*, Avignone, 1814, 2 vol. in-8.

ATTRITO (*Mecc.*). Si chiama così la resistenza che un corpo prova a scorrere sopra di un altro.

Tutte le volte che due superficie scorrono l'una sopra l'altra, vi è attrito, poichè queste superficie, per quanto levigate ci compariscano, non lo sono mai perfettamente, ed invece sono ricoperte di asperità. Quando però due superficie si toccano, l'eminenza dell'una entrano nelle cavità dell'altra; e per farle scorrere l'una sopra l'altra è necessario staccarne le parti impegnate, sollevando il corpo per liberarle, e, per conseguenza, vincere il peso di questo corpo. È dunque necessaria una forza reale per fare scorrere un corpo sopra un altro, e quello che resiste a questa forza è ciò che costituisce l'attrito.

Amontons fu il primo che riguardò queste questioni con tutta l'attenzione che merita la sua importanza per l'effetto reale delle macchine. Essu pretende (*Mém. de l'Acad.*, 1699) che l'attrito sia semplicemente proporzionale alla pressione, cioè alla forza che adrapponne le due superficie l'una contro l'altra, senza che questa forza dipenda punto dalle loro grandezze. Lo stesso valga generalmente l'attrito come il terzo della pressione. Le posteriori esperienze di Bulfinger (Vedi *Mém. de Petersbourg*, tom. IV) sembrano confermare le idee di Amontons, salvo la differenza di valutazione dell'attrito che, secondo questo fisico, non è che il quarto della forza di pressione.

Parent aggiunse diverse considerazioni ingegnose alla teoria di Amontons. Nella sua nuova statica senza attrito e con attrito, inserita nelle memorie dell'Accademia, anni 1704 e 1712, risolvette diversi problemi importanti. Dopo poco Camus (*Traité des forces mouvantes*), Muschenbroek e Desagoliers, trattarono la stessa questione, ed aggiunsero nuove esperienze. Resulta dai lavori di questi meccanici che il rapporto dell'attrito alla pressione è differente, secondo le differenti specie di materie che strisciano le une contro le altre, e che esso varia dal sesto al terzo. Non vi è però alcuno inconveniente nella pratica ad ammettere il rapporto di Amontons, poichè è meglio di dare un maggior vantaggio alla potenza piuttostochè uno minore. Muschenbroek non adotta nemmeno la propo-

sizione avanzata da Amontons, cioè che l'attrito non aumenta, quando la pressione è la stessa, quantunque si aumentino le superficie. Secondo l'esperienza di questo sapiente professore, l'attrito aumenta quando le superficie sono maggiori, ma meno, in un rapporto molto minore che quello delle superficie.

Bosut, e l'abate Nollet hanno distinto due specie d'attrito, quello che risulta da una superficie che striscia sopra un'altra, e quello che resulta da un corpo che ruota sopra una superficie. La resistenza prodotta dal primo di questi attriti è sempre maggiore di quella che risulta dal secondo. Tale è difatto il risultamento di tutte l'esperienze.

Ferguson ed il professore Vince di Cambridge si sono egualmente occupati dell'attrito, ma era riservato a due celebri sperimentatori Coulomb e Ximenes con lunga serie d'esperienze in grande a superare le principali difficoltà. Coulomb però avendo maggiormente variate le sue prove, ha potuto avvertire la notabile influenza di alcuni elementi inosservati da Ximenes per cui l'esperienza del primo sono più da seguirsi di quelle del secondo. L'Accademia delle scienze avendo successivamente proposto nel 1779 e nel 1782 per soggetto di un concorso, la teoria delle macchine semplici, avuto riguardo agli effetti dell'attrito e della rigidità delle funi, Coulomb, allora Capitano nel corpo reale del genio, riportò il premio che era doppio, e la sua memoria, opera la meglio fatta e la più completa che fosse ancora stata composta sopra questa materia fu stampata nel decimo volume dei sapienti stranieri. Noi qui non possiamo riportare ad uno ad uno i risultamenti ottenuti dal Coulomb; essi hanno servito di base a Frany per la teoria dell'attrito che egli ha data nella sua *Architettura idraulica*. Ecco soltanto i più importanti.

1°. Il rapporto dell'attrito alla pressione, cioè il numero pel quale dee essere moltiplicata la pressione delle superficie, per ottenere la resistenza che oppongono allo sforzo che tende a farle strisciare l'una contro l'altra, per corpi della medesima specie, ed aventi il medesimo grado di polimento, è costante per le diverse pressioni, e per le diverse grandezze delle superficie di contatto.

2°. Questo rapporto, è perciò l'attrito corrispondente ad una data pressione è minore nel contatto dei corpi eterogenei che in quello dei corpi della medesima specie.

3°. L'attrito dei legni che strisciano a secco sopra i legni, oppone, dopo un sufficiente riposo, una resistenza proporzionale alle pressioni, questa resistenza aumenta sensibilmente nei primi momenti del riposo; ma dopo alcuni minuti essa ordinariamente giunge al suo *maximum* ossia al suo limite.

4°. Quando i legni strisciano a secco sopra i legni con una velocità qualunque, l'attrito è ancora proporzionale alle pressioni; ma la sua intensità è molto minore di quella che provasi distaccando le superficie dopo alcuni minuti di riposo: si trova per esempio che la forza necessaria per distaccare e per fare strisciare due superficie di quercia dopo alcuni minuti di riposo sta a quella necessaria per vincere l'attrito quando le superficie hanno già un grado di velocità qualunque, come 9, 5 sta a 2, 2.

5°. L'attrito dei metalli che strisciano sopra i metalli senza sufonatura, è egualmente proporzionale alle pressioni; ma la sua intensità è la medesima, tanto quando si vuole distaccare le superficie dopo un tempo qualunque di riposo, quanto quando si vuole conservare una velocità uniforme qualunque.

6°. Le superficie eterogenee, come i legni ed i metalli, che strisciano l'una sopra l'altra senza intacco, danno per i loro attriti dei risultamenti differentissimi da quelli che precedono, poichè l'intensità del loro attrito relativamente al tempo del riposo, varia lentamente, e non arriva al suo *maximum* che dopo quattro o cinque giorni ed alcune volte prima, invece che nei metalli

essa vi arriva in un istante, e nei legni in alcuni minuti: questo accrescimento è ancor sì lento, che la resistenza dell'attrito nelle velocità insensibili è quasi lo stesso di quello che si supera muovendo o distaccando le superficie dopo alcuni secondi di riposo. Di più nei legni che strisciano senza intonaco sopra i legni, e nei metalli che strisciano sopra i metalli, la velocità non influisce che pochissimo sopra gli attriti, vale a dire che il loro rapporto è presso a poco indipendente dalla velocità; mentre che questo medesimo rapporto nel contatto dei metalli contro il legno cresce sensibilmente a misura che si aumentano le velocità, in guisa che l'attrito varia presso a poco arguendo una progressione aritmetica, quando le velocità crescono seguendo una progressione geometrica.

7°. Il rapporto dell'attrito alla pressione diminuisce notabilmente, quando s'interpongono fra le superficie in contatto materie grasse e untuose come il sego, l'olio, &c.

8°. In questo caso però l'attrito cresce con le velocità delle superficie in contatto presso a poco in progressione aritmetica, quando le velocità crescono in progressione geometrica.

9°. Il rapporto dell'attrito alla pressione di un asse dentro il collare che lo accrechia, o il engegotto che lo sostiene, è molto minore dell'attrito di due corpi della stessa specie che si toccano, quando l'uno deve semplicemente strisciare sull'altro.

10°. L'attrito di un cilindro che ruota sopra una superficie è molto minore, sia di quello di un corpo che semplicemente striscia sopra una superficie, sia di quello di un asse che gira entro il suo collare.

11°. In questa specie di attrito, l'untuosità delle materie poco vale a scemparlo, ed in circostanze eguali il rapporto dell'attrito alla pressione, è in ragione inversa del diametro o cilindro ruotante.

12°. È sempre permesso, nelle applicazioni alle macchine che possono presentarsi, di considerare la resistenza dell'attrito come composta di due parti 1°. una parte proporzionale alla pressione, e questa è l'attrito propriamente detto; 2°. una parte proporzionale all'estensione delle superficie in contatto, e la quale riguardasi come proveniente dalle loro *aderenze*. I valori di queste due parti possono essere considerati, per ciascuna natura di superficie, sensibilmente invariabili con la velocità del moto. Ma in generale non sono i medesimi quando si tratta di distaccare delle superficie che sono state in contatto per qualche tempo, o di continuare un movimento cominciato. Le seguenti tavole contengono tanto per l'attrito delle superficie piane, quanto per quello degli assi nei movimenti di rotazione, i principali risultamenti somministrati dall'osservazione.

TAVOLA PRIMA

DELL' ESPERIENZE FATTE DA COULOMB

ATTRITO DELLE SUPERFICIE PIANE, CHE SONO RIMASTE IN CONTATTO
TANTO QUANTO È NECESSARIO AFFINCHÉ LA RESISTENZA SIA GIUNTA
AL SUO *MAXIMUM*.

INDICAZIONE DELLE SUPERFICIE IN CONTATTO	RAFFORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE	OSSERVAZIONI
QUERCIA SOPRA QUERCIA Fibre parallele	0,44	L'attrito giunge al suo <i>maximum</i> dopo alcuni secondi.
Le fibre parallele e la superficie ridotta a lembi toodeggiati	0,42	Idem.
Fibre incrociate	0,27	Idem.
Le superficie spalmate di sego, rin- nuovato ad ogni esperienza	0,38	L'attrito giunge al suo <i>maximum</i> dopo alcuni giorni. L'aderenza produce una resistenza di circa 19 chilogrammi per metro quadrato.
Le stesse dopo un lungo uso met- tendovi del vecchio grasso	0,21	Idem. L'aderenza produce una resistenza di circa 39 chilo-grammi per metro quadrato.
QUERCIA SULL' ARRETE Fibre parallele	0,67	L'attrito giunge al suo <i>maximum</i> dopo alcuni secondi.
ARRETE SOPRA ARRETE Fibre parallele	0,56	Idem.
OLMO SOPRA OLMO Fibre parallele	0,46	Idem.
FERRO SOPRA QUERCIA	0,20	Non vi è veruna certezza che l'at- trito sia giunto al suo <i>maximum</i> .
RAME SOPRA QUERCIA	0,18	Idem.
FERRO SOPRA FERRO	0,28	Il <i>maximum</i> dell'attrito ha luo- go dopo alcuni secondi.
RAME SOPRA FERRO	0,26	Idem.
Le superficie ridotte a punti ottusi. Le superficie spalmate di sego ver- gine	0,17 0,11	Idem.
— di olio	0,17	Esso ha luogo dopo alcune ore, la resistenza dell'aderenza, è di circa 7 chilogrammi per metro quadrato.
— di vecchia sugna di porco.	0,14	Il valore dell'attrito dopo che il movimento è cominciato non può differire sensibilmente da quello che ha luogo nell'istante in cui il moto comincia.

SEGUITO DELLA TAVOLA PRIMA DI COULOMB

INDICAZIONE DELLE SUPERFICIE IN CONTATTO	RAPPORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE	OSSERVAZIONI
PIETRA FORTE CHE CAVASI NELLE VICINANZE DI PARIGI. (calcarea di una grana finissima), ben levigata, sopra una pietra simile (Rondelet, <i>Trattato dell'arte di fabbricare</i> , t. III, pag. 45) . . .	0,58	Il valore dell' attrito dopo che il movimento è cominciato non può differire sensibilmente da quello che ha luogo nell'istante in cui il moto comincia. Idem. Idem.
PIETRA DEL CASTELLO-LONDON (calcarea durissima) picchettata o scarpellata sopra una pietra simile (Boistard, <i>Esperienze sopra la mano d'opera</i> , ec.).	0,78	
CASSA IN LEGNO CHE STRISCIA SOPRA DEL PAVIMENTO (Régnier, <i>Descrizione del dinamometro</i> , <i>Giornale della scuola politecnica</i> 5 ^o Numero)	0,58	

TAVOLA SECONDA

DELL' ESPERIENZE FATTE DA COULOMB

ATTRITO DELLE SUPERFICIE PIANE QUANDO IL MOTO È ACQUISTATO

INDICAZIONE DELLE SUPERFICIE IN CONTATTO	RAFFORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE	OSSERVAZIONI
QUERCIA SOPRA QUERCIA Fibre parallele Superficie ridotte a spigoli rotondati Fibre incrociate Superficie ridotte a spigoli rotondati Fibre parallele, superficie spalmate di sego nuovo o di sugna vecchia rinnovato ad ogni esperienza. Le superficie ridotte a spigoli rotondati, untuose, o ad intonaco secco, e le superficie restano untuose QUERCIA SULL' ABEYE Fibre parallele ABEYE SULL' ABEYE Fibre parallele OLMO SULL' OLMO Fibre parallele QUERCIA SU FERRO Fibre parallele, e la velocità piccolissima Fibre parallele, le velocità di 0^m,30 per secondo Fibre parallele, le superficie piccolissime, senza spalmatura, ma rimaste untuose QUERCIA SU RAME Fibre parallele, la velocità piccolissima Fibre parallele, la velocità essendo di 0^m,30 per secondo FERRO SU FERRO A secco Con spalmatura rinnovata di sego	0,11 0,08 0,10 0,10 0,035 0,06 0,16 0,17 0,10 0,08 0,17 0,07 0,05 0,18 0,28 0,10	L'aderenza delle superficie cagiona una resistenza di circa 30 chilogrammi per metro quadrato. L'attrito aumenta con la velocità, quando però le superficie non siano state usate per lungo tempo. Il rapporto dell'attrito alla pressione è costante. L'attrito dopo un lungo uso si riduce 0,17.

SEGUITO DELLA SECONDA TAVOLA DI COULOMB

INDICAZIONE DELLE SUPERFICIE IN CONTATTO	RAPPORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE	OSSERVAZIONI
RAME SU FERRO		
A secco	0,24	L'attrito diminuisce quando le superficie sono state usate da molto tempo.
Con spalmatura rinnovata di sego.	0,10	L'aderenza produce una resistenza di circa 14 chilogrammi per metro quadrato.
Con dell'olio sopra un antico intonaco di sego.	0,12	L'aderenza produce una resistenza di circa 7 chilogrammi per metro quadrato.
La superficie ridotta a dei punti rotondati restando untuosa, con spalmatura di sego e di olio. . .	0,12	L'aderenza può essere riguardata come nulla.

TAVOLA TERZA

DELL' ESPERIENZE FATTE DA COULOMB

ATTRITO DEGLI ASSI IN MOTO NELLE LORO CANNE O TUBI DI CONDOTTO

INDICAZIONE DEGLI ASSI MESSI IN ESPERIENZA	RAPPORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE	OSSERVAZIONI
ASSE DI FERRO in canna di rame. . .	0,155	Si vede da questa tavola che in generale l'attrito degli assi, in circostanze simili, è un poco meno considerabile dell'attrito delle superficie piane, e si può ancora giudicare dai precedenti risultamenti, che in tutti i casi che si possono presentare nel moto delle macchine, ove le superficie sono ordinarmente spalmate da corpi grassi, l'attrito è molto al di sotto del terzo della pressione, in guisa che la valutazione ammessa da Belidor è del tutto difettosa.
Lo stesso asse intonacato di sego. .	0,085	
" intonacato di vecchia sugna di porco	0,12	
" con intonaco secco, e le superficie untuose	0,127	
" intonacato di olio.	0,13	
" con intonaco che servì già da molto tempo senza che fosse cessato il moto. . .	0,133	
ASSE DI FERRO in canna di legno, con intonaco di sego.	0,05	
ASSE DI QUERCIA VERDE e canna di guaiaco, con intonaco di sego.	0,033	
Lo stesso asse con superficie untuosa.	0,06	
Lo stesso asse con intonaco usato da molto tempo	0,07	
ASSE DI QUERCIA VERDE canna d'olmo con intonaco di sego.	0,03	
Lo stesso asse, con intonaco secco, le superficie untuose.	0,05	
ASSE DI BOSCO, canna di guaiaco, con intonaco di sego	0,043	
Lo stesso asse con intonaco secco le superficie untuose.	0,07	
ASSE DI BOSCO, canna d'olmo con intonaco di sego.	0,035	
Lo stesso asse, con intonaco secco le superficie untuose.	0,05	

Nell' esperienze di sopra notate, gli assi avevano 47 millimetri di diametro. La pressione su questi assi variò da 25 a 200 chilogrammi. Il rapporto si trovò sensibilmente dipendente dalla pressione, dalla velocità del moto e dalla durata del riposo.

TAVOLA QUARTA

DELL' ESPERIENZE FATTE DA COULOMB

ATTRITO DELLE VETTURE

CIRCOSTANZE DEL MOTO	RAPPORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE	OSSERVAZIONI
Vettura che scorre sopra un terreno orizzontale, invariabile ed unito, i cavalli andando al passo o al trotto	$\frac{1}{25}$	Vedi l' esperienze di M. ^r Bonlard, <i>Giornale di fisica</i> 1785. Una memoria del Conte di Rumford, <i>Biblioteca Britannica</i> , Scienze ed Arti tom. 47. Questi risultamenti convengono alle ruote di una grandezza ordinaria, e non alle piccole ruote.
Sopra un pavimento arenoso i cavalli andando al passo	$\frac{1}{25}$	
I cavalli andando al gran trotto .	$\frac{1}{14}$	
Sopra un terreno sabbioso, o con ciottoli messi di nuovo, al passo come al trotto.	$\frac{1}{8}$	

Nel 1831, il capitano d'artiglieria Morin intraprese di riprodurre tutte l' esperienze del Coulomb sopra una scala più vasta, e con l' aiuto di un apparecchio ingegnosissimo, l' idea del quale appartiene al sig. Poncelet. Egli potette valutare le resistenze cagionate dall' attrito con un grado di precisione superiore a tutto quello che era stato fatto avanti di lui. Un rapporto dell' Arcademia delle Scienze di Parigi avendo richiamato l' attenzione del Governo sopra quest' esperienze, il sig. Morin fu invitato a continuarle dal ministro della guerra, che mise a sua disposizione tutti i materiali necessarj. Il lavoro del sig. Morin forma oggi tre volumi io-4. (Vedi *Nuove esperienze sopra l' attrito*, del capitano Morin, Parigi 1833, 1834).

Le seguenti Tavole tendono a far conoscere i principali risultamenti dell' esperienze del sig. Morin.

TAVOLA PRIMA

DELL' ESPERIENZE FATTE DAL MORIN

ATTRITO DELLE SUPERFICIE PIANE, CHE SONO RIMASTE IN CONTATTO
TANTO QUANTO È NECESSARIO AFFINCHÈ LA RESISTENZA SIA GIUNTA
AL SUO MAXIMUM.

INDICAZIONE DELLA SUPERFICIE IN CONTATTO	RAPPORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE
QUERCIA SOPRA QUERCIA	
Fibre parallele, superficie spalmate con sapone secco.	0,44
Fibre parallele, superficie spalmate di sego.	0,164
Fibre parallele, superficie untuose.	0,390
Fibre perpendicolari, superficie spalmate di sego.	0,254
Fibre perpendicolari, superficie untuose.	0,314
Legno in testa sopra legno in vena, senza spalmatura.	0,271
FAGGIO SULLA QUERCIA	
Fibre parallele, superficie untuose.	0,330
OLMO SULLA QUERCIA	
Fibre parallele, superficie untuose.	0,420
Fibre parallele, superficie spalmate di sapone secco.	0,411
Fibre parallele, superficie spalmate di sego.	0,142
CANAPA IN FILI SULLA QUERCIA	
Fibre perpendicolari, superficie spalmate e bagnate di acqua.	0,869
OLMO SOPRA OLMO	
Fibre parallele, superficie spalmate di sapone secco.	0,217
QUERCIA SULL' OLMO	
Fibre parallele, senza spalmatura.	0,376
Fibre parallele superficie spalmate di sego.	0,178
FERRO SU QUERCIA	
Fibre parallele, superficie spalmate e bagnate di acqua.	0,649
Fibre parallele, superficie spalmate di sego.	0,108
FERRO FUSO SOPRA QUERCIA	
Superficie intonacate e bagnate di acqua.	0,646
Superficie spalmate di sego.	0,100
Superficie spalmate di Olio.	0,100
Superficie untuose.	0,100
Superficie spalmate di grasso di porco.	0,100
RAME SU QUERCIA	
Superficie spalmate di sego.	0,100
CARPINE SU FERRO FUSO	
Fibre parallele, superficie spalmate di sego.	0,131
Fibre parallele, superficie spalmate di grasso di porco.	0,136
PELLE DI BUE CONCIAIA, SU FERRO FUSO	
Cuoio combaciante, superficie spalmate e bagnate di acqua.	0,621
Cuoio orizzontale, in identico stato delle superficie.	0,615
Cuoio combaciante, superficie spalmate di Olio.	0,122
Cuoio orizzontale, in identico stato delle superficie.	0,127
Cuoio untuoso e combaciante, il ferro fuso bagnato di acqua.	0,267

SEGUITO DELLA PRIMA TAVOLA DEL MORIN

INDICAZIONE DELLA SUPERFICIE IN CONTATTO	RAPPORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE
OLMO SU FERRO FUSO	
Fibre parallele superficie untuose.	0,098
FERRO FUSO SU FERRO FUSO	
Senza spalmatura.	0,162
Superficie spalmate di sego	0,100
FERRO SO FERRO FUSO	
Senza spalmatura	0,194
Superficie spalmate di sego.	0,100
Superficie spalmate di olio di ulivo.	0,113
Superficie untuose ridotte a lembi tondeggianti	0,118
ACCIAIO SO FERRO FUSO	
Superficie spalmate di sego.	0,108
OTTONE SU FERRO FUSO	
Superficie spalmate di sego.	0,103
BRONZO SU FERRO FUSO	
Superficie spalmate di sego.	0,106
FERRO FUSO SO FERRO	
Superficie spalmate di sego.	0,100
Superficie spalmate di grasso di porco	0,100
FERRO SU FERRO	
Senza spalmatura	0,137
Superficie spalmate di sego.	0,115
BRONZO SU BRONZO	
Superficie spalmate di olio di olive o untuose.	0,164

Paragonando fra loro i rapporti dell'attrito alla pressione, trovati in queste prime serie d'esperienze dal Coulomb e dal Morin rispetto a sostanze simili, rimarremo maravigliati dell'enormi differenze che vi si riscontrano. Secondo il Morin queste differenze sarebbero principalmente dovute al modo di preparare le superficie. Sembra infatti che la più leggiera untuosità conservata dalle superficie de' legni in contatto sia bastante a produrre delle forti differenze nei risultamenti: in un'esperienza sull'attrito del ferro strisciante a secco sul legno, e che il Morin ebbe occasioni di ripetere immediatamente dopo quelle del cuoio nero lustrato e posto sopra la quercia, ottenne de' risultamenti che si avvicinavano moltissimo a quelli del Coulomb; e la differenza di questi con i suoi propri non poteva derivare che dalla leggerissima untuosità che un tal cuoio preparato, come si sa con olio di balena, avea comunicato alla superficie del legno; poichè avendo fatto raschiare esattamente questa superficie, l'esperienza gli diede le stesse resistenze che avea egli osservate da principio.

Tutte le volte perciò, che si tratterà di calcolare l'attrito de' legni dritti e puliti, a secco, o senza alcuna specie di spalmatura, converrà adottare i risultamenti del Morin a preferenza di quelli del Coulomb.

TAVOLA SECONDA

DELL' ESPERIENZE FATTE DAL MORIN

ATTRITO DELLE SUPERFICIE PIANE QUANDO IL MOTO È ACQUISTATO

INDICAZIONE DELLE SUPERFICIE IN CONTATTO	RAPPORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE
QUERCIA SU QUERCIA	
Fibre parallele a secco	0,48
Fibre incrocciate a secco	0,32
Fibre incrocciate, superficie bagnate	0,25
Fibre parallele, superficie spalmate di sapone secco	0,164
Fibre parallele, superficie spalmate di sego	0,075
Fibre parallele, superficie untuose	0,108
Fibre perpendicolari, a secco	0,336
Fibre perpendicolari, superficie spalmate di sego	0,083
Fibre perpendicolari, superficie spalmate di grasso di porco	0,072
Fibre perpendicolari, untuose	0,143
Le fibre delle assicelle striscianti sono verticali, mentre le fibre delle sottoposte sono orizzontali e parallele al senso del moto; superficie senza spalmatura	0,192
FAGGIO SU QUERCIA	
Fibre parallele, a secco	0,36
Fibre parallele, superficie spalmate di sego	0,055
Fibre parallele, superficie untuose	0,153
OLNO SU QUERCIA	
Fibre parallele, a secco	0,43
Fibre incrocciate, a secco	0,45
Fibre parallele, superficie spalmate di sapone secco	0,137
Fibre parallele, superficie spalmate di sego	0,070
Fibre parallele, superficie spalmate di grasso di porco	0,063
Fibre parallele, untuose	0,119
PELLI DI BOE CONCIATE SU QUERCIA	
Cuoio combaciante su quercia, senza spalmatura	0,296
FERRO SU QUERCIA	
Fibre parallele, a secco	0,626
Fibre parallele, superficie spalmate e bagnate di acqua	0,256
Fibre parallele, superficie spalmate di sapone secco	0,214
Fibre parallele, superficie spalmate di sego	0,085
FERRO FUSO SULLA QUERCIA	
Le fibre delle assicelle sottoposte parallele nella direzione del moto, senza spalmatura	0,490
Le fibre delle assicelle sottoposte parallele nel senso del moto, superficie spalmate di sapone secco	0,189
Le fibre delle assicelle sottoposte parallele nel senso del moto, superficie saturate di acqua	0,218
Le fibre delle assicelle sottoposte parallele nella direzione del moto, spalmate di sego	0,078
Le fibre delle assicelle sottoposte parallele nel senso del moto spalmate di grasso di porco	0,075

SEGUITO DELLA TAVOLA SECONDA DEL MORIN

INDICAZIONE DELLE SUPERFICIE IN CONTATTO	RAPPORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE
Le fibre delle asicelle sottoposte parallele nel senso del moto, e spalmate di olio	0,075
Le fibre delle asicelle sottoposte parallele nella direzione del moto, superficie untuose	0,107
RAME SULLA QUERCIA	
Fibre dell'asicella sottoposta parallele nel senso del moto, a secco	0,6a
Fibre dell'asicella sottoposta parallele nel senso del moto, superficie spalmate di sego	0,069
Fibre dell'asicella sottoposta parallele nel senso del moto, superficie untuose	0,100
CANAPA IN FIEL SU QUERCIA	
Le fibre di canapa e le fibre delle asicelle sottoposte perpendicolari fra loro, superficie spalmate e bagnate di acqua	0,33a
OLMO SOPRA OLMO	
Fibre parallele, superficie spalmate di sapone secco	0,139
Fibre parallele, superficie untuose	0,14a
QUERCIA SULL'OLMO	
Fibre parallele, senza spalmatura	0,146
Fibre parallele, superficie spalmate di sapone secco	0,136
Fibre parallele, superficie spalmate di sego	0,073
Fibre parallele, superficie spalmate di grasso di porco	0,066
Fibre parallele, superficie untuose	0,136
FERRIO FUSO SULL'OLMO	
Senza spalmatura	0,195
Superficie spalmate di sego	0,077
Superficie spalmate di olio di ulivo	0,061
Superficie spalmate di grasso di porco e piombaggine	0,191
Superficie untuose, dopo spalmatura di sego	0,125
Superficie untuose, dopo spalmatura di grasso di porco e piombaggine	0,137
FERRIO SULL'OLMO	
Fibre parallele, senza spalmatura	0,15a
Fibre parallele, superficie spalmate di sego	0,078
Fibre parallele, superficie spalmate di grasso di porco	0,076
Fibre parallele, superficie spalmate di olio di ulivo	0,065
Fibre parallele, superficie untuose	0,138
OLMO SU FERRIO ROJO	
Le fibre dell'olmo parallele nel senso del moto, superficie spalmate di sego	0,066
Le fibre dell'olmo parallele nel senso del moto, superficie untuose	0,135
QUERCIA SU FERRIO ROJO	
Le fibre della quercia perpendicolari alla direzione del moto, senza spalmatura	0,37a
Le fibre della quercia parallele nel senso del moto, superficie spalmate di sego	0,080
Le fibre della quercia parallele nel senso del moto, superficie untuose	0,168

SEGUITO DELLA SECONDA TAVOLA DEL MORIN

INDICAZIONE DELLA SUPERFICIE IN CONTATTO	RAPPORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE
CARPINE SU FERRO RUO	
Le fibre del carpino parallele nel senso del moto, senza spalmatura	0,394
Le fibre del carpino parallele nel senso del moto, superficie spalmata di sego	0,070
Le fibre del carpino parallele nel senso del moto, superficie spalmata di grasso di porco	0,071
Le fibre del carpino parallele nel senso del moto, superficie spalmata di grasso di porco e di piombaggine	0,055
Le fibre del carpino parallele nel senso del moto, superficie spalmata di olio	0,068
Le fibre del carpino parallele nel senso del moto, superficie spalmata di asfalto	0,060
Le fibre del carpino parallele nel senso del moto, superficie spalmata di untume delle ruote	0,095
Le fibre del carpino parallele nel senso del moto, superficie untuose	0,136
GUIACO SU FERRO RUO	
Fibre del guaiaco parallele nel senso del moto, superficie spalmata di sego	0,074
Fibre del guaiaco parallele nel senso del moto, superficie spalmata di olio	0,076
Fibre del guaiaco parallele nella direzione del moto, superficie untuose	0,121
PERO SALVATICO SU FERRO RUO	
Fibre del pero parallele nella direzione del moto, senza spalmatura	0,136
Fibre del pero parallele nella direzione del moto, superficie spalmata di sego	0,067
Fibre del pero parallele nella direzione del moto, superficie spalmata di grasso di porco	0,068
Fibre del pero parallele nella direzione del moto, untuose	0,173
PILLOLE DI BUE CORCIATA SU FERRO RUO	
Il cuoio combaciante, senza spalmatura	0,559
Il cuoio combaciante, superficie spalmata ed imbevuta di acqua	0,365
Il cuoio combaciante, superficie spalmata di sego	0,159
Il cuoio combaciante, superficie spalmata di olio	0,133
Il cuoio untuoso, il ferro fuso bagnato di acqua	0,229
Il cuoio combaciante, superficie spalmata di olio	0,135
FERRO RUO SU FERRO RUO	
Senza spalmatura	0,152
Superficie bagnata di acqua	0,314
Superficie spalmata di sapone	0,197
Superficie spalmata di sego	0,100
Superficie spalmata di grasso di porco	0,070
Superficie spalmata di olio di ulivo	0,064
Superficie spalmata di grasso di porco e piombaggine	0,055
Superficie untuose	0,144

SEGUITO DELLA SECONDA TAVOLA DEL MORIN

INDICAZIONE DELLA SUPERFICIE IN CONTATTO	RAPPORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE
FABBO SU FABBO ROSSO	
Le fibre del ferro parallele nel senso del moto, senza spalmatura.	0,194
Le fibre del ferro parallele nel senso del moto superficie spalmate di sego.	0,103
Le fibre del ferro parallele nel senso del moto, superficie spalmate di grasso di porco.	0,076
Le fibre del ferro parallele nel senso del moto, superficie spalmate di olio di ulivo.	0,066
Le fibre del ferro parallele nel senso del moto, superficie spalmate di untume delle ruote.	0,124
ACCIAIO SU FABBO ROSSO	
Senza spalmatura.	0,202
Superficie spalmate di sego.	0,105
Superficie spalmate di grasso di porco.	0,081
Superficie spalmate di olio.	0,079
Superficie untuose.	0,109
OTTONE SU FABBO ROSSO	
Senza spalmatura.	0,189
Superficie spalmate di sego.	0,072
Superficie spalmate di grasso di porco.	0,068
Superficie spalmate di olio.	0,066
Superficie spalmate di untume delle ruote.	0,134
Superficie untuose.	0,115
BAKRO SU FABBO ROSSO	
Senza spalmatura.	0,217
Superficie spalmate di sego.	0,086
Superficie spalmate di olio di ulivo.	0,077
Superficie untuose.	0,107
CANAPA IN FILI SU FABBO ROSSO	
I fili di canapa perpendicolari nel senso del moto, come negli stantuffi, superficie spalmate di sego.	0,191
I fili di canapa perpendicolari nel senso del moto, come negli stantuffi, superficie spalmate di olio.	0,153
QUERCIA SU FABBO	
Fibre parallele, superficie spalmate di sego.	0,098
Fibre parallele, superficie untuose.	0,149
GUIACO SU FABBO	
Fibre parallele, superficie spalmate di olio di ulivo.	0,073
Fibre parallele, superficie untuose.	0,166
FABBO ROSSO SOPRA FABBO	
Superficie spalmate di sego.	0,098
Superficie spalmate di grasso di porco.	0,088
Superficie spalmate di olio di ulivo.	0,083
Superficie spalmate di untume delle ruote.	0,155
Superficie untuose.	0,143
FABBO SOPRA FABBO	
Fibre parallele senza spalmatura.	0,138

SEGUITO DELLA SECONDA TAVOLA DEL MORIN

INDICAZIONE DELLE SUPERFICIE IN CONTATTO	RAPPORTO DELL' ATTRITO ALLA PRESSIONE
Fibre parallele, superficie spalmate di sego.	0,082
Fibre parallele, superficie spalmate di grasso di porco.	0,081
Fibre parallele, superficie spalmate di olio di ulivo.	0,070
Fibre parallele, superficie untuose.	0,177
ACCIAIO SOPRA FERRO.	
Superficie spalmate di sego.	0,093
Superficie spalmate di grasso di porco.	0,076
BRONZO SOPRA FERRO	
Senza spalmatura.	0,161
Superficie spalmate di sego.	0,081
Superficie spalmate di grasso di porco e di piombaggine.	0,089
Superficie spalmate di olio di ulivo.	0,072
Superficie untuose.	0,166
GHIAIO SOPRA BRONZO	
Superficie spalmate di sego.	0,082
Superficie spalmate di olio di ulivo.	0,053
Superficie untuose.	0,146
PELLE DI BOV CONCIATA, SOPRA BRONZO	
Cuoio combaciante, superficie spalmate di sego.	0,241
Cuoio combaciante, superficie spalmate d'olio di ulivo.	0,191
Cuoio combaciante ed untuoso, il bronzo bagnato di acqua.	0,287
Cuoio posto orizzontalmente, superficie spalmate di sego.	0,138
Cuoio posto orizzontalmente, superficie spalmate di olio di ulivo.	0,135
Cuoio posto orizzontalmente ed untuoso, il bronzo bagnato di acqua.	0,244
FERRO ROSSO SOPRA BRONZO	
Senza spalmatura.	0,147
Superficie spalmate di sego.	0,085
Superficie spalmate di grasso di porco.	0,070
Superficie spalmate di olio di ulivo.	0,067
Superficie untuose.	0,132
FERRO SOPRA BRONZO	
Senza spalmatura.	0,192
Superficie spalmate di sego.	0,103
Superficie spalmate di grasso di porco.	0,075
Superficie spalmate di olio di ulivo.	0,078
Superficie spalmate di untume delle ruote.	0,168
Superficie untuose.	0,160
ACCIAIO SOPRA BRONZO	
Senza spalmatura.	0,152
Superficie spalmate di sego.	0,086
Superficie spalmate di olio di ulivo.	0,053
Superficie spalmate di grasso di porco e di piombaggine.	0,067
Superficie spalmate di untume delle ruote.	0,170
BRONZO SOPRA BRONZO	
Senza spalmatura.	0,201
Superficie spalmate di olio.	0,058
Superficie untuose.	0,134

Riassumendo queste diverse esperienze e gli altri risultamenti enunciati nelle memorie che sono servite di appoggio alle stesse, presentate dal Morin, si rileva, che

Quando si sfregano gli uni contro gli altri, i diversi corpi impiegati nella meccanica usuale, intonacandoli di acqua, di grasso, di olio, di sego, ed anche di materie viscoso; come l'asfalto, si trova che l'attrito è: 1° Proporzionale alla pressione; 2° indipendente dalla velocità; 3° indipendente dall'estensione della superficie di contatto.

Le superficie secche strisciando le une sull'altre senza intonaco, provano una notevole alterazione. Questo effetto generale è molto più sensibile nei corpi di tessuto fibroso che nei corpi granulosi, il perchè quando abbiamo bisogno di attriti o sfregamenti a secco, fa il uopo scegliere dei corpi granulosi per farli strisciare gli uni su gli altri, oppure fare strisciare un corpo granuloso sopra un corpo fibroso.

Le tavole da noi riportate, unite alle diverse osservazioni fatteci, potranno essere sufficienti a calcolare con approssimazione il valore assoluto delle resistenze che i corpi provano per strisciare gli uni sugli altri, tutte le volte che si tratterà di pressioni fortissime, come quelle che s'incontrano nelle macchine usuali. In quanto poi all'attrito proveniente dalla rotazione de' corpi, che chiamasi attrito di seconda specie, questo in confronto del primo alcune volte non è apprezzabile, e non si considera in tutti i calcoli relativi ai corpi solidi e duri, che entrano nella composizione delle macchine.

Così quando un carro cammina rotolando sopra un piano, l'attrito o sfregamento non esiste, per così dire, specialmente se questo carro è perfettamente cilindrico, e che la superficie sia liscia. In generale l'attrito di seconda specie è altrettanto minore quanto il diametro del cilindro mobile è più piccolo.

Una ruota di 2 piedi di diametro, che giri sul terreno carica di un peso di 100 chilogrammi, dà luogo ad una resistenza che non oltrepassa il trentesimo della pressione, cioè 3 chilogrammi. Se il corpo rotola però sopra una superficie scabra, come di sabbia, di terra ec., questa resistenza diviene sensibile.

In generale quando la superficie sopra della quale il corpo deve rotolare, resta piana e sempre liscia per una data estensione, l'attrito del corpo rotolante sopra questo secondo spazio può riguardarsi come piccolo. La sua poca resistenza spiega l'uso dei carri o cilindri nel trasporto dei massi di pietra dei più grandi carichi. Come ognuno sa, il carico è portato da due carri o cilindri che camminano su due panconi fermati sulla superficie del terreno affinché non affondino. Un terzo carro, posto davanti ai due primi, riceve il masso o il carico, e nel momento in cui il cilindro posteriore rimane libero, questo è rimesso davanti ed è destinato a ricevere il suo carico nel momento in cui è spinto fino a lui. Tali sono le operazioni da farsi successivamente. L'attrito di rotazione consuma incomparabilmente minor forza che se il masso di pietra o il carico qualunque fosse strascinato sulle superficie del terreno. Infatti un masso di pietra di 540 chilogrammi, strisciando sopra un piano di pietra non poteva esser mosso che da un peso di 379 chilogrammi, portato poi sopra carri o cilindri che giravano sopra panconi, bastò un peso di 11 chilogrammi per farlo muovere.

Veduto in generale per l'attrito, ciò che poteva appartenere all'esperienza, passiamo a stabilire il metodo di determinare l'attrito, e quindi ne faremo l'applicazione ad alcune macchine.

1. Avendo riconosciuto di sopra, che l'attrito era sensibilmente proporzionale alla pressione; si rappresenti con f l'attrito esercitato da un corpo omogeneo AB, (Tav. XXXVII, fig. 1), unitato dall'unità di peso, se AB' è doppio di AB, l'attrito sarà $2f$; se AB' è triplo di AB, l'attrito sarà $3f$; e così di seguito; in

modo che rappresentando con F l'attrito esercitato dal corpo AM che contiene un numero N di unità di peso, avremo.

$$F = Nf \dots (1)$$

Ecco adesso come possiamo misurare l'attrito.

Sia AB (Tav. XXXVII, fig. 2) il corpo che esercita l'unità di pressione sopra il piano orizzontale LH . In un punto C della sua superficie situato nella direzione del centro di gravità G del corpo medesimo, si attacchi una corda che passi sopra una puleggia fissa D , in guisa che DC sia il prolungamento di GC . All'estremità inferiore E di questa corda, si sospenda un altro corpo la cui massa sia M , ed il peso P .

L'equilibrio sussisterà fintantochè il peso P aumentato del peso della parte verticale della corda sarà minore dell'attrito di AB sopra il piano fisso, e della corda sopra la puleggia D ; e se P aumenta gradatamente, l'intensità che esso avrà quando sarà vicino a vincere la resistenza misurerà l'attrito f esercitato dall'unità di pressione.

2. Esiste un altro metodo per misurare l'attrito, ed il quale deriva dal seguente teorema: Se si pone un corpo MN sopra un piano inclinato AC (Tav. XXXV, fig. 8) e che si aumenti l'angolo A che il piano inclinato fa con l'orizzonte, finchè il corpo sia sul punto di strisciare, l'unità di attrito f sarà eguale a $\tan A$.

Per dimostrarlo si conducano dal centro di gravità G del corpo, le perpendicolari GD e GK , l'una al piano orizzontale e l'altra al piano inclinato. GD rappresenti il peso del corpo, e decomponiamo GD in due forze GH e GK , la prima parallela al piano inclinato, e la seconda perpendicolare a questo piano, avremo

$$GH = DK = GD \sin DGK,$$

$$GK = GD \cos DGK;$$

ora, gli angoli DGK e CAB sono eguali come complementi degli angoli acuti il di cui vertice è in I . Sostituiamo perciò, nelle precedenti equazioni, DGK ad A , ciò che darà

$$GH = GD \sin A,$$

$$GK = GD \cos A,$$

ovvero (N°. 1)

$$GH = N \sin A,$$

$$GK = N \cos A.$$

La pressione che sopporta il piano inclinato essendo espressa da $GK = N \cos A$, l'intensità dell'attrito sarà misurata da $N \cos A \times f$; ma l'attrito essendo la forza che impedisce al corpo di strisciare, dovrà fare equilibrio alla componente $GH = N \sin A$ che agisce nel senso della lunghezza del piano inclinato, donde segue che avremo

$$N \cos A \cdot f = N \sin A.$$

Da questa equazione ricavasi

$$f = \tan A \dots (2)$$

Quest'angolo è ciò che si chiama l'angolo dell'attrito, esso non è costante che nell'ipotesi in cui la legge che esso segue sia proporzionale alla pressione. Infatti non abbiamo ottenuta la formula (2) se non che impiegando l'equazione (1), la quale contiene questa legge; legge che può essere soggetta a qualche variazione, e specialmente nel caso in cui la pressione sia grandissima.

3. L'aderenza dei corpi è ancora una delle cause fisiche che si oppongono al loro movimento, non si può valutarla precisamente, poichè essa è suscettibile di accrescersi molto col tempo, nelle macchine che non sono punto in azione, ed al contrario di alterarsi alcune volte in quelle che sono in movimento.

La legge che essa segue è di essere sensibilmente proporzionale alle superficie aderenti. Così, rappresentando con d l'aderenza relativa all'unità di superficie, quella che ha luogo sopra la superficie n avrà per espressione nd .

TEORIA DELL'ATTRITO IN ALCUNE MACCHINE.

4. Sieno P il motore ed S la resistenza applicata ad un punto m di un corpo (Tav. XXXV, fig. 9), e le quali, tenendolo in equilibrio sopra un piano inclinato, formano con la lunghezza di questo piano degli angoli α , α' . Se non vi fosse nè attrito, nè aderenza, le condizioni di questo equilibrio si ridurrebbero a

$$P \cos \alpha = S \sin \alpha' \dots \dots (3)$$

ma avendo riguardo all'attrito e all'aderenza, siccome queste due forze sono contrarie al motore quando questo tende a sfiorger in verso B , è necessario che queste siano aggiunte alla resistenza $S \cos \alpha'$. Per determinarle, osserveremo primieramente che la pressione esercitata sopra il piano inclinato deriva non solamente dalla componente di P , perpendicolare in m , ma ancora dalla componente di S , perpendicolare nel medesimo punto. La prima ha per espressione $P \sin \alpha$, e la seconda $S \sin \alpha'$. La riunione di queste due pressioni sarà perciò la quantità che abbiamo rappresentata con N nell'equazione (1), in guisa che la forza dovuta all'attrito sarà espressa da $(P \sin \alpha + S \sin \alpha') f$. Quanto a quella che è dovuta all'aderenza, abbiamo veduto che supponendo che n sia la superficie sopra della quale essa agisce, questa aderenza avrà per valore nd . Aggiungendo dunque queste due forze al secondo membro dell'equazione (3), avremo per condizione dell'equilibrio,

$$P \cos \alpha = S \cos \alpha' + S \sin \alpha' f + P \sin \alpha f + nd,$$

da questa equazione si ricava

$$P = \frac{S \cos \alpha' + S f \sin \alpha' + nd}{\cos \alpha - f \sin \alpha} \dots \dots (4).$$

5. Se al contrario, la potenza non fa che ritenere il punto m , e che la resistenza tenda a trasportarlo verso B , sarà quest'ultima che dovrà vincere l'attrito e l'aderenza; per conseguenza queste due forze agiranno in favore del motore, e dovranno cangiare di segno. Rappresentando quindi con P' il motore che conviene in questa ipotesi avremo

$$P' = \frac{S \cos \alpha' - S f \sin \alpha' - nd}{\cos \alpha + f \sin \alpha} \dots \dots (5).$$

6. Occupiamoci adesso dell'equilibrio della leva e di quello della puleggia, avendo riguardo all'attrito.

Supponiamo dunque che un cilindro retto e verticale traversi una leva: siccome le circonferenze sono le stesse, tanto che il cilindro giri intorno della leva, quanto che la leva giri intorno del cilindro, adotteremo quest'ultima ipotesi, e considereremo un punto m della leva che (Tav. XXXV, fig. 10), essendo in contatto col cilindro è sottoposto all'azione dell'attrito. Se questo cilindro

fisso è tagliato al punto m da un piano orizzontale, potremo prendere questo piano per quello delle x e delle y , e riportarvi tutte le forze; poichè decomponendole in due gruppi, le une orizzontali e le altre verticali, quest'ultime saranno distrutte dal cilindro che si suppone fisso. Le sezioni del cilindro e della leva, per il piano delle x, y , avranno rispettivamente l'immagine del cerchio mBB' e della curva piana GIL . Ciò stabilito, risulta dall'immobilità del cilindro, che il punto m non potrà provare che un movimento circolare intorno del punto C ove l'asse di questo cilindro è tagliato dal piano delle x, y . Il punto m sarebbe effettivamente trasportato seguendo la circonferenza di questo cerchio, se non fosse messo in equilibrio dall'attrito combinato con la risultante R delle forze del sistema, e con la resistenza che oppone l'asse fisso. Questa resistenza essendo una forza normale che agisce seguendo la retta mC , possiamo sostituire questa forza al cilindro fisso, e riguardare il punto m come un punto libero che sarebbe messo in equilibrio dalle tre seguenti forze: 1° la forza normale diretta da m in C , 2° l'attrito che agisce seguendo la tangente mD ; 3° la risultante R di tutte le forze del sistema.

7. Osserviamo che qualunque due di queste tre forze siano applicate in m , non ne segue però che la forza R debba terminare ancora al medesimo punto m ; mentre, benchè in generale l'equilibrio non possa sussistere fra tre forze che quando esse concorrono in un medesimo punto, le due forze dirette seguendo le rette mD ed mC possono essere sole applicate al punto m , poichè la terza forza riattaccandosi ad un altro punto A , può tendere egualmente a trasportare m per mezzo dei punti del corpo i quali sono tutti legati fra di loro.

Dopo questa osservazione, basta di non sapere in qual luogo è situato il punto d'applicazione A della forza R , perchè si possa supporlo differente da m .

Con le condizioni dell'equilibrio delle nostre tre forze dipendono dalle condizioni stabilite per le forze situate in un piano ed applicate a differenti punti legati fra di loro in un modo invariabile, l'edi. Forze.

8. Per soddisfare a queste condizioni, fissiamo l'origine delle coordinate al punto C , e rappresenteremo con N la forza normale che forma degli angoli a e b con gli assi; con F l'attrito che fa degli angoli a' e b' con i medesimi assi, e finalmente con h il raggio del cilindro, che presso a poco viene considerato lo stesso che quello del buco nel quale si adatta la leva. Riguardo a R che è la terza forza, indicheremo con X e con Y le sue componenti nel senso delle x e in quello dell' y , e con r la perpendicolare abbassata dal punto C sopra la direzione di questa forza.

Ciò stabilito le citate condizioni, esigono che la somma delle componenti nel senso delle x sia eguale a zero, cioè che una delle componenti di queste forze sia eguale alla somma algebrica dell'altre; per conseguenza prendendo $N \cos a$ per questa componente, dovremo avere

$$N \cos a = X + F \cos a' \dots \dots (6).$$

Per la medesima ragione, le componenti nel senso delle y ci daranno l'equazione

$$N \cos b = Y + F \cos b' \dots \dots (7);$$

Finalmente la terza equazione dell'equilibrio, che è quella del momento, l'edi. MOMENTI, ci dà

$$Rr = Fh \dots \dots (8).$$

Si diverrà, mettendo per F il suo valore ricavato dall'equazione (1),

$$Rr = N\sqrt{h} \dots \dots (9).$$

9. Avanti di fare uso dell'equazioni (6) e (7), osserviamo che una sola delle quattro quantità angolari $\cos a$, $\cos b$, $\cos a'$, $\cos b'$ che entrano in queste equazioni, basta per determinare tutte le altre. Infatti l'angolo γCx (Tav. XXXV, fig. 10) delle coordinate essendo retto, abbiamo

$$\cos b = \sin a;$$

da un'altra parte, se si conduce una parallela FK a CB (Tav. XXXV, fig. 11) avremo

$$BFH = BFK + KFH;$$

ossia

$$a' = 90^\circ + a;$$

per conseguenza

$$\cos a' = \cos 90^\circ \cos a - \sin 90^\circ \sin a = -\sin a$$

$\cos b'$ o

$$\sin a' = \sin 90^\circ \cos a + \sin a \cos 90^\circ = \cos a.$$

Per mezzo di questi valori di $\cos b$, di $\cos a'$ e di $\cos b'$, le equazioni (6) e (7) divengono

$$\left. \begin{aligned} N \cos a &= X - F \sin a \\ N \sin a &= Y + F \cos a \end{aligned} \right\} \dots \dots (10).$$

10. Queste equazioni possono ancora subire un'altra modificazione se facciamo attenzione che l'attrito esercitato sopra il punto m è proporzionale alla forza normale N , che comprime questo punto contro il cilindro, cosa che abbiamo espressa per mezzo dell'equazione (1); per conseguenza, potremo a F sostituire Nf nell'equazioni (10), le quali ci daranno per i valori di X e di Y ,

$$\left. \begin{aligned} X &= N \cos a + Nf \sin a \\ Y &= N \sin a - Nf \cos a \end{aligned} \right\} \dots \dots (11);$$

Ma X ed Y essendo le componenti di una forza R , abbiamo fra queste forze la relazione

$$R^2 = X^2 + Y^2.$$

Mettendo, in questa equazione, i valori di X e di Y , che abbiamo trovati, otterremo

$$R^2 = N^2 (\sin^2 a + \cos^2 a) + N^2 f^2 (\sin^2 a + \cos^2 a),$$

equazione che, siccome la somma dei quadrati dei seni e dei coseni è eguale all'unità, si riduce a

$$R^2 = N^2 (1 + f^2) \dots \dots (12).$$

Sostituendo nell'equazione (9) il valore di R ricavato da quest'ultima, otterremo

$$r = \frac{fh}{\sqrt{1+f^2}} \dots \dots (13)$$

Questo valore di r è sempre minore di h , poichè il denominatore della frazione $\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ supera evidentemente il suo numeratore; ma h essendo il raggio

del cilindro, segue da ciò che l'equilibrio non è possibile, che quando la distanza r del punto C alla risultante è al di sotto di questo raggio. In questo caso,

si vede che la direzione di questa risultante taglia necessariamente il cilindro. Questa condizione, senza la quale l'equilibrio della leva, per l'attrito, è impraticabile, non è ancora sufficiente; poichè di più è necessario che r non abbia altro valore che quello che è determinato dall'equazione (13); diversamente l'equazione dei momenti, sopra della quale quest'ultima riposa, non avrebbe luogo.

11. Faremo di più osservare che questa equazione dei momenti esprime implicitamente la condizione che l'attrito deve fare equilibrio alla risultante di tutte le forze. Infatti, decomponiamo la forza R rappresentata da AB (Tav. XXXV, fig. 12) in due altre, l'una AC diretta al punto C , e l'altra nel senso della tangente AF . Egli è evidente che la prima verrebbe distrutta dal punto fisso C , e che non resterebbe che la componente AD , la quale dovrebbe per conseguenza fare equilibrio alla forza F , la quale agisce seguendo la medesima tangente, ciò che esigerebbe che AD fosse eguale alla forza F , e agisse in senso contrario. Ora questo è quello che ci dice la nostra equazione dei momenti; poichè conducendo le perpendicolari $CI=r$ ed $AL=h$, i triangoli rettangoli ABL , BCI , i quali hanno un angolo comune, sono simili, e danno la proporzione

$$AL : AB :: CI : BC$$

o

$$h : R :: r : AD;$$

dunque

$$Rr = AD \times h.$$

Sostituendo questo valore nell'equazione (8), e dividendo per h , si trova

$$AD = F.$$

12. Possiamo ancora determinare il rapporto che esiste fra la potenza e la resistenza. Per ciò, modificheremo nella seguente maniera i risultamenti che abbiamo ottenuti.

Siano P ed S (Tav. XXXV, fig. 13) la potenza e la resistenza le quali formano fra di loro un angolo c , la risultante di queste due forze sarà data per mezzo della trigonometria rettilinea, cioè

$$R^2 = P^2 + 2PS \cos c + S^2.$$

Per mezzo di questo valore di R , l'equazione (12) diviene

$$P^2 + 2PS \cos c + S^2 = N^2 (1 + f^2) \dots (14).$$

Introduciamo adesso in questa equazione il valore di N in funzione di P e di S . Per quest'effetto, abbassiamo dal centro C le perpendicolari p ed s sopra le direzioni delle forze P ed S , il momento Rr che entra nell'equazione (8), si cangerà in $Pp - Ss$, o in $Ss - Pp$, secondo quale di questi momenti supererà l'altro, e l'equazione (8) diverrà

$$\pm (Pp - Ss) = Nfh;$$

ricavando da questa equazione il valore di N^2 , il doppio segno sparisce, e si ottiene

$$N^2 = \frac{(Pp - Ss)^2}{f^2 h^2};$$

per conseguenza, sostituendo questo valore nell'equazione (14), abbiamo finalmente

$$P^2 + 2PS \cos c + S^2 = \frac{(Pp - Ss)^2}{h^2} \cdot \frac{(1 + f^2)}{f^2}.$$

Questo risultato lo renderemo più semplice facendo

$$P = Ss, \text{ e } \frac{1+f^2}{f^2} = k^2 \dots (15);$$

allora S^2 sparirà come fattor comune, e l'equazione si ridurrà a

$$s^2 + 2s \cos c + 1 = \frac{k^2}{h^2} (ps - s)^2.$$

Si ricava da ciò

$$s^2 h^2 + 2h^2 s \cos c + h^2 = k^2 (p^2 s^2 - 2ps s + s^2);$$

facendo passare tutti i termini nel secondo membro, si trova

$$(k^2 p^2 - h^2) s^2 - 2(ps k^2 + h^2 \cos c) s + k^2 s^2 - h^2 = 0;$$

e dividendo per il coefficiente di s^2 , si ottiene

$$s^2 - 2 \frac{(ps k^2 + h^2 \cos c)}{k^2 p^2 - h^2} s + \frac{k^2 s^2 - h^2}{k^2 p^2 - h^2} = 0.$$

Il valore di s determinato da questa equazione, è il rapporto della potenza alla resistenza; questo è quello che c'indica la prima dell'equazioni (15); e siccome s ha due valori, egli è evidente che il primo si riporta al caso ove la potenza è sul punto di superare la resistenza, caso in cui, dovendo vincere l'attrito, essa deve avere la maggiore intensità. Se si risolve l'equazione, troveremo

$$s = \frac{ps k^2 + h^2 \cos c \pm \sqrt{(ps k^2 + h^2 \cos c)^2 - (k^2 p^2 - h^2)(k^2 s^2 - h^2)}}{k^2 p^2 - h^2};$$

sviluppando e riducendo la quantità che è sotto il radicale, facendo passare h^2 che diviene fattore comune, al di fuori del segno radicale, e riunendo i termini che, sotto questo radicale, sono moltiplicati da k^2 , otterremo

$$s = \frac{ps k^2 + h^2 \cos c \pm h \sqrt{k^2 (p^2 + 2ps \cos c + s^2) - h^2 (1 - \cos^2 c)}}{k^2 p^2 - h^2}$$

osservando che $1 - \cos^2 c = \sin^2 c$, e mettendo il valore di s , avremo finalmente

$$\frac{P}{S} = \frac{ps k^2 + h^2 \cos c \pm h \sqrt{k^2 (p^2 + 2ps \cos c + s^2) - h^2 \sin^2 c}}{k^2 p^2 - h^2}.$$

Se il raggio del cilindro è piccolissimo, possiamo trascurare il suo quadrato h^2 , e la nostra equazione si riduce a

$$\frac{P}{S} = \frac{s}{p} \pm h \frac{\sqrt{(p^2 + 2ps \cos c + s^2)}}{kp^2}.$$

Se le perpendicolari p ed s abbassata dal centro C sopra le direzioni della potenza e della resistenza, sono eguali, si caderà nel caso della puleggia; e se si trascura sempre h^2 , si troverà

$$\frac{P}{S} = 1 \pm \frac{h \sqrt{2(1 + \cos c)}}{kp} \dots (16).$$

13. Finalmente, se la potenza P e la resistenza S hanno delle direzioni parallele abbiamo $c \equiv 0$, donde si deduce

$$\operatorname{sen} c \equiv 0, \text{ e } \operatorname{cosec} c \equiv 1;$$

quest'ultimo valore cangia l'equazione (16) in

$$\frac{1P}{S} = 1 \pm \frac{2h}{kP}.$$

Chinunque desideri maggiori dettagli sopra l'attrito potrà consultare la sopra citata opera del Morin; *Nouvelles Experiences sur le frottement faites à Metz* en 1831, 1832 et 1833, par ordre de M. le Ministre de la Guerre, 3 vol. in-4, avec 22 grandes planches; *Le Traité de Mécanique*, par D.-S. Poissons, deuxième édition, 2 vol. in-8 avec 7 planches, 1833, e in questo Dizionario le parole FORZA, RIGIDEZZA DELLE FUNI ec. ec.

ATWOOD (GIACOMO), fisico e matematico inglese, nato verso il 1745, studiò nella scuola di Westminster, e nel collegio della Trinità a Cambridge, dove divenne professore di fisica. Le sue opere, scritte in inglese, sono: I. *Trattato sul moto rettilineo e sulla rotazione dei corpi, con una descrizione di esperienze relative a tal soggetto*, Cambridge, 1784, in-8. Per le sperienze esposte in quest'opera, usata venne una macchina ingegnosissima, da Atwood inventata, e che porta il suo nome. Essa si trova in tutti i gabinetti di fisica, e serve a dimostrare coll'esperienza la legge della caduta dei corpi. II. *Analisi di lezioni sui principj della fisica fatte nell'università di Cambridge*. Cambridge, 1784, in-8; III. *Trattato della costruzione e delle proprietà degli archi*, Londra, 1801-04, 2 parti in-4. Si hanno di lui ancora varie memorie e varj opuscoli sopra alcune proposizioni di geometria e sulla durata delle vibrazioni negli orologi a pendolo: questi scritti sono inseriti nelle *Trasazioni filosofiche*, e si trovano esaminati nella *Biblioteca britannica* di Ginevra, tom. II delle scienze ed arti. Atwood morì nel 1807.

AUDIERNE (GIACOMO), geometra, nato verso il 1710 a Beauchamps, nella vallata di Montmorency. Dopo aver coltivato per qualche tempo, ma con poco successo, le lettere, si diede all'insegnamento delle matematiche, e morì a Parigi nel 1785. Oltre una nuova edizione della *Géographie* di Robert, Parigi, 1746, 2 vol. in-12, accresciuta di un trattato sulla sfera, si ha di Audierne: I. *Les élémens d'Euclide démontrés d'une manière nouvelle et facile*, Parigi, 1746, in-12; II. *Traité complet de trigonométrie*, Parigi, 1756, in-8; III. *Éléments de géométrie*, Parigi, 1765, in-8. Finalmente gli si debbono delle edizioni molto stimate delle seguenti tre opere: 1.^a *Les élémens de géométrie d'Euclide*, tradotti dal P. Dechaies e da Ozanam, Parigi 1778, in-12; 2.^a *Traité de l'arpentage* d'Ozanam, Parigi, 1779, in-12; 3.^a *Méthode de lever les plans* d'Ozanam, Parigi, 1781 in-12. Queste ultime due edizioni si possono considerare come opere affatto nuove per le grandi aggiunte e variazioni fattevi dall'editore.

AUMENTO del diametro (*Astron.*). Fenomeno prodotto dagli effetti della parallasse sul diametro degli astri. Vedi PARALLASSE.

AURIGA (*Astron.*). Vedi COCCINELLE.

AURORA (*Astron. fisic.*). Chiamasi così il crepuscolo del mattino, che è quella debbole luce che comincia a colorire l'atmosfera quando il sole è al 18° grado al di sotto dell'orizzonte, e che va crescendo fino al levare di quest'astro. Vedi CREPUSCOLO.

Nicod fa derivare questa parola da *aurascere*, *indorare*, perchè il sole nascondendo indora per così dire l'atmosfera.

AUSTRALE (*Astron.*). Da *auster*, *austro*, vento di mezzogiorno. Questa parola è sinonima di *meridionale*; così si dice indifferentemente, *polo australe* o *polo meridionale*, *emisfero australe* o *emisfero meridionale*. Vedi **AMILLARE**.

I *segni australi* sono gli ultimi sei segni dello zodiaco, cioè la Libbra, lo Scorpione, il Sagittario, il Capricorno, l'Aquario, e i Pesci; e si dicono così, perchè sono al mezzodì della linea equinoziale. Vedi **SAGGIO**.

AUTOLICO, di Pitane, città dell'Eolia in Asia, matematico ed astronomo celebre, viveva verso l'anno 330 avanti Gesù Cristo. È il più antico degli scrittori greci sulla sfera che ci rimangono. Abbiamo di lui due opere sulla sfera e sul moto degli astri intitolate: *De sphaera quae moveatur*, e *De vario ortu et occasu astrorum inerrantium*, le quali hanno avuto molta importanza nel tempo in cui furono composte. Autolico vi dimostra rigorosamente, per mezzo delle teorie della geometria sferica, i diversi fenomeni del levare e del tramonto delle stelle fisse. Questi scritti, che i progressi della scienza hanno spogliato di molto interesse, sono stati più volte tradotti, prima che le scoperte moderne avessero cambiato interamente i principj dell'astronomia; ma adesso meritano menzione soltanto perchè servono a mostrare lo stato della scienza presso i Greci del suo tempo. Il lettore ne troverà un minuto ragguaglio in Delambre, *Histoire de l'astronomie ancienne*, Parigi, 1817, 2 vol. in-4, Vol. 1, pag. 19. e segg. La sola edizione greca di questo autore è quella data da Corrado Rauchfuss (Dasyposius) a Strasburgo, nel 1572 in-8, colla traduzione latina a fronte: questa edizione contiene ancora gli scritti di Teodosio e di Barlaam. Le opere di Autolico però erano già state pubblicate, poichè fino dal 1568 n'era comparsa in Roma una versione latina anonima. Giuseppe Auria, napoletano, si accinse ad una nuova traduzione latina, e pubblicò il primo degli anzidetti trattati a Roma nel 1587 in-4, ed il secondo parimente a Roma nel 1588 in-4: sì l'una che l'altra opera furono arricchite dal traduttore della versione latina di varie cbose greche trovate nei manoscritti, come pure di un commento del Maurolico; ed ambedue furono ristampate insieme a Roma nel 1591. Vi è ancora una traduzione francese di Autolico e di Teodosio fatta dal P. Forcadel, e pubblicata a Parigi nel 1572 in-4. La traduzione latina del solo libro *De sphaera* ec. si trova pure nella raccolta del padre Merseuue intitolata: *Universae geometriae, mistaeque mathematicae synopsis*, Parigi, 1644, in-4. Nella Biblioteca Vaticana si trovano cinque manoscritti di Autolico.

AUTOMA. Da *αὐτός*, *sè stesso*, e da *μῆμα*, *io voglio*. Con questo nome s'indica generalmente qualunque macchina che si muove da sè stessa o che porta in sè il principio del suo moto, e che è costruita in modo da imitare i movimenti degli uomini o degli animali. Senza entrare a descrivere le particolarità di tali meccanismi, daremo qualche idea della perfezione alla quale sono state portate queste macchine ingegnose.

Non parleremo della colomba d'Archita, dell'orologio di Carlomagno, dell'automa di Alberto Magno che apriva la porta della sua camera quando alcuno picchiava, della testa parlante di Ruggero Bacone, dell'aquila e della mosca di Regiomontano, e di altre macchine, essendo troppo sospette di esagerazione: esse però servono a mostrare che l'idea di applicare le macchine ad imitare le funzioni vitali è di antica data, e che non sembrava cosa impossibile l'ottenerne considerabili successi.

Nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1729, si trova la descrizione di una compagna di attori che rappresentavano un pantomima in cinque atti. Prima di questo, Camus aveva descritto un gruppo di automi che era stato costruito pel divertimento di Luigi XIV, e che era composto di una carrozza, cavalli, cocchiere, servi ec. Il cocchiere agitava la sua frusta, e i

cavalli partivano immediatamente, movendo le loro gambe alla maniera dei veri cavalli. Il cocchio girava sull'estremità della tavola sulla quale era posto, e quando era giunto avanti al re si fermava; scendeva un paggio ad aprire lo sportello, dal quale smontava una signora che presentava al re una supplica facendo una riverenza e quindi rimontava in carrozza. Il paggio allora chiudeva lo sportello, la carrozza partiva, ed egli seguitandola correndo saliva dietro di essa. Ciò non è assolutamente inconcepibile, ma è difficile a credersi. Si veda Hutton, *Mathematical Recreations*, Vol. II, pag. 95.

Nel 1808 il sig. Maelzel fece vedere a Parigi un automa che rappresentava un trombettiere del reggimento de' corazzieri austriaci dell'arciduca Alberto di Sassonia Teschen che teneva la sua tromba alla bocca. Il sig. Maelzel premeva un poco la spalla sinistra della figura, e questa sonava non solamente la marcia della cavalleria austriaca e tutti i comandi di quella truppa, ma ancora una marcia ed un allegro di Weigl coll'accompagnamento di una piena orchestra. Dopo di ciò, si cambiava interamente il vestito dell'automata in quello di un trombettiere francese della guardia; ed allora la figura cominciava subito a sonare la marcia della cavalleria francese, tutti i suoi comandi, e finalmente una marcia di Dussek ed un allegro di Pleyel coll'accompagnamento dell'orchestra. Il suono della tromba era puro e più gradevole di quello che potessero trarre da quello strumento i più abili sonatori, poichè il fiato dell'uomo produce nell'interno della tromba un'umidità che nuoce alla purezza del suono.

Molti altri automi si trovano descritti all'articolo *Automaton* del *Mathematical Dictionary* di Hutton: quelli tanti celebri di Vaucanson sono stati già rammentati all'articolo *ANATOMIA* di questo Dizionario. Si veda ancora ciò che abbiamo detto sugli automi nel principio dell'articolo *ANATOMIA*.

Recentemente si sono fatti vedere in Italia automi che suonano, che scrivono, che disegnano, e tra questi due mirabilissimi fabbricati dai sigg. Droz, svizzeri, che per lungo tempo furono in Parigi l'oggetto dell'ammirazione dei più abili meccanici.

Il celebre giocatore di scacchi di Kempelen, che menò tanto rumore in Europa, è oggimai un mistero svelato. Tutte le molle, i cilindri, le ruote dentate, tutti gli ordigni che si facevano vedere agli spettatori, ed a cui si attribuivano i movimenti della macchina, non erano che imposture, semplici ritagli applicati ad un telaio; il vero motore era un giovane che si chiudeva nell'interno della macchina. Non deve dunque dirsi, come era generale opinione, che la macchina fosse invincibile: essa, o chi la guidava, non vinceva che i competitori inferiori: è bensì vero che il proprietario sceglieva sempre un abilissimo giocatore per regolarla.

Il segreto fu per lungo tempo impenetrabile; dalla sua prima comparsa nel 1770 a Presburgo, l'automata giocatore di scacchi visitò le capitali della Germania, dell'Inghilterra e della Francia; dovunque fu accolto con somma curiosità, e spesso eccitò vivi trasporti di sorpresa e di ammirazione. Giunto a Parigi nel 1783, la sua stella impallidì avanti i celebri giuocatori del Caffè della Reggenza: ma senza vergogna poteva ebbiunque confessarsi vinto dai Philidor e dal Legal, ed avere ancora una brillante carriera da percorrere. Di ritorno a Berlino, l'automata gettò il guanto a tutti i signori della corte del gran Federico, e fu ancora ammesso all'onore di misurarsi con questo principe, grande amatore di scacchi. In un momento di entusiasmo, Federico fece a caro prezzo l'acquisto della macchina e del suo segreto: una breve istruzione servì a svelargli tutti i misteri di quella innocente magia. Dissipato il prestigio, l'automata smontato, disprezzato, fu gettato in una guardaroba, dove per trent'anni restò sepolto nella polvere e dimenticato. La presenza di Napoleone a Berlino richiamò a nuova vita l'automata, che

diventò proprietà di Maelzel cominciò una nuova luminosa carriera. Preceduto da una reputazione colossale, giunse alla corte di Baviera, dove fu tale la viva impressione che fece nel principe Eugenio, che questi volle divenirne possessore, ed essere iniziato nel suo segreto per la somma di 30,000 franchi: ma tolto il velo del mistero, restituita in dono la macchina a Maelzel, che la condusse in Francia e in Inghilterra ad ottenere nuovi e brillanti successi. La direzione interna dell'automa fu affidata a giocatori espertissimi: Boncourt a Parigi, e Lewis a Londra lo fecero trionfare senza difficoltà di tutti gli avversarii che si presentarono per combatterlo. Ultimamente, facendo il giro dell'America, l'automa, sempre di proprietà di Maelzel, era diretto da Mouret. *Vedi ANDROIDA.*

AUTUNNO (*Astron.*). Terza stagione dell'anno, la quale comincia il 23 Settembre, quando il sole entra nel segno della Libbra, e finisce il 22 Dicembre, quando il sole entra nel segno del Capricorno. La sua durata è di 89 giorni, 16 ore e mezzo. Dal primo giorno d'autunno, che è quello dell'*equinozio*, i giorni vanno decrescendo, e sono sempre più corti delle notti nel nostro emisfero settentrionale.

AUXIRON (GIOVAN BATISTA D'), medico nato a Beaume-les-Dames, verso il 1680, e morto a Besanzone nel 1760, trascurò la sua professione per le scienze matematiche. Esistono d'Auxiron gli scritti seguenti: I. *Démonstration d'un secret utile à la marine*, Parigi, 1750, in-8; II. *Nouvelle manière de diriger la bombe*, Parigi, 1754, in-8.

AUZOUT (AUSIANO), matematico e ottico, nato a Rouen nel XVII secolo, si è reso celebre per la perfezione che giunse a dare ad alcuni strumenti di una grande utilità. Si assicura che aveva costruito un obbiettivo di secento piedi di fuoco; ma la difficoltà di trovare un apparato conveniente per lo stabilimento di una tal macchina non gli permise mai di provarne l'uso e di assicurarsi della sua portata. Auxout ha reso un servizio assai più grande alla scienza mediante i miglioramenti che fece al micrometro, miglioramenti che hanno talmente modificato questo strumento, che moltissimi autori gliene attribuiscono l'invenzione. Ma, prima d'Auzout, il celebre Huygens aveva pensato a misurare lo spazio occupato dagli astri nel campo dei cannocchiali. Si conosce la descrizione che egli ha fatta del micrometro nella fine del suo *Systema Saturnium*, Aja, 1659 in-4, e si sa che questo ingegnoso e dotto osservatore, per trovare il diametro apparente di un corpo celeste, si serviva di varie lamine di metallo mobili, che introduceva nel telescopio per una fessura laterale. Il marchese Malvasia, nobile bolognese, che si occupava con molto zelo di questa parte della scienza, aveva sostituito a questo meccanismo una rete che egli poneva nel fuoco del cannocchiale: questa rete era formata di più fili che s'incrociavano ad angoli retti, e formavano più quadrati eguali, ad ognuno dei quali doveva corrispondere un certo intervallo nel cielo. Questo strumento era forse preferibile a quello di Huygens per le osservazioni; d'altronde col suo mezzo si evitava l'effetto della diffrazione della luce, che aveva luogo sull'orlo delle lamine nell'apparecchio di Huygens. Ma da un altro canto i fili essendo fissi nello strumento di Malvasia, esso perdeva uno de' suoi principali vantaggi. È questa l'invenzione che Auzout perfezionò e rese più atta alla osservazioni le più delicate. Egli non conservò che i fili paralleli con uno trasversale che gli tagliava ad angolo retto; e all'oggetto di contenere sempre l'oggetto da misurarsi tra i fili paralleli, immaginò di farne portare uno da un'intelaiatura che scorresse nelle scanalature di quella alla quale erano fissati gli altri fili. Auzout ha pubblicato la descrizione del suo micrometro nel 1667, e i lettori che volessero averne cognizione la troveranno ancora nel tomo VII delle antiche *Memorie* dell'Accademia di Parigi per l'anno 1693. È di questo strumento che si servono ancor presentemente gli astronomi, colle aggiunte e

coi miglioramenti che vi fece in seguito Bradley. Si potrà pure su questo soggetto consultare l'introduzione delle *Tabulae astronomicae* di La Hire, Parigi, 1687 e 1702, in-4; il *Traité de la construction et des principaux usages des instrumens de mathématiques* di Bion, Parigi, 1759, in-4; i *Suppléments* che alla traduzione tedesca di questo trattato ha fatto Doppelmayr; e il discorso preliminare dell'*Histoire de l'astronomie moderne* di Delambre. L'onore di questa invenzione è stato reclamato dagli Inglesi a favore di Gascoyne, e Tonnwley pubblicò su questo soggetto una dissertazione nelle *Transazioni filosofiche*. Ma se, come Tonnwley afferma, Gascoyne era in possesso del micrometro a fili mobili, è certo che egli non avea ciò pubblicato, e per conseguenza l'onore dell'invenzione deve essere attribuito ad Auzout, per cui poterono la prima volta usarne gli studii. Auzout divise con Picard l'onore di avere applicato il telescopio al quadrante murale, sebbene quest'ultimo non abbia fatto menzione di questa collaborazione nella sua opera sulla *Figura della terra* (Vedi Montucla, *Storia delle matematiche*, Tom. II, pag. 569): una tale idea è da riguardarsi come una delle più felici per l'avanzamento dell'astronomia osservatrice; poichè tale invenzione, quella del micrometro, e l'applicazione del pendolo agli orologi, dovuta ad Huygens, sono le tre cause principali degli immensi progressi fatti dall'arte dell'osservazione.

Oltre il suo *Traité du micromètre*, Parigi, 1667, in-4, Auzout ha pubblicato varie osservazioni e calcoli sulla cometa del 1664, e si dice che la presentazione dei suoi risultati a Luigi XIV fece nascere in questo principe la prima idea di fondare un osservatorio a Parigi. Egli compilò ancora un laborioso confronto dei pesi e misure della Francia con quelli degli altri paesi, che si trova nella collezione delle antiche *Memorie* dell'Accademia delle Scienze di Parigi superiormente citata. Abbiamo di lui ancora alcuni altri opuscoli, dei quali Lalande riferisce i titoli nella sua *Bibliographie astronomique*, Parigi, 1803, in-4. Egli pubblicò inoltre nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze parecchie lettere sopra i telescopj e sopra diversi altri oggetti di osservazione.

Auzout, che figura nel numero dei primi membri che composero l'Accademia delle Scienze di Parigi, all'epoca della sua fondazione, morì a Parigi nel 1691, secondo Delambre e altri; e nel 1693, a Roma, secondo Montucla che cita i registri dell'Accademia.

- ** AVANZINI (Giovanna), matematico, nacque a Gaiola piccola terra vicina a Salò negli Stati di Venezia il 13 Dicembre 1753. Manifestato avendo di buon'ora la sua inclinazione allo stato ecclesiastico, ricevè i primi rudimenti dal parroco del suo luogo, quindi passò a studiare nel collegio di Salò, e di là a Brescia, per apprendervi la filosofia e le scienze sacre e conseguire gli ordini del sacerdozio, il che ottenne in età di ventitré anni. In quel tempo occupava la cattedra di matematiche in Brescia Domenico Coccoli, matematico valentissimo, e l'Avanzini seppe ben profittare di questa favorevole circostanza per intraprendere e compire sotto di esso un corso completo di matematiche pure ed applicate. I suoi rapidi progressi in questa scienza valsero a procurarli un protettore ed un amico nel conte Carlo Bettoni, che lo indusse a venire ad abitare in sua casa. Ivi ajutò il suo mecenate nelle varie opere che quegli andava componendo, e specialmente nella parte relativa all'algebra; ivi pure si occupò di una carta topografica e geologica del lago di Garda, compresi i monti che lo circondano fino alla distanza di 20 a 30 miglia e i due laghi d'Idro e valle di Ledro, ed attendeva a condurre a termine questo lavoro, quando il Bettoni, che avea sostenuto per quest'oggetto rilevanti spese, venne a morte nel 1786; per lo che l'Avanzini, lasciata la casa Bettoni in Riviera, passò ad insegnare le matematiche e la fisica in varii collegj, e nell'università di Padova, e finalmente successe a Cossali nella cattedra di mate-

matiche trascendenti nella stessa universalità, postò che occupò fino alla sua morte, avvenuta il 18 Giugno 1827. L'Avanzini fu socio dell'Accademia di Brescia, dell'Istituto Nazionale Italiano e della Società Italiana dei Quaranta, ed arricchì gli Atti di queste società di dotte memorie, nelle quali intese a rettificare la teoria della resistenza che i solidi incontrano movendosi ne' fluidi, dimostrando con nuove esperienze e nuovi calcoli l'insussistenza delle teorie di Newton, di Romme, e di Juan. La prima memoria nella quale espose le sue ricerche su quest'argomento è inserita nel primo volume degli Atti dell'Istituto Italiano, ed è intitolata: *Nuove ricerche dirette a rettificare la teoria della resistenza dei fluidi e le sue applicazioni*. Nel 1809 lesse all'Accademia di Padova una memoria sulla teoria dell'ariete idraulico, nella quale correggeva gli errori nei quali caduto era il Brunacci nel suo *Trattato dell'ariete idraulico*; il che gli attirò un ingiusto risentimento per parte di quest'ultimo. Si hanno dell'Avanzini ancora i due seguenti scritti: I. *Riflessioni sulla direzione dei fiumi*, Brescia, 1782, in-8; II. *Opuscoli intorno alla teoria dell'ariete idraulico*. Si trovano più estese notizie su questo dotto nell'elogio che ne ha scritto Alberto Gabba nel tomo IV della *Biografia degli italiani illustri*, che si pubblica a Venezia dal professore de Tipaldo.

AVELLAN o AVELLAR (*Astron.*). Con questo nome trovasi talvolta chiamata la stella più comunemente detta *Polluce*.

AVENTINO (GIOVANNI TOURNAÏEN, più noto sotto il nome d'), nacque in Abensperg verso il 1466. Dopo avere studiato a Ingolstadt e a Parigi, diede lezioni di eloquenza, lingua greca, e matematiche, a Vienna e quindi a Cracovia. Nel 1512 fu chiamato a Monaco a presedere all'educazione dei principi figli del Duca di Baviera, e vi morì il 9 Gennaio 1534. Ha scritto molte opere storiche che godono di somma reputazione; noi non citeremo che il solo scritto che possa interessare questo Dizionario, ed è il seguente: *Numerandi per digitos manusque, quin etiam loquendi, veterum consuetudinis abacus*, Norimberga, 1523, in-4: quest'opera è stata ristampata nel 1710 a Lipsia, in continuazione degli *Annali di Baviera dello stesso autore*. Ad Aventino venne in mente l'idea di quest'opera per aver trovato a Ratisbona alcune tavole che rappresentavano l'antica maniera dei Romani di contare sulle dita.

AVERROE; ABOUL-WALID-MOHAMMED-ÉBN-AHNEB-ÉBN MOHAMMED-ÉBN-RACHED, celebre dotto arabo, nato a Cordova l'anno 1149, è autore di un gran numero di scritti, alcuni dei quali sono relativi alle scienze matematiche. Averroe ha professato nella sua città nativa la filosofia e la medicina, scienze che al suo tempo sembravano inseparabili, e che, secondo i pregiudizj del volgo, supponevano cognizioni quasi soprannaturali in quelli che le praticavano. L'epoca di Averroe è quella della decadenza del dominio politico degli Arah in Spagna, epoca in cui quella gran nazione vide pure perdersi nel suo seno il gusto delle scienze che essa avea recato in Europa. A giudicarne dal numero prodigioso delle sue opere, Averroe, che esercitava inoltre a Cordova le funzioni d'imano e di cadi, ha dovuto condurre una vita tutta dedita alla meditazione e al lavoro. È autore di una versione di Aristotile in arabo; ma questa versione non è la prima che esistesse in quella lingua, come hanno preteso varj de'suoi biografi; poichè un tal lavoro era stato già fatto a Bagdad sotto il brillante califfato di ÉL-Mâmoun. Noi possediamo parecchi manoscritti di Averroe, che contengono trattati di fisica e di matematiche pure, di astronomia e di astrologia; poichè, malgrado il loro sapere enciclopedico, gli uomini celebri di quegli antichi tempi non erano al di sopra di tutti gli errori popolari. La scienza era allora circondata da una specie di rispetto superstizioso, al quale Averroe, al pari di molti altri, deve la maggior parte della sua fama. L'elenco delle sue opere si trova in Casiri, *Biblio-*

theca arabico-hispana escurialensis, Madrid, 1760-70, 2 vol. in-fol.; e la maggior parte di esse è stata tradotta in ebraico; se ne trovano alcune nella biblioteca del celebre Rossi, come può vedersi nel suo *Apparatus hebraeo-biblicus*, Parma, 1792 in-8; nel suo *Specimen ineditae biblorum versionis*, Parma, 1778 in-4; e nel suo *Dizionario storico degli autori arabi più celebri e delle loro principali opere*, Parma, 1807, 2 vol. in-8. La biblioteca reale di Parigi possiede fino a ventisette commenti di questo dotto sopra Aristotile, e diversi opuscoli matematici. *Bibliothèque royale*, mss. n° 438 e segg.

Averroes è morto l'anno 595 dell'egira (1198 dell'era cristiana), secondo Cauri, e l'anno 603 dell'egira (1206 dell'era volgare), secondo Leone africano citato da Hottinger. Il lettore desideroso di conoscere maggiori particolarità sulla vita e sugli scritti di questo dotto potrà consultare, oltre le opere di sopra citate, le seguenti: Hottinger, *Bibliothecarius quadripartitus*, Zurigo, 1664, in-4; Niccola Antonio, *Bibliotheca hispana vetus*, Roma, 1696, 2 vol. in-fol.; Sprengel, *Saggio di una storia prammatica della medicina* (in tedesco), Halle, 1800-1803, 5 vol. in-8; e la *Biographie universelle*, Parigi, 1810, e segg. in-8.

AVICENNA; *ABOU-ALY ROUSSEYN-IBN ABU-ALHAN ISH-SYNÀ*, uno dei più celebri e dotti arabi, nacque ad Assenab, villaggio vicino a Bokharà, l'anno 370 dell'egira (980 dell'era cristiana), secondo quello che ci dice egli stesso in uno dei suoi scritti. Per lungo tempo quest'uomo, straordinario pel suo sapere e per l'attività prodigiosa del suo spirito, non è stato conosciuto dai dotti di Europa che come l'Ippocrate dell'Oriente. Ma Avicenna non fu solamente un gran medico; le scienze matematiche gli debbono molti lavori ragguardevoli, che ci danno almeno una giusta idea del punto di vista, nel quale queste alte cognizioni erano considerate presso gli Arabi, e del grado di perfezione al quale erano giunte presso quella nazione. La vita di Avicenna, piena di lavori che stupefanno pel loro numero e per la loro importanza, travagliata da catastrofi e da strane avventure, somiglia molto a quella di un eroe fantastico di quelle storie maravigliose che portano l'impronta del genio nazionale degli Arabi.

Il grande Èbn Synà, che con tal nome s'indica ancora in tutto l'Oriente Avicenna, fece conoscere di buon'ora la potente intelligenza di cui era dotato. All'età di diciotto anni aveva terminato tutti gli studj nelle diverse scienze, che più tardi dovevano formare l'oggetto di lavori ammirati nella sua patria, e i suoi titoli a una gloria immortale. All'età di ventuu anno aveva composto un' *Enciclopedia*, alla quale aggiunse in seguito un commento che non forma meno di venti volumi. Avicenna era appassionato pei viaggi: percorse diverse contrade dell'Oriente, e preceduto dalla sua fama, fu a vicenda l'oggetto del favore dei principi e di sventure erudeli. Primo medico e visir di Magd-éd-Donlah, sultano della dinastia dei Buidi, due volte fu deposto e gettato in ferri. Si attribuiscono questi diversi cangiamenti di fortuna, ai quali fu soggetto, a circostanze che poco onorano il suo carattere, e che giustificano l'epitaffio che un poeta pose sul suo sepolcro. Era inclinatissimo agli eccessi del vino e delle dissolutezze, e pare che tradisse il suo benefattore dando ascolto alle proposizioni di Ala-éd-Donlah, principe d'Ispahan, nemico del sultano che l'aveva accolto e ricolmo d'onori. Dopo quattro anni di una dura cattività, giunse ad ingannare la sorveglianza dei suoi custodi, e cercò un asilo presso quello stesso Ala-éd-Donlah, che lo prese al suo servizio. In mezzo alle sue gite pericolose, e malgrado i dispiaceri inseparabili da una vita agitata, Avicenna non trascurò i suoi lavori scientifici. Il suo trasporto per lo studio e la sua attività erano tali, che egli stesso attesta di non aver giammai lasciata passare una sola giornata senza scrivere una cinquantina di pagine.

La lista dei manoscritti che ha lasciati, e che si posseggono in diverse biblio-

tecche d'Europa, forma una nomenclatura assai estesa. Noi possediamo di lui una *Dissertazione sulla divisione sistematica delle scienze*, una *Raccolta di osservazioni astronomiche*, un *Trattato completo delle scienze matematiche*, e una *Collezione di opuscoli matematici e filosofici*. Altrove abbiamo dato la traduzione di uno di questi scritti. Vedi ARITMETICA.

La fatica de' lunghi suoi viaggi, e gli eccessi di qualunque specie ai quali si abbandonò, abbreviarono la vita di Avicenna. Quest'uomo celebre era appena giunto all'età di 56 anni, quando morì ad Hamadān, l'anno 428 dell'egira (1036 dell'era nostra). Ecco l'epitaffio di cui abbiamo superiormente parlato, e che forse manca alla tomba di più di un grand'uomo: « Il gran filosofo, il gran medico Êbn-Synā è morto. I suoi libri di filosofia non gli hanno insegnato « l'arte di ben vivere, nè i suoi libri di medicina l'arte di viver lungamente. »

Per più estese notizie rimanderemo il lettore alle appresso opere: Cusiri, *Bibliotheca arabico-hispana escurialensis*, Madrid, 1760-70, 2 vol. in-fol.; Abul-Faragio, *Historia compendiosa dynastiarum*, Oxford, 1663, 2 vol. in-4, ediz. di Pocock; Hottinger, *Bibliothecarius quadripartitus*, Zurigo, 1664, in-4; Sprengel, *Saggio d'una storia prammatica della medicina* (in tedesco), Halle, 1800-03, 5 vol. in-8; e la *Biographie universelle*, Parigi, 1810 e segg. in-8.

AVOGADRO (Giusseppe), nato a Vercelli nel 1731, e morto nello stesso luogo il 13 Dicembre 1813, è autore di varii scritti sull'agricoltura molto stimati. Ha pubblicato ancora a Vercelli nel 1810 un opuscolo intitolato: *Metodo facile e pratico per la costruzione d'una volta di qualsiasi dimensione ed altezza*, in-8.

AVVOLTOJO (Astron.). Chiamasi talvolta con questo nome la costellazione dell'Aquila. Vedi AQUILA.

AYUK (Astron.). Vedi AJUK.

AZELFAGE (Astron.). Nome della stella che è alla coda del Cigno, e che nei cataloghi è segnata colla lettera π .

AZIMECH (Astron.). Nome arabo della bella stella detta *Spica della Vergine*. Bayer dà a torto questo nome alla stella Arturo.

AZIMUT (Astron.). Arco dell'orizzonte compreso tra il verticale di un astro e il meridiano del luogo dell'osservazione. Quest'arco si prende sempre dalla parte del polo elevato, così per un osservatore di Europa l'azimut sarà l'arco dell'orizzonte compreso tra il punto nord e il punto in cui il verticale di un astro taglia l'orizzonte.

Siano RZPH (Tov. XXXVI, fig. 5) il meridiano, RO'OEH l'orizzonte, Z lo zenit, P il polo, e A la posizione di un astro sul suo verticale ZAO, l'arco OH sarà l'azimut. Quest'arco può trovarsi immediatamente coll'osservazione nel modo seguente: si tiri nel piano dell'orizzonte una meridiana, e si prendano due fili tenuti verticali per mezzo di piccoli pesi, ponendogli a qualche distanza l'uno dall'altro e in modo che coprano l'astro del quale vuol trovarsi l'azimut: ciò fatto, si segni sul piano orizzontale della meridiana la linea che unisce i piedi dei due fili verticali, e l'angolo che questa linea farà colla meridiana sarà l'azimut cercato. L'azimut può trovarsi ancora col quadrante azimutale, col teodolito, o in altri modi, come può vedersi nelle *Institutions astronomiques* di Lemoonnier, Parigi, 1746, in-4, e nella traduzione francese del *Trattato d'ottica* di Smith, fatta dal P. Pezenas e stampata ad Avignone nel 1767, in-4; ma è più comodo e più esatto il trovarla per mezzo del calcolo. A tale oggetto si considera il triangolo sferico ZPA, nel quale ZP è il complemento della latitudine o dell'altezza del polo al di sopra dell'orizzonte, AZ il complemento dell'altezza dell'astro al di sopra dell'orizzonte, e AP il complemento della declinazione dell'astro nel momento dell'osservazione. Se, essendo EE l'equatore celeste, l'astro fosse situato in A', nell'emisfero opposto a quello il cui polo

è al di sopra dell'orizzonte, l'arco $A'Z$ non sarebbe più il complemento della declinazione, ma bensì questa declinazione accresciuta di 90° .

Nel triangolo ZPA o ZPA' , quando si conoscono i tre lati, è facile calcolare l'angolo $A'ZP$ o $A'ZP'$, la cui misura OH o $O'H$ è l'azimut cercato, per mezzo della formula

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} C = \sqrt{\left[\frac{\operatorname{sen}(S-A) \cdot \operatorname{sen}(S-B)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B} \right]}.$$

essendo A e B i due lati che comprendono l'angolo C , ed S la semisomma dei tre lati del triangolo.

ESEMPIO

L'altezza osservata dell'orlo inferiore del sole essendo di 27° , e la latitudine settentrionale del luogo dell'osservazione di $39^\circ 45'$, si domanda l'azimut di quest'orlo, sapendo d'altronde che la declinazione del sole è australe e di $9^\circ 50'$, e che l'elevazione dell'occhio al di sopra del livello del mare è di 12 piedi.

Correggendo l'altezza osservata dagli effetti della refrazione, della parallasse, e della depressione dell'orizzonte cagionata dall'altezza dell'occhio (*Vedi ABBASSAMENTO DELL'ORIZZONTE*), si ha primieramente

Altezza osservata	$27^\circ \quad 0' \quad 0''$
Depressione per 12 piedi	$0 \quad 3 \quad 30$
	$26^\circ \quad 56' \quad 30''$
Refrazione e parallasse	$0 \quad 1 \quad 45$
Altezza vera	$= 26^\circ \quad 54' \quad 45''$

Così $O'A' = 26^\circ 54' 45''$, e per conseguenza $A'Z = 63^\circ 5' 15''$; inoltre si ha $A'P = 9^\circ 50' + 90^\circ = 99^\circ 50'$, e $ZP = 90^\circ - 39^\circ 45' = 50^\circ 15'$. Con questi dati si troverà

ZP	$50^\circ \quad 15' \quad 0''$
$A'P$	$99 \quad 50 \quad 0$
$A'Z$	$63 \quad 5 \quad 15''$
	$213^\circ \quad 10' \quad 15''$
Semisomma $=$	$106^\circ \quad 35' \quad 7'',5 = S$
S	$106^\circ \quad 35' \quad 7'',5$
ZP	$50 \quad 15$
$S - ZP =$	$56^\circ \quad 20' \quad 7'',5$
S	$106^\circ \quad 35' \quad 7'',5$
$A'Z$	$63 \quad 5 \quad 15$
$S - A'Z =$	$43^\circ \quad 29' \quad 52'',5$

Sostituendo questi ultimi valori nella formula di sopra riportata, si avrà

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} A'ZP = \sqrt{\left[\frac{\operatorname{sen}(56^\circ 20' 7'',5) \operatorname{sen}(43^\circ 29' 52'',5)}{\operatorname{sen}(50^\circ 15') \operatorname{sen}(63^\circ 5' 15'')} \right]}.$$

Operando coi logaritmi come segue,

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} (56^{\circ} 20' 7'',5) &= 9,9202783 \\ \log \operatorname{sen} (43^{\circ} 29' 52'',5) &= 9,8377956 \\ \text{Compl. log sen} (50^{\circ} 15' 0'') &= 0,1141630 \\ \text{Compl. log sen} (63^{\circ} 5' 15'') &= 0,0497819 \\ \hline &19,9220188 \end{aligned}$$

$$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2} A'ZP = 9,9610094$$

si otterrà finalmente $\frac{1}{2} A'ZP = 66^{\circ} 4' 58'',5$, donde si trae $O'H = 132^{\circ} 9' 57''$

L'azimut calcolato in tal modo serve a scoprire la variazione dell'ago magnetico; poichè questa variazione è eguale alla differenza che si trova tra il risultato del calcolo e l'azimut osservato immediatamente per mezzo del compasso azimutale. *Vedi COMPASSO AZIMUTALE.*

L'amplitudine è il complemento dell'azimut di un astro che si trova precisamente sull'orizzonte, cioè la differenza tra 90° e questo azimut; per conseguenza essa si deduce immediatamente da quest'ultimo, quando è conosciuto, e viceversa; ma dobbiamo fare osservare in questo proposito che adesso noi diamo alla parola *complemento* un significato più esteso, facendole esprimere una differenza eguale a

$$90^{\circ} - x,$$

qualunque sia x ; poichè questa parola non si applica ordinariamente a una tal differenza che quando essa è positiva, vale a dire nel caso di $x < 90^{\circ}$. Nel senso generale che le attribuiamo, l'espressione di $90^{\circ} - x$ può esser positiva o negativa; il che è utile a considerarsi; poichè, quando quest'espressione è positiva, l'amplitudine è della stessa denominazione, boreale o australe, del polo elevato, mentre, quando è negativa, l'amplitudine ha una denominazione opposta. *Vedi AMPLITUDINE.*

AZIMUTTALE (*Astron.*). Dicesi *Circolo azimutale* un circolo orizzontale che serve a trovare l'azimut di un astro. Se ne può vedere la descrizione e il modo di servirsene in Lemonnier, *Institutions astronomiques*, Parigi, 1746 in-4, e in altri trattati d'astronomia più antichi, poichè presentemente questo strumento è fuori d'uso.

AZIONE (*Meccanica*). Sotto questo nome s'indica lo sforzo che fa un corpo o una potenza contro un altro corpo o nn'altra potenza, o più esattamente il moto che un corpo comunica realmente o tende a comunicare ad un altro corpo.

Se nn corpo è sollecitato da forze eguali e contrarie, esso rimane in riposo; ma se una delle forze è maggiore, essa ne determinerà il moto distruggendone prima la forza opposta e agendo quindi col suo eccesso di forza.

È bene l'osservare che l'azione di un corpo sopra un altro in uno spazio, che si muove in una maniera qualunque, è la stessa che se lo spazio fosse in riposo; così il movimento de' corpi a bordo di nn bastimento che fende le onde si effettua nello stesso modo che se il bastimento fosse in riposo; il moto della terra intorno del suo asse non produce alcun effetto sopra l'azione de' corpi e degli agenti alla sua superficie. In generale l'azione di un corpo sopra un altro non dipende che dal suo moto relativo.

QUANTITÀ D'AZIONE. Termine impiegato dal Maupertuis per indicare il prodotto della massa di un corpo per la sua velocità e lo spazio percorso. Dobbiamo a questo sapiente il seguente principio: *Quando succede qualche cangiamento nel-*

la natura, la quantità d'azione che lo produce è la più piccola possibile. Questo principio, indicato sotto il nome di *Lex PARCIMONIAE* (*Legge dieconomia*), è, malgrado le facerie di Voltaire, una delle leggi le più importanti delle scienze fisiche-matematiche, e ne risultano diverse conseguenze importantissime che saranno esposte successivamente. Il Maupertuis vi arrivò cercando le leggi della refrazione, e l'applicò quindi a quelle dell'equilibrio come pure a quelle dell'urto de' corpi; esso si elevò ancora a considerazioni di un ordine superiore, concludendone che le leggi del moto riportate a questo principio ed unite alla nozione metafisica delle cause finali, erano ai suoi occhi una prova più convincente dell'esistenza di Dio, o di una prima causa intelligente, che tutti gli altri argomenti ricavati dall'ordine della natura.

Eulero ha fatto una brillante applicazione della legge di economia nella sua opera: *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, vel minimi proprietate gaudentes*. Esso prova che per le traiettorie che i corpi descrivono con forze centrali, la velocità moltiplicata per l'elemento della curva è sempre un *minimum*. Quindi Lagrange, con l'aiuto del calcolo delle variazioni che egli ha scoperto, ha dimostrato nella maniera la più rigorosa e la più elegante che il principio si estendeva a qualunque sistema di corpi sottoposti alle leggi dell'attrazione, e che agiscono d'altra parte gli uni sopra gli altri in una maniera qualunque. Ed è particolarmente da questa bella proposizione di Lagrange, che si è applicato in meccanica il nome di *Principio della minore azione*. Vedi TRAIETTORIA.

AZZARDO (Vedi PROBABILITÀ.).

FINE DEL VOLUME PRIMO

ERRORI

CORREZIONI

PAG. VERB.

1	16 Questa festa ec.	Si ometta questo periodo fino alle parole: il numero quindici
1	20 17 Luglio	23 Luglio
19	13 <i>experimentum</i>	<i>experimentum</i>
32	19 dalla greca parola	dalla greca parola
37	30 <i>scientiarum</i>	<i>scientiarum</i>
37	31 pubblico	pubblicano
57	39 in solo punto	in un solo punto
73	5 si trovano	si trova
144	19 quantità	le quantità
144	26 a 3 lire	a 2 lire
148	ult. Parigi, 1784	Parigi, 1803
223	5 25' 27'',2	25' 7'',2
352	37 $A'p' + B'p' + D' = 0$	$A'p' + B'q' + D' = 0$
454	28 (Tav. XXXV, fig. 6.)	(Tav. XXXV, fig. 5)

